PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR FACTORES INTEGRANTES

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $xdy + ydx = x^4y^8dy$

2) $3ydx = xy^3dy - 5xdy$

3) $xdy - ydx = xy^5dy$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

5) $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - y}{x}$

7) $(x^3y^2 + x)dy + (x^2y^3 - y)dx = 0$

8) $4ydx + xdy = xy^2dx$

9) $(y^2 - y)dx + xdy = 0$

10) $ydx - xdy = (x^2 + y^2)^2(xdx + ydx)$

11) $xdy - ydx = (x^2 + xy - 2y^2)dx$

12) $xdx + ydy = (x^2 + y^2)^3(xdy - ydx)$

13) $xdy - ydx = 32ydy + 98xdx$

SOLUCIONES

1) $5 = (c - 3y^5)(x^3y^3)$

2) $\ln(x^3y^5)^3 = y^3 + C$

3) $y^5 = Cx^5e^{y^5}$

4) $3x^3 = (2y^3 + C)y$

5) $y^2x = xy(\ln x + C) + 1$

6) $1 + xy\ln(x) = Cxy$

7) $\ln(y/x)^2 + (xy)^2 = C$

8) $3 = (x + cx^4)y$

9) $x = (x + C)y$

10) $4\text{arc tg}(x/y) = (x^2 + y^2)^2 + C$

11) $\ln\left(\frac{x + 2y}{x - y}\right) = 3x + C$

12) $6(x^2 + y^2)^3\text{arc tg}(x/y) + 1 = C(x^2 + y^2)^3$

13) $\text{arc tg}(4y/7x) = \ln(49x^2 + 16y^2)^{28} + C$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Se dice que una ecuación diferencial de cualquier orden es lineal, cuando es de primer grado respecto de la variable dependiente y sus derivadas. En otras palabras, una ecuación diferencial es lineal cuando la variable del diferencial del numerador (de la derivada) aparece solo elevada a la primera potencia dentro de la ecuación diferencial. Tomando por ejemplo, la variable y como dependiente, su ecuación general para una ecuación diferencial lineal en y es:

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$; donde P y Q Son funciones de x solamente

Para resolver este tipo de ecuaciones multiplicaremos toda la ecuación diferencial por el factor integrante:
FACTOR = $e^{\int Pdx}$; donde P = coeficiente de la variable lineal (con todo y el signo), los diferenciales son los de la parte del denominador de la derivada. Si la ecuación fuera lineal en x, tendrá la forma:
$\frac{dx}{dy} + Px = Q$; donde P y Q son funciones de y solamente y el factor = $e^{\int Pdy}$

Para este método aplicaremos el concepto:

$$\left(\frac{dy}{dx} + Py\right)e^{\int Pdx}dx = d\left(ye^{\int Pdx}\right)$$

De esto, vemos que multiplicando la parte lineal por el FACTOR $e^{\int Pdx}$ este producto será siempre igual a la derivada de un producto cuyos factores serán siempre la variable lineal multiplicada por el FACTOR $e^{\int Pdx}$ es la clave del método.

PASOS PARA LA OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL

1.- Colocar la ecuación en la forma lineal.
2.- Determinar el coeficiente de la variable lineal (con todo y signo) P.
3.- Encontrar el FACTOR $e^{\int Pd(var)}d(var)$
4.- Multiplicar toda la ecuación por el FACTOR.
5.- Aplicar la identidad $dy + Py\left(e^{\int Pdx}dx\right) = d\left(ye^{\int Pdx}\right)$
6.- Integrar, y la solución será la solución general.

NOTA: Puede ser que la ecuación diferencial no se nos de en forma de derivadas sino de diferenciales por lo tanto, para pasar de diferenciales a derivadas dividiremos toda la ecuación entre la diferencial que aparezca en un mayor número de términos por ejemplo:

$x^2 dy - \text{sen}(2x)\,dx + 3xydx = 0$

Dividiremos entre el dx dado que aparecen más términos con este diferencial. Dividiendo

$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right) - \text{sen}(2x) + 3xy = 0$ Como el coeficiente de la derivada debe ser 1 (uno) entonces dividiremos entre x^2 dandole la forma

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\text{sen}(2x)}{x^2} + \frac{3y}{x} = 0$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{\text{sen}(2x)}{x^2}$ Donde vemos que es ecuación diferencial lineal en y

PROBLEMAS RESUELTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones

1) $dy\,(1+2x\,\text{ctg}\,y) = dx$

Solución:

a) Identificación:

Dividiremos entre dy para darle la forma a la ecuación y esta quedaría como

$1 + 2x\,\text{ctg}\,y = \frac{dx}{dy}$ Colocándola en la forma lineal

$\frac{dx}{dy} - 2x\,\text{ctg}\,y = 1$ Donde vemos que es lineal en x

b) Obtención del factor : $P = 2\text{ctg}(y)$

$$\text{FACTOR} = e^{\int Pdy}\,dy = e^{-2\int \text{ctg}(y)dy}\,dy = e^{-2\,\text{Ln}(\text{sen}\,y)}\,dy$$

Aplicando $c\text{Ln}u = \text{Ln}u^c$

$\text{FACTOR} = e^{\text{Ln}(\text{sen}\,y)^{-2}}\,dy = (\text{sen}\,y)^{-2}\,dy$ Aplicamos $\frac{1}{\text{sen}\,y} = \text{csc}y$

$$\text{FACTOR} = \text{csc}^2 y\,dy$$

c) Producto de la lineal por el FACTOR:

$\left[\frac{dx}{dy} - 2x\,\text{ctg}(y) = 1\right]\left[\text{csc}^2 ydy\right]$ Multiplicando

$$\left(\frac{dx}{dy} - 2x\,\text{ctg}(y)\right)\left(\text{csc}^2 ydy\right) = \text{csc}^2 ydy$$

Aplicamos $\left(\frac{dx}{dy} + Px\right)\left(e^{\int Pdy}\,dy\right) = d\left(xe^{\int Pdy}\right)$

$d\left(x\text{csc}^2 y\right) - \text{csc}^2 ydy = 0$ Integramos

$$\int d(x\text{csc}^2 y) - \int \text{csc}^2 ydy = \int 0$$

d) Solución de integrales:

$$\int d(x\text{csc}^2 y) \approx du = u + c \;;\; u = x\text{csc}^2 y$$

$$\int \text{csc}^2 ydy \approx \text{csc}^2 udu = -\text{ctg}(u) + C \;;\; \text{completa}$$

e) Obtencion de la solución general:

$\int d(x\text{csc}^2 y) - \text{csc}^2 ydy = \int 0$ Integrando

$\boxed{x\text{csc}^2 y + \text{ctg}(y) = C}$ SOLUCION GENERAL

2) $x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2y = x^2 + x$

SOLUCION .-

a) Identificación:

Para darle la forma dividiremos entre x la ecuación y esta quedará como:

$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x + 1$; es lineal en y

b) Obtención del FACTOR:

Primeramente encontramos P y es $P = -\frac{2}{x}$

$\text{FACTOR} = e^{\int Pdx}dx = e^{-2\int \frac{dx}{x}}dx = e^{-2\text{Ln}\,x}dx = e^{\text{Ln}\,x^{-2}}dx \Rightarrow$ Aplicamos $e^{\text{Ln}\,u} = u$

$$\boxed{\text{FACTOR} = x^{-2}\,dx}$$

c) Producto e identidad:

$$\left[\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x + 1\right]\left[x^{-2}\,dx\right] \qquad \text{Multiplicando}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x}\right]\left[x^{-2}dx\right] = x^{-1}dx + x^{-2}\,dx \qquad \text{Aplicando paso 5}$$

$$d(yx^{-2}) - \frac{dx}{x} - x^{-2}\,dx = 0 \qquad \text{Integramos}$$

$$yx^{-2} - \operatorname{Ln}|x| + x^{-1} = C \qquad \text{Multiplicando por } x^2$$

$$y - x^2\operatorname{Ln}|x| + x = Cx^2 \qquad \text{Despejando}$$

$$\boxed{y + x = x^2(C + \operatorname{Ln}|x|)} \qquad \text{SOLUCION GENERAL}$$

3) $t\,ds = (3t + 1)s\,dt + t^3e^{3t}\,dt$

SOLUCION:

a) Identificación:
Para checar si es lineal hay que pasarla a derivadas por lo tanto dividiremos entre dt dado que tiene el coeficiente con mayor número de términos, y quedaría:

$$t\left(\frac{ds}{dt}\right) = (3t + 1)s + t^3e^{3t} \qquad \text{dividiendo entre } t \text{ y dándole la forma a la ecuación tenemos}$$

$$\frac{ds}{dt} - (3 + \frac{1}{t})s = t^2e^{3t} \qquad \text{vemos que es lineal en } s$$

b) Obtención del "FACTOR"

Primero encontramos P ; $P = -3 - \frac{1}{t}$

$$\text{Factor} = e^{\int p\,dt}dt = \quad e^{\int(-3-1/t)dt}dt = \quad e^{-3\int dt - \int dt/t}\,dt$$

$$= e^{-3-\ln t}\,dt \qquad \text{Aplicando } e^{-a-b} = e^{-a}e^{-b}$$

$$\text{Factor} = e^{-3t}e^{-\ln t}dt = e^{-3t}e^{\ln t^{-1}}\,dt = \quad e^{-3t}(t^{-1})dt$$

$$\text{Factor} = e^{-3t}(t^{-1})dt$$

c) Producto e Identidad:

$$\left[\frac{ds}{dt} - (3 + \frac{1}{t})s = t^2e^{3t}\right]\left[e^{-3t}(t^{-1})dt\right] \qquad \text{Multiplicando}$$

$$\left[\frac{ds}{dt} - (3 + \frac{1}{t})s\right]\left[e^{-3t}(t^{-1})dt\right] = t\,dt \qquad \text{Aplicando paso 5}$$

$$d[se^{-3t}(t^{-1})] - t\,dt = 0 \qquad \text{Integrando}$$

$$\int d[se^{-3t}(t^{-1})] - \int t\,dt = \int 0$$

$$se^{-3t}(t^{-1}) - t^2/2 = C \qquad \text{Multiplicando por } (2te^{3t})$$

$$2s - t^3e^{3t} = cte^{3t} \qquad \text{Despejando}$$

$$\underline{2s = te^{3t}(c + t^2)} \qquad \text{SOLUCION GENERAL}$$

NOTA:
Cuando los dos diferenciales tienen coeficientes con igual número de términos, entonces checaremos cual varible pudiera ser la lineal (la que aparezca elevada solo a la primera potencia) para darle la forma lineal en esta variable.

EJEMPLO:

4) $(1+xy)dx = (1+x^2)dy$

SOLUCION:

a) Identificación:
Para darle la forma, vemos que los dos diferenciales tienen el mismo número de términos en su coeficiente, por lo tanto, para saber entre entre qué diferencial dividiremos observaremos qué variable aparece elevada a la primera potencia.
Vemos que y solo aparece a la primera potencia por lo tanto, colocaremos la ecuación lineal en y.

$$(1 + xy)dx = (1 + x^2)dy$$ Dividiendo entre dx

$$(1 + xy) = (1 + x^2)\frac{dy}{dx}$$ **Dividiendo entre $(1 + x^2)$**

$$\frac{(1 + xy)}{1 + x^2} = \frac{dy}{dx}$$ **Aplicando $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$**

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{dy}{dx}$$ **Dándole la forma**

$$\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$ **Vemos que sí es lineal en y**

b) Obtención del FACTOR

Primeramente $P = -\frac{x}{1+x^2}$

$$\text{FACTOR} = e^{\int P dx} dx = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{(2)x dx}{1+x^2}} dx = e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} dx = e^{\ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}} dx$$

$$\boxed{\text{FACTOR} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}$$

c) Producto e identidad:

$$\left[\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\right]\left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx\right]$$ **Multiplicando**

$$\underbrace{\left[\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2}\right]\left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx\right]} = \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$ **Aplicando paso 5**

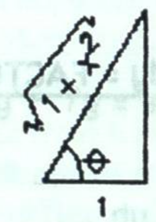
$$d\left[y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$ **Integramos**

$$\int d\left[y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int 0$$

d) Solución de integrales:

$$\int d\left[y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = \int du = u + c$$

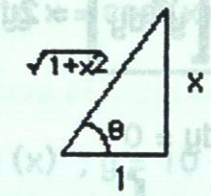
$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow$$ **Sustitución Trigonometrica**



$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(1 + tg^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^3\theta}$$

$$\frac{x}{1} = tg\theta;\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \qquad 1 + tg\,\theta = \sec^2\theta$$

$$\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \int \cos\theta\, d\theta = \operatorname{sen}\theta + c$$ **de**



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

e) Obtención de la solución general:

$$\int d\left[y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int 0$$ **Integramos**

$$y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = C$$ **Multiplicamos por $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$**

$$y - x = c\sqrt{1+x^2}$$ **Despejando**

$$\boxed{y = c\sqrt{1+x^2} + x}$$ **Solución General.**