5) $\frac{dx}{dy} + \left\{\frac{3}{y}\right\} x = 2y$; $y=1$ cuando $x=2$

SOLUCION:

a) Identificación :

Vemos que la ecuación es lineal en x .

b) Obtención del FACTOR:

$P=3/y$

$$\text{FACTOR} = e^{\int P dy} dy = e^{3\int \frac{dy}{y}} dy = e^{3\ln y} dy = e^{\ln y^3} dy = \boxed{y^3 dy = \text{FACTOR}}$$

c) Producto e identidad:

$\left[\frac{dx}{dy} + \left\{\frac{3}{y}\right\} x = 2y\right] \left[y^3 dy\right]$ Multiplicando

$\underbrace{\left[\frac{dx}{dy} + \left\{\frac{3}{y}\right\} x\right] \left[y^3 dy\right]} = 2y^4 dy$ Aplicando el paso 5.

$d(xy^3) - 2y^4 dy = 0$ Integramos

$\int d(xy^3) - 2\int y^4 dy = \int 0$ Aplicando $\int d(xy^3) \approx \int du = u + c$

$xy^3 - \frac{2y^5}{5} = c$ Multiplicamos por 5 y factorizando.

$\boxed{y^3(5x - 2y^2) = c}$ Solución General.

d) Obtención de la solución particular:

Sustituyendo $x = 2$ y $y = 1$ en la solución general.

$(1)^3 [5(2) - 2(1)^2] = c$; $\boxed{c = 8}$ Sustituyendo C en la solución general.

$\boxed{y^3(5x - 2y^2) = 8}$ Solución Particular

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVER POR ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $\frac{dy}{dx} - 3y = 6$

2) $\frac{dy}{dx} + y = \operatorname{sen} x$

3) $y' - 2xy = x$

4) $y' - 7y = \operatorname{sen}(2x)$

5) $x \left\{\frac{dy}{dx}\right\} - 4y = x^6 e^x$

6) $(x^2 + 9) \frac{dy}{dx} + xy = 0$

7) $\cos(x) \frac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$

8) $\cos^2 x \operatorname{sen} x\, dy + (y\cos^3 x - 1)\, dx = 0$

9) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$

10) $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \cos^2(x)$; $y = -1$ Cuando $x = 0$

11) $(x + 1) \frac{dy}{dx} + y = \ln(x)$; $y = 10$ Cuando $x = 1$

SOLUCIONES:

1) $y + 2 = ce^{3x}$

2) $2y + \cos x = ce^{-x} + \operatorname{sen} x$

3) $2y + 1 = ce^{x^2}$

4) $53y + 2\cos(2x) + 7\operatorname{sen}(2x) = ce^{7x}$

5) $y + x^4 e^x = x^4(xe^x + c)$

6) $y\sqrt{x^2 + 9} = c$

7) $y = \operatorname{sen}(x) + [\cos(x)]\, c$

8) $y \operatorname{sen} x = \operatorname{tg}(x) + c$

9) $ye^x = \ln(e^x + e^{-x}) + c$

10) $y = \operatorname{sen}(x)\cos(x) - \cos(x)$

11) $(x + 1)\, y = x\ln(x) - x + 21$

ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A LINEALES.

Una ecuación diferencial reducible a lineal es aquella que tiene la forma (para y).

(1) $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ donde p ,q $\Rightarrow$ f(x)

Es decir parece lineal pero la variable aparece a la primera potencia (como en lineal), pero también aparece elevada a otra potencia en otro término. También puede ser que la variable este dentro de una función, con lo cual será reducible a la lineal. La ecuación (1) se denomina ecuación de Bernoulli.

Como vimos en lineales $e^{\int Pdx}\, dx \left\{\frac{dy}{dx} + Py\right\} = d\left\{ye^{\int Pdx}\right\}$ entonces, es reducible a lineal, lo que haremos será sustituir la relación $ye^{\int Pdx}$ por la nueva variable v.

$v = ye^{\int Pdx}$ despejando y ; $y = v\, e^{-\int Pdx}$

METODO:

Tomando como base la ecuación $\frac{dy}{dx} + Py = Q\, y^n$

1.- Sustituiremos la variable lineal (y) por el producto de la nueva variable v multiplicada por el factor de lineales pero con la potencia de signo contrario , o sea $y = ve^{-\int Pdx}$

2.- Diferenciando la ecuación anterior encontraremos el valor del diferencial el cual, también será sustituido.

3.- Las sustituciones de la variable y su diferencial se harán en la ecuación pero puesta en diferenciales, no en derivadas. Para pasar de derivadas a diferenciales, multiplicaremos por el diferencial del denominador.

4.- La ecuación resultante se resolverá por separación de variables.

5.- Ya encontrada la solución sustituiremos $v = ye^{\int Pdx}$ es decir, se despeja v de la ecuación del paso 1.

PROBLEMAS RESUELTOS

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones.

1) $\frac{dy}{dx} + \left\{\frac{1}{(x-2)}\right\}y = 5(x-2)\sqrt{y}$

SOLUCION:

a) Identificación:

Como la variable del diferencial del numerador aparece elevada a la primera potencia pero también aparece elevada a la un medio (la raíz cuadrada) entonces es reducible a lineal.

b) Sustituciones:

Primeramente determinaremos P igual que en lineales. $P = \frac{1}{x-2}$ como y es la supuesta lineal entonces será la que sustituiremos.

$y = ve^{-\int Pdx} = ve^{-\int \frac{dx}{x-2}} = ve^{-\ln(x-2)} = ve^{\ln(x-2)^{-1}}$

$y = v(x-2)^{-1}$ diferenciando

$dy = -v(x-2)^{-2}dx + (x-2)^{-1}dv$

Como la ecuación nos la dan en derivadas, hay que pasarla a diferenciales multiplicando por dx y queda:

$dy + \left\{\frac{1}{x-2}\right\} y\, dx = 5(x-2)\sqrt{y}\, dx$ Sustituyendo y y dy

$\cancel{-v(x-2)^{-2}dx} + (x-2)^{-1}dv + \cancel{\left\{\frac{1}{x-2}\right\} v(x-2)^{-1} dx} = 5(x-2)\sqrt{v(x-2)^{-1}}dx$ Simplificando

$(x-2)^{-1}dv = 5(x-2)^{1/2}\sqrt{u}\, dx$ (I)

c) Resolviendo por separación de variables:

FACTOR = $\left[\frac{1}{(x-2)^{-1}\sqrt{v}}\right]$ Multiplicando la ecuación (I) por el factor igualado a cero

$\left[(x-2)^{-1} dv - 5(x-2)^{1/2}\sqrt{v}\, dx = 0\right]\left[\frac{1}{(x-2)^{-1}\sqrt{v}}\right]$ Multiplicando

$v^{-1/2} dv - 5(x-2)^{3/2} dx = 0$ Integramos

$\int v^{-1/2} dv - 5\int (x-2)^{3/2} dx = 0$ Aplicando $\int u\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$2v^{1/2} - 2(x-2)^{5/2} = C$ Dividiendo entre 2

$v^{1/2} - (x-2)^{5/2} = C$ de b) $v = y(x-2)$ Sustituyendo

$[y(x-2)]^{1/2} - (x-2)^{5/2} = C$ factorizando

$(x-2)^{1/2}\left[\sqrt{y} - (x-2)^2\right] = C$ desarrollando $(x-2)^2$

$\boxed{(x-2)^{1/2}(\sqrt{y} - x^2 + 4x - 4) = C}$ <u>SOLUCION GENERAL</u>

2) $dy - y\,sen(x)\, dx = y\ln (y e^{\cos x})\, dx$

a) Identificación:

Pasándola a derivadas dividiremos entre dx

$\frac{dy}{dx} - y\, sen(x) = y \ln (y e^{\cos x})$ como y la supuesta lineal, aparece a la primera potencia pero también dentro de una función, en este caso un logaritmo natural, entonces es reducible a lineal.

b) Sustituciones:

$P = -\,sen\, x$ Como y es la variable lineal

$y = v e^{-\int P dx} = v e^{\int sen\, x dx} =$ $y = v e^{-\cos x}$ Diferenciando

$dy = v e^{-\cos x} sen\, x\, dx + e^{-\cos x} dv$

$dy - y\, sen\, x\, dx = y \ln (y e^{-\cos x}) dx$ Sustituyendo y y dy En la ecuación diferencial

$\cancel{v e^{-\cos x} sen\, x\, dx} + e^{-\cos x} dv - \cancel{v e^{-\cos x} sen\, x\, dx} = v e^{-\cos x} \ln [v e^{-\cos x} e^{\cos x}]\, dx$

$e^{-\cos x} dv = v e^{-\cos x} \ln (v)\, dx$ Dividiendo entre $e^{-\cos x}$ e igualando a cero

$dv - v \ln (v)\, dx = 0$

c) Resolviendo por separación de variables :

FACTOR = $\left[\frac{1}{v \ln (v)}\right]$ Multiplicamos la ecuación por este factor

$\left[dv - v \ln (v)\, dx = 0\right]\left[\frac{1}{v \ln (v)}\right]$

$\frac{dv}{v \ln (v)} - dx = 0$

$\int \frac{dv}{v \ln (v)} - \int dx = \int 0$

d) Solución de integrales

$\int \frac{dv}{v \ln (v)} \approx \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c \; ; \; u = \ln |v| \; ; \; du = \frac{dv}{v} \; ;$

e) Obtención de la solución General:

$\int \frac{dv}{v \ln (v)} - \int dx = \int 0$ Integrando

$\ln [\ln (v)] - x = c$ Despejando

$\ln [\ln (v)] = c + x$ Exponenciando

$e^{\ln[\ln(v)]} = e^{c+x}$ Aplicando $e^{\ln u} = u \; ; \; e^{a+b} = e^a e^b \; ; \; e^c = c$

$\ln(v) = c e^x$ de b) $y = v e^{-\cos x}$ $v = y e^{\cos x}$ Sustituimos

$\boxed{\ln (y e^{\cos x}) = c\, e^x}$ <u>Solución General.</u>

3.- $\frac{dx}{dy} + x ctg(y) = \frac{x \, sen\, y \cos y}{x^2 sen^2 y + 1}$

SOLUCION:

a) Identificación:

Es reducible a lineal en x porque aparece elevada a la primera potencia y también elevada a otra potencia.

b) Sustituciones:

$P = ctg(y)$ Como x es la supuesta lineal

$x = v e^{-\int P dy} = v e^{-\int ctg\, y\, dy} = v e^{-\ln(sen\, y)} = v e^{\ln(sen\, y)^{-1}}$

$x = v \csc y$ Se aplicó $(sen\, y)^{-1} = \csc y$

$dx = -v \csc y\, ctg\, y\, dy + \csc y\, dv$ Pasando la ecuación a diferenciales (multiplicamos por dy)

$dx + x\, ctg(y)\, dy = \frac{x\, sen\, y \cos y\, dy}{x^2 sen^2 y + 1}$ Sustituimos x y dx

$\cancel{-v \csc y\, ctg\, y\, dy} + \csc y\, dv + \cancel{v \csc y\, ctg\, y\, dy}$

$= \frac{v \csc y\, sen\, y \cos y\, dy}{v^2 \csc^2 y\, sen^2 y + 1}$ Reduciendo

$\csc y\, dv = \frac{v \csc y\, sen\, y \cos y\, dy}{v^2 \csc^2 y\, sen^2 y + 1}$ Aplicando $sen\, y \csc y = 1$

$\csc y\, dv = \frac{v \cos y\, dy}{v^2 + 1}$ Igualando a cero

$\csc y\, dv - \frac{v \cos y\, dy}{v^2 + 1} = 0 \quad (1)$

c) Resolviendo por separación de variables:

$FACTOR = \left[\frac{v^2 + 1}{v \csc y}\right]$ Multiplicamos la ecuación (1) por el factor

$\left[\csc y\, dv - \frac{v \cos y\, dy}{v^2 + 1} = 0\right]\left[\frac{v^2 + 1}{v \csc y}\right]$ Multiplicando

$\frac{(v^2 + 1)\, dv}{v} - \frac{\cos y\, dy}{\csc y} = 0$ Aplicando $\frac{1}{\csc y} = sen\, y$; $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$v\, dv + \frac{dv}{v} - \cos y\, sen\, y\, dy = 0$ Integramos

$\int v\, dv + \int \frac{dv}{v} - \int \cos y\, sen\, y\, dy = \int 0$

d) Solución de integrales:

$\int \cos(y)\, sen(y)\, dy \approx \int u\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$; $u = sen(y)$; $du = \cos(y)\, dy$.

e) Obtención de la solución general:

$\int v\, dv + \int \frac{dv}{v} - \int \cos(y)\, sen(y)\, dy = \int 0$

$\frac{v^2}{2} + \ln|v| - \frac{sen^2(y)}{2} = C$ Multiplicando por 2

$v^2 + 2\ln|v| = C + sen^2(y)$ de b) $x = v \csc(y)$; $v = \frac{x}{\csc(y)}$

Aplicando $1/\csc(y) = sen(y)$ por lo tanto $v = x\, sen(y)$

$\boxed{x^2 sen^2(y) + \ln(x\, sen\, y)^2 = C + sen^2(y)}$ SOLUCION GENERAL

4) $(x + 1)\, dy = y[y(x + 1)\ln(x+1) - 1]dx$

SOLUCION:

a) Identificación:

Primero veremos si es reducible a lineal, dividiremos entre dx

$(x+1)\left(\frac{dy}{dx}\right) = y^2(x+1)\ln(x+1) - y$ dividiendo entre $(x+1)$

$\frac{dy}{dx} = y^2 \ln(x+1) - \frac{y}{x+1}$ colocándola en la forma

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = y^2 \ln(x+1)$ vemos que es reducible a lineal porque aparece y^2

b) Sustituciones:

$P = \dfrac{1}{x+1}$ como y es la supuesta lineal

$y = ve^{-\int P dx} = ve^{-\int \frac{dx}{x+1}} = ve^{-\ln(x+1)} = ve^{\ln(x+1)^{-1}}$

$y = v(x+1)^{-1}$.

$dy = -v(x+1)^{-2}dx + (x+1)^{-1}dv$ diferenciando la ecuación

$(x+1)dy = y^2(x+1)\ln(x+1)\,dx - y\,dx$ Sustituimos y y dy

$(x+1)\left[-v(x+1)^{-2}dx + (x+1)^{-1}dv\right] = v^2(x+1)^{-2}(x+1)\ln(x+1)\,dx - v(x+1)^{-1}dx$

$\cancel{-v(x+1)^{-1}dx} + dv = v^2(x+1)^{-1}\ln(x+1)dx - \cancel{v(x+1)^{-1}dx}$ Reduciendo e igualando a cero.

$dv - \dfrac{v^2\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = 0$ Dividiendo entre v^2.

$v^{-2}dv - \dfrac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = 0$ Integramos

$$\int v^{-2}dv - \int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = \int 0$$

c) Solución de integrales:

$$\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} \approx \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c; \quad u = \ln(x+1); \; du = \frac{dx}{x+1}$$

d) Obtención de la solución general:

$\int v^{-2}dv - \int \dfrac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = \int 0$ Integrando

$-v^{-1} - \dfrac{\ln^2(x+1)}{2} = c$ Multiplicando por $-2v$

$2 + v\ln^2(x+1) = c\,v$ De b) $y = v(x+1)^{-1}$ $v = y(x+1)$

$\boxed{2 + y(x+1)\ln^2(x+1) = cy(x+1)}$ Solución General.

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVER POR ECUACIONES QUE SE PUEDEN REDUCIR A LA FORMA LINEAL

RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES DIFERENCIALES :

1) $\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^2$

2) $dx + \left(\dfrac{2x}{y}\right)dy = 2x^2y^2dy$

3) $dx - 2xy\,dy = 6x^3y^2e^{-2y^2}dy$

4) $(12e^{2x}y^2 - y)\,dx = dy$; $y = 1$ Cuando $x = 0$

5) $3y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{y^3}{x+1} - 8(x+1) = 0$; $y = 0$ Cuando $x = 0$

6) $x\,dy = x^4dx + \dfrac{2x^6}{3y}dx + 2y\,dx$

SOLUCIONES

1) $y\left[ce^{\left(\frac{x^2}{2}\right)} + 1\right] = 1$

2) $1 + 2y^3x = cxy^2$

3) $e^{2y^2} = (c - 4y^3)x^2$

4) $y^{-1}e^{-x} = 13 - 12e^x$

5) $y^3(x+1) = \dfrac{8}{3}\left[(x+1)^3 - 1\right]$

6) $6yx^{-2} - \ln(3yx^{-2} + 2)^4 = 3x^2 + c$