b) Sustituciones:

$P = \dfrac{1}{x+1}$ como $y$ es la supuesta lineal

$$y = ve^{-\int P dx} = ve^{-\int \frac{dx}{x+1}} = ve^{-\ln(x+1)} = ve^{\ln(x+1)^{-1}}.$$

$$y = v(x+1)^{-1}.$$

$$dy = -v(x+1)^{-2}dx + (x+1)^{-1}dv$$ diferenciando la ecuación

$$(x+1)dy = y^2(x+1)\ln(x+1)\,dx - y\,dx$$ Sustituimos y y dy

$$(x+1)\left[-v(x+1)^{-2}dx + (x+1)^{-1}dv\right] = v^2(x+1)^{-2}(x+1)\ln(x+1)\,dx - v(x+1)^{-1}dx$$

$$\cancel{-v(x+1)^{-1}dx} + dv = v^2(x+1)^{-1}\ln(x+1)dx - \cancel{v(x+1)^{-1}dx}$$ Reduciendo e igualando a cero.

$$dv - \frac{v^2\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = 0$$ Dividiendo entre $v^2$.

$$v^{-2}dv - \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = 0$$ Integramos

$$\int v^{-2}dv - \int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = \int 0$$

c) Solución de integrales:

$$\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} \approx \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c; \quad u = \ln(x+1);\ du = \frac{dx}{x+1}$$

d) Obtención de la solución general:

$$\int v^{-2}dv - \int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = \int 0$$ Integrando

$$-v^{-1} - \frac{\ln^2(x+1)}{2} = c$$ Multiplicando por $-2v$

$$2 + v\ln^2(x+1) = cv$$ De b) $y = v(x+1)^{-1}$ $v = y(x+1)$

$$\boxed{2 + y(x+1)\ln^2(x+1) = cy(x+1)}$$ Solución General.

# PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVER POR ECUACIONES QUE SE PUEDEN REDUCIR A LA FORMA LINEAL

RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES DIFERENCIALES :

1) $\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^2$

2) $dx + \left(\dfrac{2x}{y}\right)dy = 2x^2y^2dy$

3) $dx - 2xy\,dy = 6x^3y^2e^{-2y^2}dy$

4) $(12e^{2x}y^2 - y)\,dx = dy$ ; $y = 1$ Cuando $x = 0$

5) $3y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{y^3}{x+1} - 8(x+1) = 0$ ; $y = 0$ Cuando $x = 0$

6) $x\,dy = x^4dx + \dfrac{2x^6}{3y}dx + 2y\,dx$

## SOLUCIONES

1) $y\left[ce^{\left(\frac{x^2}{2}\right)} + 1\right] = 1$

2) $1 + 2y^3x = cxy^2$

3) $e^{2y^2} = (c - 4y^3)x^2$

4) $y^{-1}e^{-x} = 13 - 12e^x$

5) $y^3(x+1) = \frac{8}{3}\left[(x+1)^3 - 1\right]$

6) $6yx^{-2} - \ln(3yx^{-2} + 2)^4 = 3x^2 + c$

## ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

OPERADORES:
Un operador es un símbolo que indica una operación que se debe de efectuar.
El operador D significa tomar la derivada con respecto a x de ...
En general:

$$Du \equiv \frac{du}{dx}$$

$$D^2u \equiv \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$D^ku \equiv \frac{d^ku}{dx^k}$$

donde u es una función de x.
Los operadores elementales $a\,D^k$, donde a es constante, siguen las leyes fundamentales del álgebra.

$$(a\,D^m + b\,D^n)\,u = (b\,D^n + a\,D^m)\,u,$$

$$(a\,D^m).(b\,D^n)\,u = (b\,D^m).(a\,D^n)\,u$$

$$[a\,D^m + (b\,D^n + c\,D^r)\,u = [(a\,D^m + b\,D^n) + c\,D^r]\,u$$

Como los operadores $a\,D^k$, donde a es constante, siguen las leyes fundamentales del álgebra, se pueden obtener de los operadores algebraicos dados otros operadores algebraicos dados otros operadores iguales multiplicando, elevando a potencias, introduciendo o quitando paréntesis, exactamente como si los operadores fuesen expresiones algebraicas. Es indiferente el orden de términos en una suma o de factores en un producto.

Ejemplos:

$$a^2D^2 + 2aD - 3 = (aD + 3)(aD - 1)$$

$$(2D^2 + 5D + 6)\,x^3 = 12\,x + 15\,x^2 + 6x^3$$

$$(D - a)(D - b)\,y = [D^2 - (a + b)\,D + a\,b]\,y$$



## ECUACION DIFERENCIAL LINEAL

Una ecuación diferencial lineal contiene la variable dependiente y todas sus derivadas solo en el primer grado.

Su forma general es:

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,D + a_n)\,y = x$$

donde las a y x son funciones de x

Si x = 0 se dice que la ecuación es homogénea.

## ECUACION DIFERENCIAL LINEAL HOMOGENEA CON COEFICIENTES CONSTANTES

Hallaremos un método para resolver las ecuaciones del tipo

$$(a_0\,D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,D + a_n)\,y = 0 \qquad (1)$$

donde las a son constantes.

Un caso especial es $D\,y + a\,y = 0$ y su solución es $y = ce^{-ax}$, lo que sugiere que una función de la forma

$$y = ce^{mx}$$

Puede ser una solución de la ecuación (1).

Sustituyendo $y = ce^{mx}$ , $\frac{dy}{dx} = mce^{mx}$..

$$\frac{d^ky}{dx^k} = cm^ke^{mx}$$

en la ecuación (1) obtenemos:

$$ce^{mx}(a_0m^n + a_1m^{n-1} + \ldots \; a_{n-1}m + a_n) = 0$$

Esta ecuación será satisfecha si m es una raíz de la ecuación:

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + \; a_{n-1}m + a_n = 0$$

Esta ecuación se llama ecuación característica ó ecuación auxiliar.
La ecuación característica es de grado n. Las raíces de esta ecuación serán $m_1, m_2, \ldots, m_n$

Si estas raices son todas reales y diferentes, entonces las n soluciones

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}, \quad \dots \quad y_n = e^{m_n x}$$

son linealmente independientes, y la solución general de la ecuación (1) puede escribirse como :

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

en donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Ejemplos:

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones:



1) $(D^3 + 2D^2 - 3D)\,y = 0$

La ecuación característica es:

$m^3 + 2m^2 - 3m = 0$

Factorizando tenemos

$m(m^2 + 2m - 3) = 0$

$m(m-1)(m+3) = 0$

Por lo tanto, las raíces de ésta ecuación son:

0, 1, -3.

y la solución general de la ecuación es: $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-3x}}$

2) $(D^2 + 5D + 4)y = 0$

La ecuación característica es:

$m^2 + 5m + 4 = 0$

Factorizando :

$(m + 4)(m + 1) = 0$

Resolviendo, las raíces son: -4, -1.

Por lo que la solución general es: $\boxed{y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}}$

3) $(D^2 + 6D + 5)(D^2 - 9D + 18)\,y = 0$

La ecuación característica es:

$(m^2 + 6m + 5)(m^2 - 9m + 18) = 0$

Factorizando tenemos:

$(m + 5)(m + 1)(m - 6)(m - 3) = 0$

Resolviendo las raíces son: -5, -1, 6, 3

y la solución general será: $\boxed{y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{6x}}$

4) $(D^3 - 21D + 20)y = 0$

La ecuación característica es:

$m^3 - 21m + 20 = 0$

Para encontrar las raíces de ésta ecuación utilizamos la división sintética.

$$\begin{array}{rrr|l} 1+0 & -21 & +20 & \underline{1} \\ +1 & +1 & -20 & \\ \hline 1+1 & -20 & \boxed{+0} & \end{array}$$

Con esto la ecuación se reduce a una cuadrática que será:

$m^2 + m - 20 = 0$

Factorizamos: $(m+5)(m-4) = 0$

Por lo que las raíces de la ecuación característica son: 1, 4, -5.

y su solución general es : $\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-5x}}$

5) $(D^3 - 5D - 2)y = 0$

La ecuación característica es

$$m^3 - 5m - 2 = 0$$

Para encontrar las raíces de esta ecuación utilizamos la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +0 & -5 & -2 & \underline{-2} \\ & -2 & +4 & +2 & \\ \hline 1 & -2 & -1 & +0 & \end{array}$$

Se reduce la ecuación a una cuadrática

$$m^2 - 2m - 1 = 0$$

Utilizando la fórmula general

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde a = 1 , b = -2 , c = 1

Sustituyendo en la fórmula general, tendremos.

$$\frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Las raíces de la ecuación son:

$$-2 , 1 \pm \sqrt{2}$$

Y la solución general es:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_3 e^{(1-\sqrt{2})x}$$

ó

$$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + e^{x}(c_2 e^{\sqrt{2}x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x})}$$



## ECUACION CARACTERISTICA CON RAICES MULTIPLES

La parte de una solución correspondiente a una raíz $a$ , múltiple de orden $p$ , de la ecuación característica es

$$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c x^{p-1}) e^{ax}$$

Ejemplos :

1) $(D-2)^3 (D+3)^2 (D-4)y = 0$

La ecuación característica es :

$$(m-2)^3 (m+3)^2 (m-4) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son :

2 , 2 , 2 , -3 , -3 , 4

y su solución general es :

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x} + (c_4 + c_5 x) e^{-3x} + c_6 e^{4x}}$$

2) $(D^5 - 2D^4 + D^3)y = 0$

La ecuación característica es:

$$m^5 - 2m^4 + m^3 = 0$$

Factorizando

$$m^3(m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m^3(m-1)^2 = 0$$

Las raíces son : 0 , 0 , 0 , 1 , 1 y la solución general.

$$\boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + (c_4 + c_5 x) e^{x}}$$

3) $(D^2 + 7D + 12)(D^2 + 8D + 16)y = 0$

La ecuación característica es:

$$(m^2 + 7m + 12)(m^2 + 8m + 16) = 0$$

Factorizando :

$$(m+4)(m+3)(m+4)(m+4) = 0$$

Por lo que las raíces son :

-3 , -4 , -4 , -4

y la solución general

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-4x} + c_4 e^{-3x}}$$

4) $(D^4 - 13D^2 + 36)^2 y = 0$

La ecuación característica es:

$[m^4 - 13m^2 + 36]^2 = 0$

Factorizando:

$(m^2 - 9)^2 (m^2 - 4)^2 = 0$

Como ambos factores son diferencias de cuadrados

$[(m+3)(m-3)]^2 \; [(m+2)(m-2)]^2 = 0$

Entonces las raíces son:

-3,-3,3,3,-2,-2,2,2.

Y la solución general

$$\boxed{y = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x} + (C_5 + C_6x)e^{2x} + (C_7 + C_8x)e^{3x}}$$

5) $(D^3 + 5D^2 + 8D + 4)\, y = 0$

La ecuación característica es:

$m^3 + 5m^2 + 8m + 4 = 0$

Para encontrar las raíces utilizamos la división sintética.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | +5 | +8 | +4 | \|-1 |
| | -1 | -4 | -4 | |
| 1 | +4 | +4 | +0 | |

Reducimos la ecuación a una cuadrática

$m^2 + 4m + 4 = 0$

Cuya solución es: $(m+2)^2 = 0$

Por lo que las raíces de la ecuación característica son: -1,-2,-2 y la solución general:

$$\boxed{y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + C_3e^{-x}}$$



## ECUACION CARACTERISTICA CON RAICES IMAGINARIAS

La parte de la solución correspondiente al par de raíces complejas conjugadas $a \pm bi$ de la ecuación característica, se puede escribir en la forma:

$$e^{ax}\,(C_1 \operatorname{sen} bx + C_2 \cos bx)$$

En el caso de un par doble de raíces complejas, los términos correspondientes de la solución general son:

$$e^{ax}[(C_1 + C_2x) \operatorname{sen} bx + (C_3 + C_4x)\cos bx]$$

Ejemplos:

1) $(D^2 + 2D + 2)(D^2 + 14D + 49)\, y = 0$

La ecuación característica es:

$(m^2 + 2m + 2)(m^2 + 14m + 49) = 0$

Resolvemos por fórmula general.

$m^2 + 2m + 2 = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = 1,\; b = 2,\; c = 2$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Factorizando $m^2 + 14m + 49 = 0$

$(m+7)^2 = 0$

Entonces tenemos las raíces -7, -7, $-1 \pm i$

y la solución general es :

$$\boxed{y = (c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x)\, e^{-x} + (c_3 + c_4 x)\, e^{-7x}}$$

2) $(D^2 + 100)(D + 7)\, y = 0$

La ecuación característica es:

$(m^2 + 100)(m + 7) = 0$

Las raíces son: $\pm 10i$, -7

Por lo que la solución general será:

$$\boxed{c_1 \operatorname{sen} 10x + c_2 \cos 10x + c_3 e^{-7x}}$$

3) $(D^4+2D^3+10D^2)y = 0$

La ecuación característica es:

$$m^4+2m^3+10m^2 = 0$$

Factorizando:

$$m^2(m^2+2m+10) = 0$$

Resolviendo por la fórmula general: $m^2+2m+10 = 0$

$a = 1$ , $b = 2$ , $c = 10$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$= \frac{-2\pm 6i}{2} = -1\pm 3i$$

Por lo que las raíces son: $0$ , $0$ , $-1\pm 3i$ y la solución general.

$$\boxed{y = C_1 + C_2x + (C_3\operatorname{sen}3x + C_4\cos 3x)\,e^{-x}}$$

4) $(D^2+36)^2y = 0$

La ecuación característica es:

$(m^2+36)^2 = 0$ ó $(m^2+36)(m^2+36) = 0$

Resolviendo: $m^2 = -36$ ; $m = \pm 6i$.

Las raíces son $\pm 6i$, $\pm 6i$

Por lo que la solución general es:

$$\boxed{y = (C_1 + C_2x)\operatorname{sen}6x + (C_3 + C_4x)\cos 6x}$$

5) $(D^2-2D+2)^3y = 0$

La ecuación característica es :

$$(m^2-2m+2)^3 = 0$$

Resolviendo por fórmula general : $m^2-2m+2 = 0$

$a = 1$ , $b = -2$ , $c = 2$

$$= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$$

Pero este par de raíces se repite 3 veces por lo que la solución general es:

$$\boxed{y = [\,(c_1 + c_2x + c_3x^2)\cos x + (c_4 + c_5x + c_6x^2)\operatorname{sen} x\,]e^x}$$



**PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR OPERADORES**

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

1) $(D^2+9D+18)\,y = 0$

2) $(D^2-3D-10)\,y = 0$

3) $(D^2+4D-21)\,y = 0$

4) $D^2y = Dy$

5) $(D^3-7D+6)\,y = 0$

6) $(D^4-D^3-7D^2+3D)\,y = 0$

7) $(D^3-D^2-D+1)\,y = 0$

8) $(D^6-8D^4+16D^2)\,y = 0$

9) $(D^5-12D^3+16D^2)\,y = 0$

10) $(D^2-6D+9)^3y = 0$

11) $(D^3-4D^2+5D)y = 0$

12) $(D^2+2D+10)(D^2-2D+2)y = 0$

13) $(D^4+8D^2+16)y = 0$

14) $(D^6+6D^4+9D^2)\,y = 0$

15) $(D^2+16)^2\,y = 0$

16) $(D^2-4D+5)^2y = 0$

17) $(D^4-8D^3+32D^2-64D+64)y = 0$

18) $(D^5-D^4-2D^3+2D^2+D-1)y = 0$

19) $(D^4+8D^3+24D^2+32D+16)y = 0$

20) $(D^3-6D^2+2D+36)y = 0$

21) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$

22) $\dfrac{dy}{dx} - 7y = 0$

23) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 7\dfrac{d^2y}{dx^2} + 12\dfrac{dy}{dx} = 0$

24) $3\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + 11y = 0$

25) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6\,y = 0$