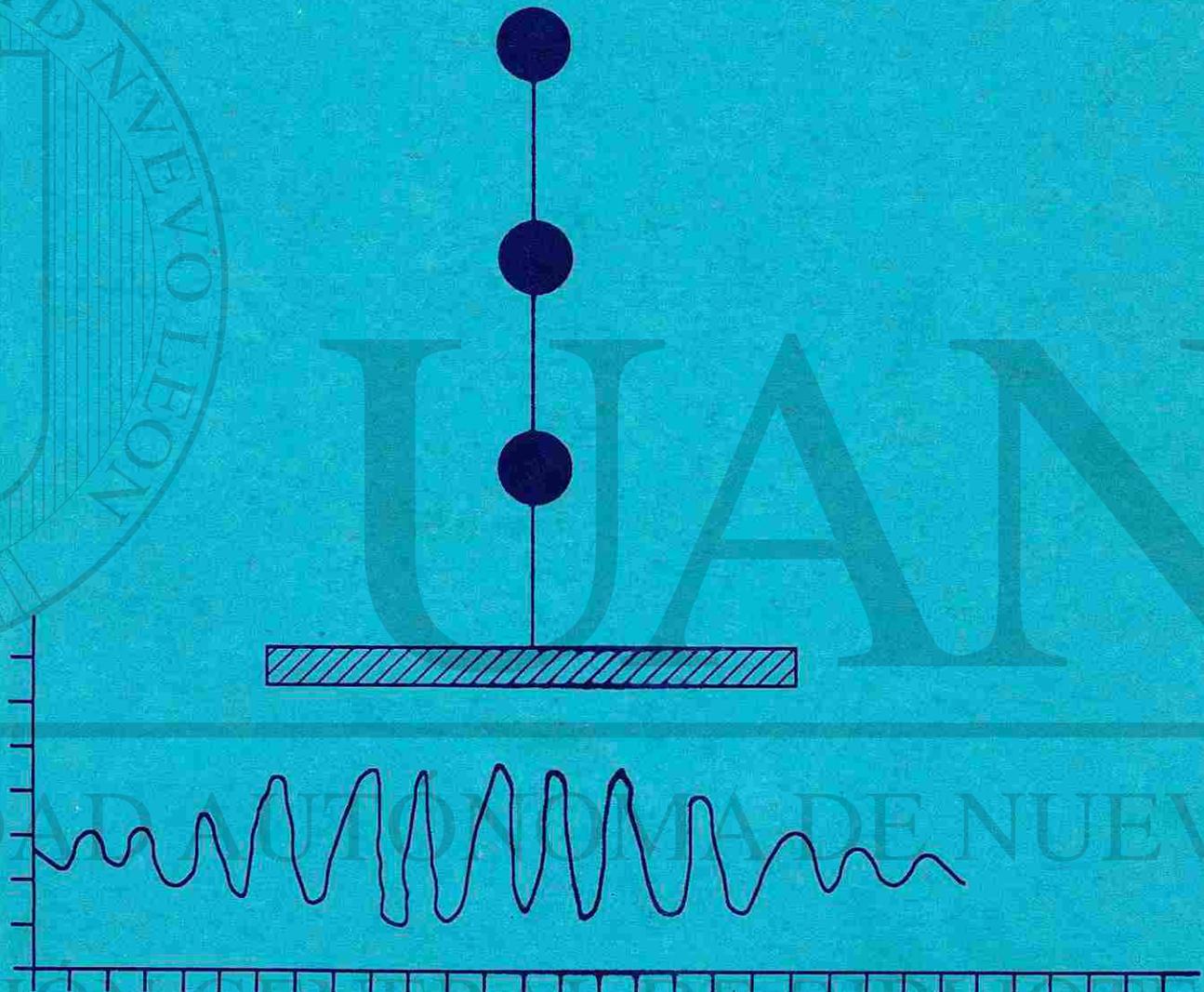


# ANALISIS SISMICO

APUNTES PARA CLASE

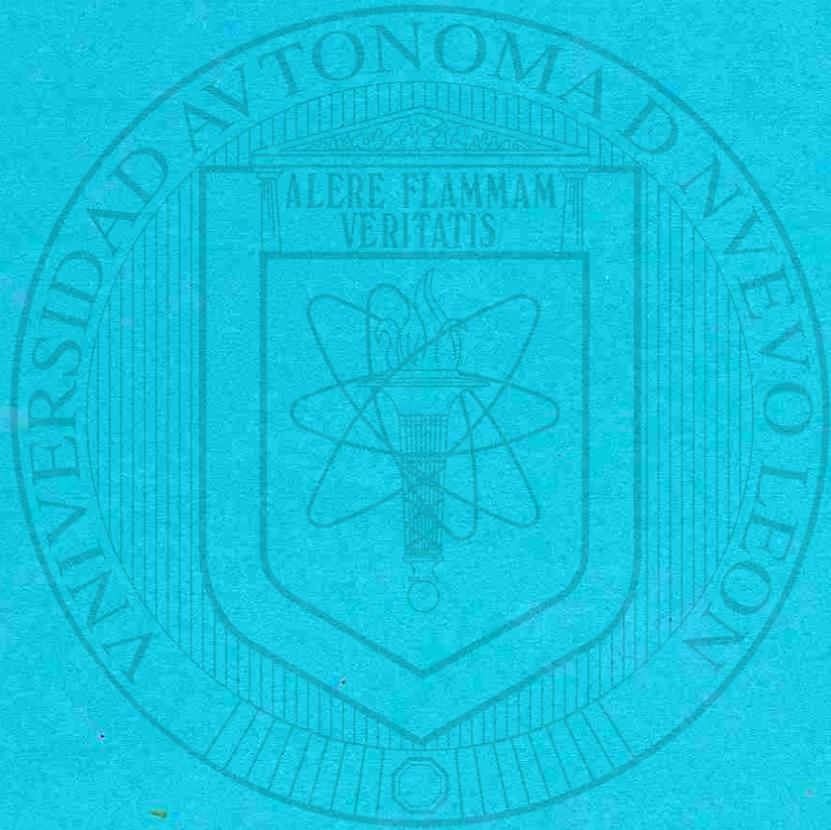


RECOPIACION:  
Ing. Luis M. Aranda M  
Agosto 1990.

QE5  
.2  
A5  
c. 3



1020158367



JUAN I

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



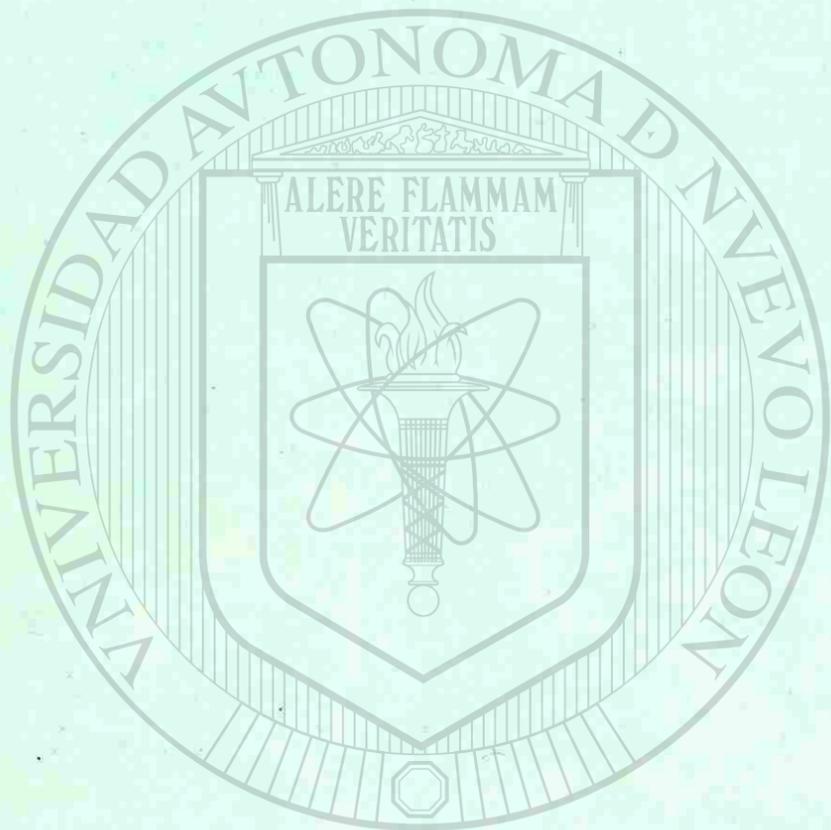
FONDO UNIVERSITARIO

(1) - (2 FUNI Solo)  
09-11-07

FUN I

CAPILLA ALFONSO

QE 534  
.2  
A5  
C.3



CAPITULO 1

CINEMATICA DE LAS VIBRACIONES

1.1. Definiciones. Una vibración es, en su sentido más general, un movimiento periódico, es decir, un movimiento que se repite con todas sus características después de un cierto intervalo de tiempo llamado *periodo* de la vibración, designado generalmente por el símbolo  $T$ . Una gráfica de desplazamiento  $x$  contra el tiempo, puede resultar una curva sumamente complicada. Como un ejemplo, la Fig. 1.1a muestra la curva del movimiento observado en el pedestal de las chumaceras de una turbina de vapor.

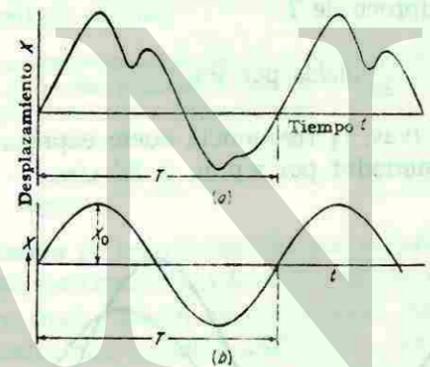


FIG. 1.1. Función periódica y armónica, mostrando el periodo  $T$  y la amplitud  $x_0$ .

El tipo más sencillo de movimiento periódico es el *movimiento armónico*; en él, la relación entre  $x$  y  $t$  puede expresarse por

$$x = x_0 \text{ sen } \omega t \tag{1.1}$$

como se muestra en la Fig. 1.1b, que representa las pequeñas oscilaciones de un péndulo simple. El valor máximo del desplazamiento es  $x_0$ , llamado *amplitud* de la vibración.



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

(1)

CAPILLA ALFONSO

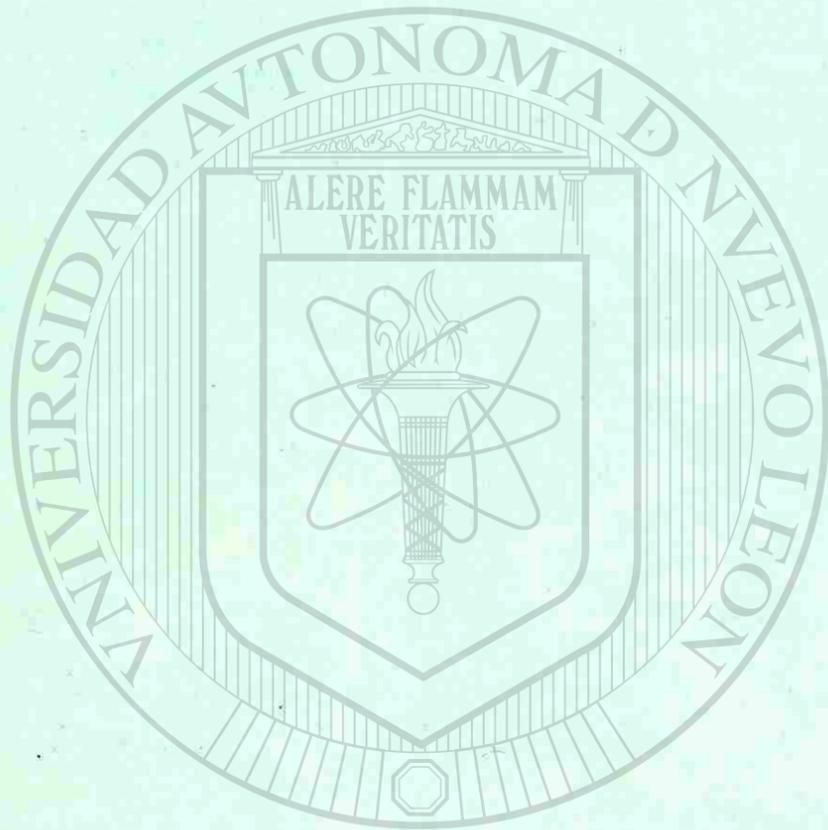
QE 534

.2

A5

C.3

212558



## CAPITULO 1

### CINEMATICA DE LAS VIBRACIONES

**1.1. Definiciones.** Una vibración es, en su sentido más general, un movimiento periódico, es decir, un movimiento que se repite con todas sus características después de un cierto intervalo de tiempo llamado *periodo* de la vibración, designado generalmente por el símbolo  $T$ . Una gráfica de desplazamiento  $x$  contra el tiempo, puede resultar una curva sumamente complicada. Como un ejemplo, la Fig. 1.1a muestra la curva del movimiento observado en el pedestal de las chumaceras de una turbina de vapor.

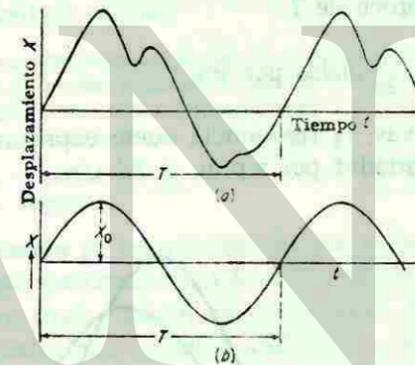


FIG. 1.1. Función periódica y armónica, mostrando el periodo  $T$  y la amplitud  $x_0$ .

El tipo más sencillo de movimiento periódico es el *movimiento armónico*; en él, la relación entre  $x$  y  $t$  puede expresarse por

$$x = x_0 \text{ sen } \omega t \quad (1.1)$$

como se muestra en la Fig. 1.1b, que representa las pequeñas oscilaciones de un péndulo simple. El valor máximo del desplazamiento es  $x_0$ , llamado *amplitud* de la vibración.

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



9-1-08 J.M.

(1)

CAPILLA ALFONSO

El periodo  $T$  generalmente se mide en segundos, y su recíproco  $f = 1/T$  es la frecuencia de la vibración, medida en ciclos por segundo. En algunas publicaciones esto suele abreviarse por *cips*, pronunciándose tal como está escrito. En la literatura alemana a los ciclos por segundo se les suele llamar *Hertz*, en honor del primer investigador en ondas de radio (que son vibraciones eléctricas).

En la Ec. (1.1) aparece el símbolo  $\omega$ , conocido como *frecuencia circular* y medido en radianes por segundo. Este más bien desafortunado nombre, se ha hecho familiar debido a las propiedades de la representación vectorial, misma que se discutirá en el próximo artículo. Las relaciones entre  $\omega$ ,  $f$  y  $T$  son las siguientes. En la Ec. (1.1) y la Fig. 1.1b, puede verse claramente que un ciclo completo de la vibración tiene lugar cuando  $\omega t$  ha pasado al través de  $360^\circ$  o sea  $2\pi$  radianes. Entonces sus valores previos, estarán resumidos en la función seno. Así, cuando  $\omega t = 2\pi$ , el intervalo de tiempo  $t$  será igual al periodo  $T$ , o sea,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ seg} \quad (1.2)$$

Puesto que  $f$  es el recíproco de  $T$ ,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ ciclos por seg} \quad (1.3)$$

En las máquinas rotativas, la frecuencia suele expresarse en vibraciones por minuto, designadas por v.p.m. =  $30\omega/\pi$ .

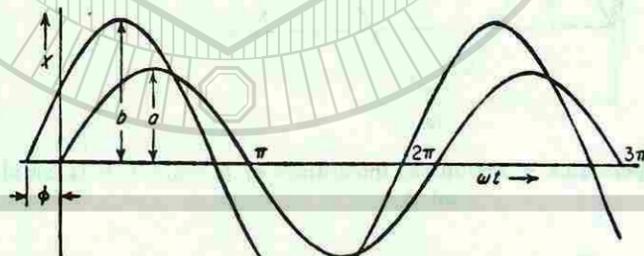


FIG. 1.2. Dos movimientos armónicos incluyendo el ángulo de fase  $\phi$

En un movimiento armónico en el cual el desplazamiento esté dado por  $x = x_0 \sin \omega t$ , la velocidad se encuentra, obteniendo la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x_0 \omega \cos \omega t \quad (1.4)$$

de tal suerte que la velocidad resulta también armónica con un valor máximo.

La aceleración será

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t \quad (1.5)$$

también armónica y con valor máximo  $\omega^2 x_0$ .

Consideremos dos vibraciones dadas por las expresiones  $x_1 = a \sin \omega t$  y  $x_2 = b \sin (\omega t + \phi)$ , que se muestran en la Fig. 1.2, graficadas contra  $\omega t$  como abscisa. Debido a la presencia de la magnitud  $\phi$ , las dos vibraciones no lograrán su desplazamiento en el mismo instante, ya que una de ellas estará  $\phi/\omega$  seg detrás de la otra. La magnitud  $\phi$  se conoce como el *ángulo de fase* o *diferencia de fase* entre las dos vibraciones. Puede verse que los dos movimientos tienen la misma  $\omega$  y, como consecuencia, igual frecuencia  $f$ . El ángulo de fase tiene significado solamente, tratándose de dos movimientos con la misma frecuencia, pues si las frecuencias son diferentes, el ángulo de fase no tiene sentido alguno.

**EJEMPLO:** Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente hacia arriba y hacia abajo entre dos posiciones espaciadas 1 y  $1\frac{1}{2}$  cm sobre el suelo. Durante cada segundo alcanza la posición tope ( $1\frac{1}{2}$  cm sobre el suelo) 20 veces consecutivas. ¿Cuánto valdrán  $T$ ,  $f$ ,  $\omega$  y  $x_0$ ?

**Solución:**  $x_0 = 1\frac{1}{4}$  cm,  $T = 1/20$  seg,  $f = 20$  ciclos por segundos y  $\omega = 2\pi f = 126$  radianes por segundo.

**1.2. Representación de las vibraciones por el método vectorial.** El movimiento de una partícula en vibración, puede representarse convenientemente por medio de un vector rotativo. Sea el vector  $\vec{a}$  Fig. 1.3 girando con velocidad angular uniforme  $\omega$ , en sentido contrario a las manecillas del reloj. Cuando el tiempo se mide desde la posición horizontal del vector como punto de partida, la proyección horizontal del vector puede escribirse como

$$a \cos \omega t$$

y la proyección vertical como

$$a \sin \omega t$$

Cualquiera de las dos proyecciones puede tomarse como representativa de un movimiento recíproco; en la siguiente argumentación, sin embargo, consideraremos la proyección horizontal. ®

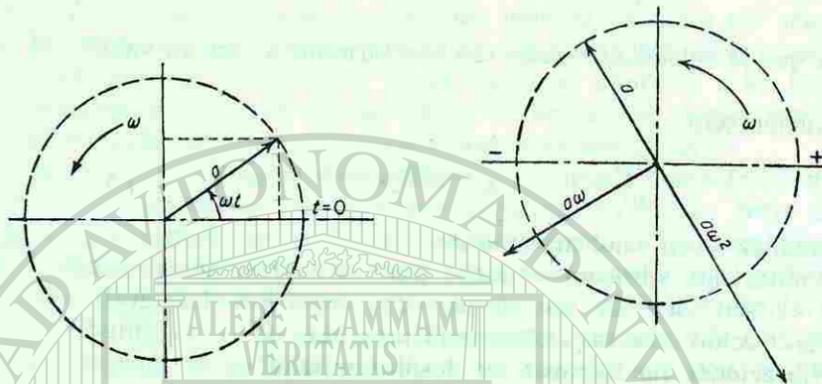


FIG. 1.3. Vibración armónica representada por la proyección horizontal de un vector rotativo

FIG. 1.4. El desplazamiento, la velocidad y la aceleración son vectores perpendiculares

Esta representación ha dado origen al nombre de *frecuencia circular* para  $\omega$ . La magnitud  $\omega$  representará la velocidad angular del vector medida en *radianes por segundo*; y la frecuencia  $f$ , en este caso, se medirá en *revoluciones por segundo*. Así, podrá verse inmediatamente que

$$\omega = 2\pi f.$$

La *velocidad* del movimiento  $x = a \cos \omega t$  será

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t$$

la cual podrá representarse por (la proyección horizontal de) un vector de longitud  $a\omega$ , girando con la misma velocidad angular  $\omega$  que el vector del desplazamiento, pero situada siempre  $90^\circ$  adelante de ese vector. La *aceleración* será  $-a\omega^2 \cos \omega t$  y estará representada por (la proyección horizontal de) un vector de longitud  $a\omega^2$  girando con la misma velocidad angular  $\omega$  y  $180^\circ$  adelante con respecto a la posición del vector de desplazamiento, o bien  $90^\circ$  adelante del vector velocidad (Fig. 1.4). La veracidad de estos argumentos puede comprobarse fácilmente, siguiendo los diferentes vectores al través de una revolución completa.

Este método vectorial de visualizar movimientos recíprocos resulta sumamente conveniente. Por ejemplo, si un punto está simultáneamente sujeto a dos movimientos con la misma frecuencia, pero que difieren en el ángulo de fase  $\varphi$ , sean  $a \cos \omega t$ , y  $b \cos (\omega t - \varphi)$ , la suma de estas dos expresiones por métodos trigonométricos resul-

taría tedioso. Empero, los dos vectores pueden fácilmente dibujarse, y el movimiento total quedará representado por la suma geométrica de los dos vectores, como se muestra en la parte superior de la Fig. 1.5. Una vez más el paralelogramo completo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , se considera

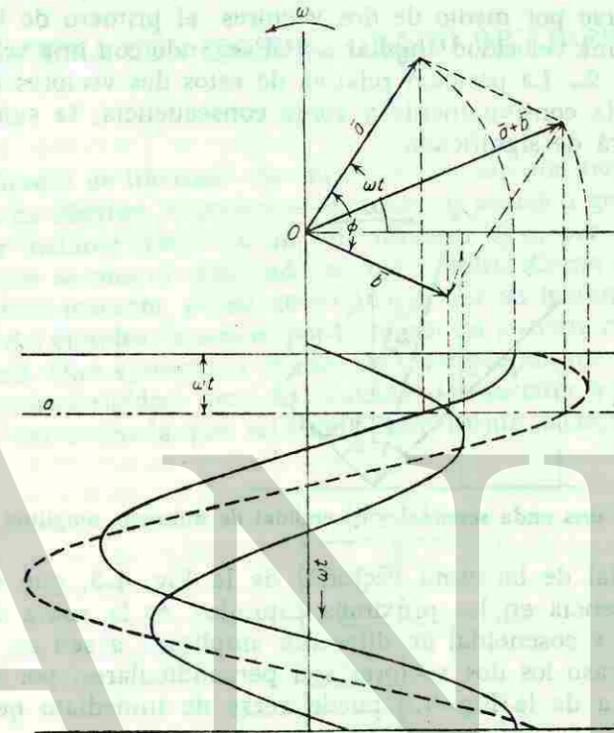


FIG. 1.5. Dos vibraciones se suman sumando sus vectores geoméricamente

girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, con la velocidad angular uniforme  $\omega$ , y la proyección horizontal de los diferentes vectores representará el desplazamiento en función del tiempo. Esto se muestra en la parte inferior de la Fig. 1.5. La línea  $a-a$  representa el instante de tiempo particular para el cual se ha dibujado el diagrama. Puede verse de inmediato, que el desplazamiento de la suma (línea punteada) es de hecho la suma de las ordenadas de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

Es evidente que con la suma de estos vectores se obtiene el resultado correcto, porque  $a \cos \omega t$  es la proyección horizontal del vector  $\vec{a}$  y,  $b \cos (\omega t - \varphi)$  es la proyección horizontal del vector  $\vec{b}$ . La proyección horizontal de la suma geométrica de estos dos vectores

es evidentemente igual a la suma de las proyecciones horizontales de sus dos componentes vectoriales, que es justamente lo que se requería.

La suma de dos vectores será lícita, solamente si las vibraciones son de la misma frecuencia. Los movimientos  $a \sin \omega t$  y  $a \sin 2\omega t$  pueden representarse por medio de dos vectores, el primero de los cuales girará con una velocidad angular  $\omega$  y el segundo con una velocidad doble, o sea,  $2\omega$ . La posición relativa de estos dos vectores en el diagrama cambia continuamente y como consecuencia, la suma geométrica carecerá de significado.

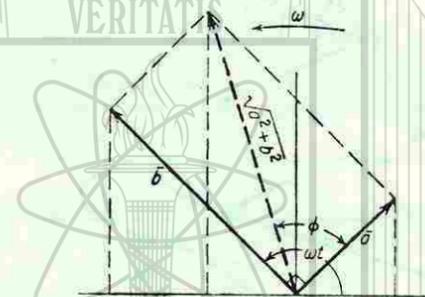


FIG. 1.6. Suma de una onda senoidal y cosenoidal de diferente amplitud

Un caso especial de la suma vectorial de la Fig. 1.5, que se presenta con frecuencia en los próximos capítulos, es la suma de una onda senoidal y cosenoidal de diferente amplitud:  $a \sin \omega t$ , y  $b \cos \omega t$ . En este caso los dos vectores son perpendiculares, por lo que en el diagrama de la Fig. 1.6 puede verse de inmediato que

$$\text{donde} \quad a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.6)$$

$$\tan \varphi = b/a.$$

EJEMPLO: ¿Cuál será la máxima amplitud de la suma de los dos movimientos

$$x_1 = 5 \sin 25t \text{ cm} \quad \text{y} \quad x_2 = 10 \sin(25t + 1) \text{ cm}?$$

**Solución:** El primer movimiento estará representado por un vector de 5 cm de longitud, el cual puede dibujarse verticalmente apuntando hacia abajo. Puesto que en esta posición el vector carece de proyección horizontal, representa entonces el primer movimiento en el instante  $t = 0$ . En ese instante, el segundo movimiento es  $x_2 = 10 \sin 1$ , el cual está representado por un vector de 10 cm de longitud, girado 1 radián ( $50^\circ$ ) con respecto al primer vector, en el sentido de las manecillas de un reloj. La suma vectorial gráfica muestra el vector suma de 13.4 cm de longitud.

6

## CAPITULO 2

### SISTEMA CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

**2.1. Grados de libertad.** Se dice que un sistema mecánico tiene un grado de libertad, si podemos expresar su posición geométrica en cualquier instante mediante un solo número. Sea, por ejemplo, un émbolo que se mueve confinado en un cilindro. Como su posición, en cualquier instante, puede determinarse por su distancia desde el extremo del cilindro, tenemos, por lo tanto, un sistema con un grado de libertad. Otro ejemplo es el caso de un cigüeñal que descansa en unos cojinetes rígidos. Aquí, la posición del sistema queda completamente determinada por el ángulo que forma cualquiera de sus

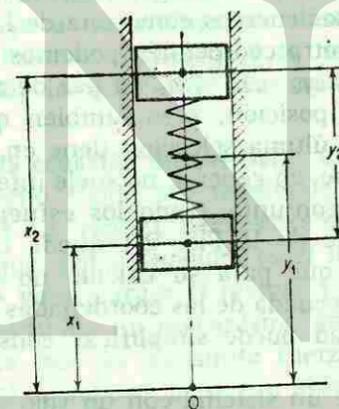


FIG. 2.1. Dos grados de libertad

codos con el plano vertical. Un peso suspendido de un resorte, de tal suerte que se vea restringido por guías que le permitan desplazarse solamente en dirección vertical, es un sistema típico de vibraciones con un solo grado de libertad (Fig. 2.3).

En general, podemos decir que si para especificar la posición de un sistema mecánico se requieren  $n$  números, el sistema tiene  $n$

7

es evidentemente igual a la suma de las proyecciones horizontales de sus dos componentes vectoriales, que es justamente lo que se requería.

La suma de dos vectores será lícita, solamente si las vibraciones son de la misma frecuencia. Los movimientos  $a \sin \omega t$  y  $a \sin 2\omega t$  pueden representarse por medio de dos vectores, el primero de los cuales girará con una velocidad angular  $\omega$  y el segundo con una velocidad doble, o sea,  $2\omega$ . La posición relativa de estos dos vectores en el diagrama cambia continuamente y como consecuencia, la suma geométrica carecerá de significado.

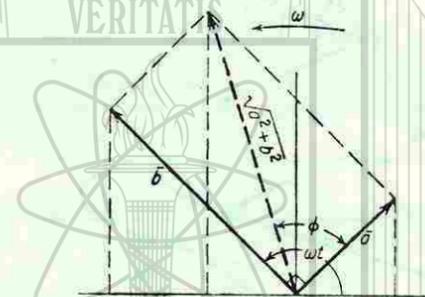


FIG. 1.6. Suma de una onda senoidal y cosenoidal de diferente amplitud

Un caso especial de la suma vectorial de la Fig. 1.5, que se presenta con frecuencia en los próximos capítulos, es la suma de una onda senoidal y cosenoidal de diferente amplitud:  $a \sin \omega t$ , y  $b \cos \omega t$ . En este caso los dos vectores son perpendiculares, por lo que en el diagrama de la Fig. 1.6 puede verse de inmediato que

$$\text{donde} \quad a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.6)$$

$$\tan \varphi = b/a.$$

EJEMPLO: ¿Cuál será la máxima amplitud de la suma de los dos movimientos

$$x_1 = 5 \sin 25t \text{ cm} \quad \text{y} \quad x_2 = 10 \sin (25t + 1) \text{ cm}?$$

**Solución:** El primer movimiento estará representado por un vector de 5 cm de longitud, el cual puede dibujarse verticalmente apuntando hacia abajo. Puesto que en esta posición el vector carece de proyección horizontal, representa entonces el primer movimiento en el instante  $t = 0$ . En ese instante, el segundo movimiento es  $x_2 = 10 \sin 1$ , el cual está representado por un vector de 10 cm de longitud, girado 1 radián ( $50^\circ$ ) con respecto al primer vector, en el sentido de las manecillas de un reloj. La suma vectorial gráfica muestra el vector suma de 13.4 cm de longitud.

6

## CAPITULO 2

### SISTEMA CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

**2.1. Grados de libertad.** Se dice que un sistema mecánico tiene un grado de libertad, si podemos expresar su posición geométrica en cualquier instante mediante un solo número. Sea, por ejemplo, un émbolo que se mueve confinado en un cilindro. Como su posición, en cualquier instante, puede determinarse por su distancia desde el extremo del cilindro, tenemos, por lo tanto, un sistema con un grado de libertad. Otro ejemplo es el caso de un cigüeñal que descansa en unos cojinetes rígidos. Aquí, la posición del sistema queda completamente determinada por el ángulo que forma cualquiera de sus

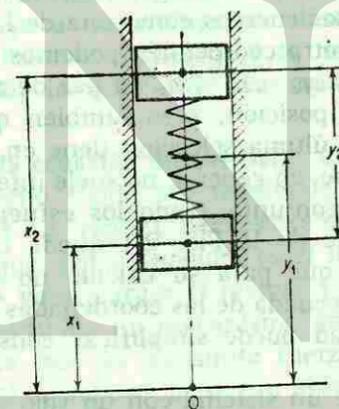


FIG. 2.1. Dos grados de libertad

codos con el plano vertical. Un peso suspendido de un resorte, de tal suerte que se vea restringido por guías que le permitan desplazarse solamente en dirección vertical, es un sistema típico de vibraciones con un solo grado de libertad (Fig. 2.3).

En general, podemos decir que si para especificar la posición de un sistema mecánico se requieren  $n$  números, el sistema tiene  $n$

7

grados de libertad. Un disco que se mueve en un plano sin restricción alguna tiene tres grados de libertad que son: los desplazamientos  $x$  y  $y$  del centro de gravedad y el ángulo de rotación con respecto a su centroide. Un cilindro que rueda por un plano inclinado tiene un grado de libertad. Si, por otro lado, su descenso consiste tanto en rodamiento como en deslizamiento, tendrá dos grados de libertad: uno debido a la traslación y el otro a la rotación.

Un cuerpo rígido que se mueve libremente en el espacio, tiene seis grados de libertad: tres por las traslaciones y tres por las rotaciones. En consecuencia, para definir su posición se requieren tres números o "coordenadas". Estas coordenadas se denominan, generalmente  $x, y, z, \varphi, \psi, \chi$ . Un sistema de dos cuerpos rígidos unidos por medio de un resorte o cualquier otra sujeción, de tal suerte que cualquier cuerpo pueda moverse solamente en una línea recta sin poder girar, tiene dos grados de libertad (Fig. 2.1). El par de magnitudes que determina la posición de este sistema puede escogerse de manera más o menos arbitraria. Por ejemplo, podemos llamar  $x_1$  a la distancia desde un punto fijo  $O$  al primer cuerpo y  $x_2$  a la distancia desde el punto  $O$  al segundo cuerpo. Luego  $x_1$  y  $x_2$  serán las coordenadas. Empero, podríamos también escoger la distancia desde  $O$  al centro de gravedad de los dos cuerpos como una de las coordenadas y denominarlas  $y_1$ . Para la otra coordenada podemos escoger la distancia entre los dos cuerpos,  $y_2 = x_2 - x_1$ . El par de números  $x_1, x_2$  describe completamente su posición; pero también queda determinada con el par  $y_1, y_2$ . Esta última selección tiene en este caso una cierta ventaja práctica, ya que, en general, no suele interesarnos tanto la posición del sistema en conjunto, como los esfuerzos dentro de él. El esfuerzo en el resorte de la Fig. 2.1 queda completamente determinado por  $y_2$ , así es que para su cálculo no se requiere el valor de  $y_1$ . Una selección adecuada de las coordenadas de un sistema con varios grados de libertad puede simplificar considerablemente los cálculos.

No debemos suponer que un sistema con un solo grado de libertad sea siempre muy sencillo. Por ejemplo, un motor de gasolina de 12 cilindros con un cigüeñal rígido y un bloque de cilindros rígidamente montado, tiene un solo grado de libertad con todos sus émbolos móviles, vástagos, válvulas, árbol de levas, etc. Esto resulta así porque un solo número (por ejemplo, el ángulo que ha girado el cigüeñal) determina completamente la posición de cada una de las partes móviles del motor. Sin embargo, si el bloque de cilindros está montado en resortes flexibles que le permitan moverse en cualquier dirección (como es el caso en la mayoría de los auto-

8

móviles modernos), el sistema tiene siete grados de libertad, que son los seis pertenecientes al bloque como un cuerpo rígido libre en el espacio y el ángulo del cigüeñal como la séptima coordenada.

Un sistema completamente flexible tiene un número infinito de grados de libertad. Considere, por ejemplo, una viga flexible con dos apoyos. Mediante una sollicitación de carga adecuada, es posible pandear la viga haciéndola tomar una curva de cualquier configuración (Fig. 2.2). La descripción de esta curva requiere función  $y = f(x)$ .

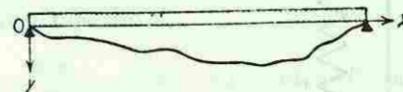


FIG. 2.2. Una viga tiene un número infinito de grados de libertad

que es equivalente a un número infinito de pares de valores. En cada punto  $x$  de la viga, se puede obtener la flecha  $y$  independientemente de las otras partículas de la viga (dentro de los límites de elasticidad de la viga). Así pues, la determinación completa de su posición requiere tantos valores de  $y$  como puntos tiene el eje de la viga. En el caso de la Fig. 2.1, la función  $y = f(x)$  no es único conjunto de números de que se puede disponer para definir su posición. Otro camino para determinar su elástica sería especificar todos los valores de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de su serie de Fourier [Ec. (1.11), Pág. 36] la que, una vez más, es numéricamente infinita.

**2.2 Obtención de la ecuación diferencial.** Considere una masa  $m$  suspendida de un techo rígido por medio de un resorte, como se muestra en la Fig. 2.3. La "rigidez" del resorte está dada por su "constante de resorte"  $k$ , que, por definición, es el número de kilogramos de tensión necesarios para alargar el resorte 1 cm. Entre la masa y la pared rígida hay también un mecanismo amortiguador de aire o aceite. Se supone que éste no transmite fuerza alguna a la masa, siempre y cuando esté en reposo; pero, tan pronto como se mueva la masa, la "fuerza de amortiguamiento" del mecanismo es  $cx$  o  $cdx/dt$ , es decir, proporcional a la velocidad y en dirección opuesta. La magnitud  $c$  se conoce como constante de amortiguamiento o, sin abreviación, como coeficiente de amortiguamiento viscoso.

El amortiguamiento que tiene efecto en los sistemas mecánicos reales no siempre sigue una ley tan sencilla como la relación  $cx$ . Casos mucho más complicados se presentan con frecuencia. Pero entonces, la teoría matemática resulta muy complicada (véase Cap. 8).

9

8, Pág. 477 y 494), mientras que con amortiguamiento "viscoso" el análisis resulta relativamente sencillo.

Sea una fuerza exterior alterna  $P_0 \sin \omega t$  actuando sobre una masa, originada por algún mecanismo que no necesitamos especificar en detalle. Para una visualización mental suponga que esta fuerza se ha obtenido por alguien que empuja y tira de la masa artificialmente.

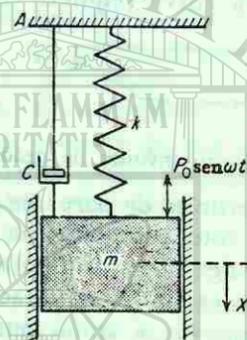


FIG. 2.3. El sistema fundamental de un solo grado de libertad

El problema consiste en calcular el movimiento de la masa  $m$  debido a esta fuerza exterior. O, en otras palabras, si  $x$  es la distancia entre cualquier posición instantánea de la masa durante su movimiento y su posición de equilibrio, tendremos que obtener  $x$  en función del tiempo. La "ecuación del movimiento" que vamos a derivar no es otra que la expresión matemática de la segunda ley de Newton.

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

Todas las fuerzas que actúan sobre la masa se consideran positivas cuando se ejercen hacia abajo y negativas cuando se ejercen hacia arriba.

La fuerza del resorte es de magnitud  $kx$ , puesto que es cero cuando no hay alargamiento  $x$ . Cuando  $x = 1$  cm, la fuerza del resorte es, por definición, de  $k$  kg y, como consecuencia, la fuerza del resorte para cualquier otro valor de  $x$  (en centímetros) será  $kx$  (en kilogramos), dado que el resorte sigue la ley de proporcionalidad de Hooke entre la fuerza y deformación.

El signo de la fuerza del resorte es negativo, puesto que el resorte tira hacia arriba de la masa, cuando el desplazamiento es hacia aba-

jo, o bien la fuerza del resorte es negativa, cuando  $x$  es positiva. Así pues, la fuerza del resorte está expresada por  $-kx$ .

La fuerza de amortiguamiento que actúa sobre la masa también es negativa, siendo su valor  $-c\dot{x}$ , ya que está dirigida contra la velocidad  $\dot{x}$ ; actúa hacia arriba (negativa), mientras que  $\dot{x}$  está dirigida hacia abajo (positiva). Las tres fuerzas que actúan sobre la masa hacia abajo son

$$-kx - c\dot{x} + P_0 \sin \omega t$$

La ley de Newton nos da

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + P_0 \sin \omega t,$$

$$\text{o} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t \quad (2.1)$$

Esta ecuación tan importante\* se conoce como la *ecuación diferencial del movimiento de un sistema con un solo grado de libertad*. Los cuatro términos de la Ec. (2.1) son la fuerza de inercia, la fuerza de amortiguamiento, la fuerza del resorte y la fuerza exterior.

Antes de proceder a calcular  $x$  de la Ec. (2.1), es decir, a la solución de la ecuación diferencial, es conveniente considerar algunos otros problemas que nos lleven a la misma ecuación.

**2.3. Otros casos.** La Fig. 2.4 representa un disco con momento de inercia  $I$  sujeto a una flecha con una rigidez torsional  $k$ , definida como el momento en kilogramos-centímetros necesario para lograr un giro de torsión del disco de 1 radián. Considere el movimiento de torsión del disco bajo la influencia de un par de torsión  $T_0 \sin \omega t$ , aplicado externamente. Una vez más este es un problema con un solo grado de libertad, ya que el desplazamiento torsional del disco desde su posición de equilibrio puede expresarse con una sola magnitud: el ángulo  $\varphi$ . La ley de Newton, aplicada a un cuerpo que gira, establece que

$$\text{Par de torsión} = \text{momento de inercia} \times \text{aceleración angular}$$

$$= I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I\ddot{\varphi}$$

\* En esta derivación se ha omitido el efecto de la gravedad. La amplitud  $x$  se midió desde la "posición de equilibrio", es decir, desde la posición donde la fuerza  $mg$ , que actúa hacia abajo, se mantiene en equilibrio con la fuerza del resorte  $k\delta$ , que actúa hacia arriba (donde  $\delta$  es la deformación del resorte debida a la gravedad). Hubiera sido posible medir  $x_1$  desde la posición del resorte sin deformar, de tal suerte que  $x_1 = x + \delta$ . En la Ec. (2.1),  $x$  deberá sustituirse por  $x_1$ , debiendo añadirse en el segundo miembro de la fuerza  $mg$ . Esto nos conduce al mismo resultado (2.1).

10

11

CAPILLA ALFONSO

Sustituyendo estos valores en la Ec. (2.5), tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \quad m\ddot{y} - ma_0\omega^2 \sin \omega t + c\dot{y} + ca_0\omega \cos \omega t + ky + ka_0 \sin \omega t \\ = ka_0 \sin \omega t + ca_0\omega \cos \omega t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = ma_0\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.6)$$

Así, el movimiento relativo entre la masa y el techo en movimiento actúa de igual manera que el movimiento absoluto de una masa con el techo en reposo y con una fuerza de amplitud  $ma_0\omega^2$  actuando en la masa. El segundo miembro de la (2.6) es la fuerza de inercia de la masa, si se moviera con amplitud  $a_0$ , y, por ende, puede considerarse como la fuerza que tendría que aplicarse en la parte superior del resorte si éste fuese rígido, es decir, si se impide el movimiento  $y$ .

**2.4. Vibraciones libres sin amortiguamiento.** Antes de desarrollar la solución de la ecuación general (2.1), es útil considerar primero los casos más sencillos. Si no hay ninguna fuerza exterior aplicada  $P_0 \sin \omega t$  ni amortiguamiento ( $c = 0$ ), la expresión (2.1) se reduce a

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx = 0 \\ \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \end{aligned} \quad (2.7)$$

o, en lenguaje común: La deformación  $x$  es una función del tiempo tal que al obtener su segunda derivada, se obtiene una vez más la misma función, multiplicada por una constante negativa. Aun desconociendo las ecuaciones diferenciales, podemos recordar que existen funciones de este tipo, a saber, senos y cosenos, y una tentativa nos muestra que  $\sin t \sqrt{k/m}$  y  $\cos t \sqrt{k/m}$  son, de hecho, soluciones de la (2.7). La forma más general en que se puede escribir la solución de la (2.7) es

$$x = C_1 \sin t \sqrt{\frac{k}{m}} + C_2 \cos t \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.8)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias. Puede comprobarse fácilmente que la (2.8) es una solución de la (2.7), simplemente obteniendo la segunda derivada de la (2.8) y sustituyendo este valor en la (2.7). No existe ninguna solución de la (2.7) que no sea la (2.8). Esto no se necesita demostrar aquí; es cierto y se dará por supuesto.

Interpretemos ahora físicamente la (2.8). Primeramente se ve que el resultado, tal como aparece, es bastante indefinido. Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  pueden tener cualquier valor que queramos asignarles. Pero el problema en sí no se ha planteado por completo. El resul-

tado (2.8) describe todos los movimientos que son capaces de lograr el sistema de masa y resorte. Entre otros, está el caso para el cual  $C_1 = C_2 = 0$ , dando  $x = 0$ , lo que significa que la masa permanece perennemente en reposo.

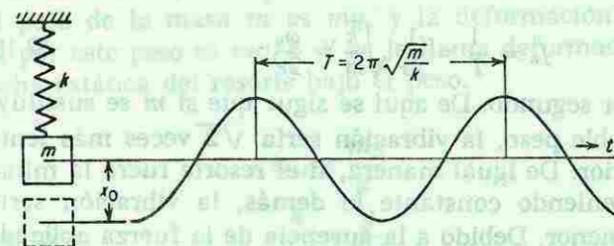


FIG. 2.8. Vibración libre sin amortiguamiento, partiendo de un desplazamiento inicial

Especificaremos ahora en forma definitiva que la masa se ha desplazado de su posición de equilibrio a  $x = x_0$ , y después se ha liberado sin velocidad inicial. Midiendo el tiempo, desde el instante en que se libera, las dos condiciones son

$$\text{en } t = 0, \quad x = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x} = 0$$

Sustituyendo la primera condición en la (2.8), obtenemos

$$x_0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \quad \text{o} \quad C_2 = x_0$$

Para la segunda condición deberemos derivar primero la Ec. (2.8), obteniendo después

$$0 = C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 1 - C_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 \quad \text{o} \quad C_1 = 0$$

Sustituyendo estos resultados en la (2.8), lograremos la solución específica

$$x = x_0 \cos t \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.8a)$$

Esto representa una vibración sin amortiguamiento, un ciclo de la cual ocurre cuando  $t \sqrt{k/m}$  varía al través de  $360^\circ$  o  $2\pi$  radianes (Fig. 2.8). Denominando  $T$  al tiempo por ciclo o período, tendremos

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot T = 2\pi \quad \text{o} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.9)$$

Es usual denominar a  $\sqrt{k/m}$  por  $\omega_n$  llamada "frecuencia circular natural". El valor  $\sqrt{k/m} = \omega_n$  es la velocidad angular del vector rotativo que representa el movimiento vibratorio (véase Pág. 17).

El recíproco de  $T$  o frecuencia natural  $f_n$  es

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (2.10)$$

medida en ciclos por segundo. De aquí se sigue que si  $m$  se sustituye por una masa de doble peso, la vibración sería  $\sqrt{2}$  veces más lenta que en el caso anterior. De igual manera, si el resorte fuera la mitad de resistente, manteniendo constante lo demás, la vibración sería también  $\sqrt{2}$  veces menor. Debido a la ausencia de la fuerza aplicada  $P_n \sin \omega t$  a esta vibración se le llama *vibración libre*.

Si partimos de la suposición de que el movimiento es armónico, la frecuencia puede calcularse en forma muy sencilla de la *consideración de la energía*. En el centro de una oscilación la masa tiene una energía cinética considerable, mientras que en las posiciones extremas permanece instantáneamente en reposo, careciendo entonces de energía cinética. En este instante el resorte está en estado de tensión (o compresión) y, por ende, con energía elástica almacenada en él. En cualquier posición entre el punto medio y el extremo, tiene simultáneamente energía cinética y elástica, la suma de las cuales es constante, puesto que las fuerzas exteriores no efectúan trabajo alguno en el sistema. En consecuencia, la energía cinética en el punto medio de su recorrido deberá ser igual a la energía elástica almacenada en su posición extrema.

Procederemos a calcular estas energías. La fuerza del resorte es  $kx$ , y el trabajo efectuado al aumentar el desplazamiento en  $dx$  es  $kx \cdot dx$ . La energía potencial o elástica del resorte, cuando se

comprime una longitud  $x$ , es  $\int_0^x kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2$ . La energía cinética en cualquier instante es  $\frac{1}{2}mv^2$ . Supongamos que el movimiento es  $x = x_0 \sin \omega t$ , entonces  $v = x_0 \omega \cos \omega t$ . La energía potencial en la posición extrema es  $\frac{1}{2}kx_0^2$ , y la energía cinética en la posición neutral, donde la velocidad es máxima, es  $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$ .

Por lo tanto,  $\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$

en la cual  $\omega^2 = k/m$ , independientemente de la amplitud  $x_0$ . Este "método energético" para calcular la frecuencia es de suma importancia. En los Caps. 4 y 6 se verá, al tratar con sistemas más complejos, que la determinación de la frecuencia, partiendo de la ecua-

14

ción diferencial, resulta, a veces, tan complicada que se hace prácticamente imposible. En tales casos, la generalización del método de la energía, conocida como método de *Rayleigh*, nos proporcionará los resultados (véanse Págs. de la 191 a la 209).

La fórmula  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  puede escribirse de manera algo diferente. El peso de la masa  $m$  es  $mg$ , y la deformación del resorte originada por este peso es  $mg/k$ . Y se le llama deformación estática  $\delta_{est}$  o flecha estática del resorte bajo el peso.

$$\delta_{est} = \frac{mg}{k}$$

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_{est}}$$

Por lo tanto,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}} \quad (2.11)$$

o

Si  $\delta_{est}$  se expresa en cm,  $g = 981 \text{ cm/seg}^2$  y la frecuencia es

$$f_n = \frac{\sqrt{981}}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\delta_{est}}} = 5 \sqrt{\frac{1}{\delta_{est}}} \text{ ciclos por segundo}$$

$$f_n = 300 \sqrt{\frac{1}{\delta_{est}}} \text{ ciclos por minuto} \quad (2.11a)$$

Esta relación, que es bastante útil para estimar en forma rápida las frecuencias naturales o velocidades críticas, se muestra gráficamente en la Fig. 2.9. En papel logarítmico aparece como una línea recta.

**2.5. Ejemplos.** Considere algunos ejemplos numéricos aplicando la fórmula fundamental (2.10).

1. Una barra de acero de 1 por  $\frac{1}{2}$  cm de sección transversal está sólidamente sujeta a un banco de sus extremos y soportando un peso de 20 kg en el otro (Fig. 2.10). (a) ¿Cuál será su frecuencia de vibración, si la distancia entre la carga y el empotre es de 30 cm? (b) ¿Cuál será el porcentaje de variación de la frecuencia, si acortamos la barra  $\frac{1}{4}$  cm?

a. El peso propio de la barra es  $\frac{1}{2}$  por 1 por 30 cm<sup>3</sup> y por 0.00774 kg por centímetro cúbico, o sea aproximadamente, 0.12 kg. Las moléculas de la barra cercanas a la pesa de 20 kg vibran en su extremo prácticamente con la misma amplitud que la pesa, mientras que las moléculas cercanas al extremo del empotre casi no vibran. Esto se

15

toma en cuenta sumando parte del peso de la barra al peso en su extremo. En la Pág. 209 se muestra que hay que sumar, aproximadamente, la cuarta parte del peso de la barra. Por lo tanto, la masa  $m$  de la Ec. (2.10) es  $20.03/g = 20.03/981 \text{ kg cm}^{-1} \text{ seg}^2$ .

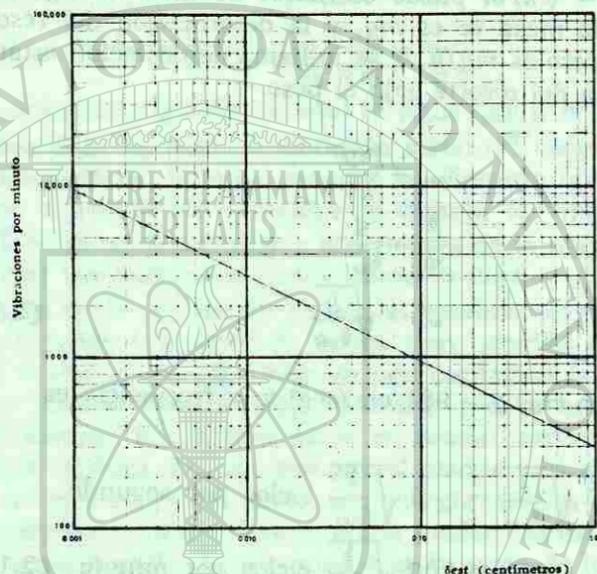


Fig. 2.9. Curva representativa de la Ec. (2.11a) para la frecuencia natural de un sistema sin amortiguamiento con un solo grado de libertad

Una fuerza  $P$  en el extremo de un volado origina una deformación  $\delta = Pl^2/3EI$ . La constante del resorte es por definición

$$k = P/\delta = 3EI/l^3$$

El momento de inercia de la sección es  $I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{24}$  (o  $\frac{1}{96}$ , dependiendo esto si la vibración tiene lugar en su parte más rígida o en el plano más flexible. La frecuencia circular es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3(2)10^6(981)}{24(30^3)20.03}} = 13 \text{ radianes por segundo}$$

La frecuencia  $f_n = \omega_n/2\pi = 2.38$  ciclos por segundo.

En caso de que la barra vibre en la dirección de la parte más débil de la sección  $I = \frac{1}{96}$ , y  $f_n$  resulta la mitad de su valor original, o sea 1.19 ciclos por segundo.

16

b. La pregunta respecto al cambio de frecuencia debido al cambio de longitud puede contestarse como sigue. La constante de resorte  $k$  es proporcional a  $1/l^3$  y la frecuencia, por consiguientes, es proporcional a  $\sqrt{1/l^3} = l^{-3/2}$ . El acortar la barra 1 por ciento, incrementará la frecuencia en  $1\frac{1}{2}$  por ciento. Así pues, el acortamiento de  $\frac{1}{4}$  de cm aumentará la frecuencia en  $1\frac{1}{4}$  por ciento.

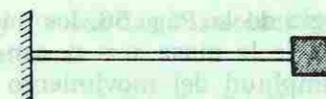


Fig. 2.10

2. Como un segundo ejemplo, considere un tubo en forma de U, lleno de agua (Fig. 2.11). Sea la longitud total de la columna  $l$ , la sección transversal del tubo  $A$  y la masa de agua por centímetro cúbico  $m_1$ . Si el agua oscila hacia atrás y hacia adelante, la masa en movimiento es  $m_1 \cdot A \cdot l$ . En este problema no hay un resorte específico, pero, aun así, la fuerza gravitacional tiende a mantener el agua

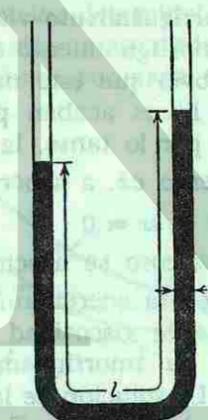


Fig. 2.11. Oscilación de una columna líquida en un tubo en forma de U

en su posición de equilibrio. Así pues, tendremos un "resorte-gravitacional", en el cual la constante del resorte es, por definición, la fuerza por unidad de deformación. Si elevamos 1 cm el nivel en uno de los brazos del tubo, descenderá entonces 1 cm en el otro. Esto proporciona un peso desequilibrado de 2 cm de columna de agua, originando una fuerza de  $(2m_1A) \cdot g$ , que es la constante del resorte.

17

18

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS

®

CAPILLA ALFONSO

Por lo tanto, la constante efectiva de resorte en la masa es  $k \cdot (a/l)^2$ . El efecto de la rigidez del resorte puede verse que disminuye rápidamente a medida que se desplaza hacia la izquierda.

La frecuencia es

$$\omega_n = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Con el método de la energía de la Pág. 56, los cálculos son los siguientes: Sea el movimiento de la masa  $x = x_0 \sin \omega_n t$ , donde  $\omega_n$  es todavía desconocida. La amplitud del movimiento en el resorte será entonces  $x_0 a/l$  y la energía potencial del resorte será  $\frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}k(x_0 a/l)^2$ . La energía cinética de la masa es  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_n^2 x_0^2$ . Igualando estas dos, la amplitud  $x_0$  decrece y

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \frac{a^2}{l^2}$$

Algunos de los problemas del final de este capítulo pueden resolverse más fácilmente con el método de la energía que por la aplicación directa de la fórmula que comprende la  $\sqrt{k/m}$ .

**2.6. Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso.** Hemos visto que una vibración libre sin amortiguamiento continúa perennemente [Ec. (2.8) o (2.8a)]. Es obvio que esto nunca ocurre en la naturaleza; todas las vibraciones libres acaban por sucumbir después de cierto tiempo. Considere, por lo tanto, la Ec. (2.1), incluyendo el término de amortiguamiento  $c\dot{x}$ , a saber

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.12)$$

El término del amortiguamiento viscoso se asocia usualmente con la expresión  $c\dot{x}$ , puesto que representa acertadamente las condiciones de amortiguamiento debidas a la viscosidad del aceite en un amortiguador. Existen otros tipos de amortiguamiento que se discutirán más adelante (Pág. 477). La solución de la (2.12) no puede obtenerse tan fácilmente como la de la (2.7). Empero, si consideramos la función  $x = e^{st}$ , donde  $t$  es el tiempo y  $s$  una constante desconocida, se ve que, al obtener la derivada, resulta la misma función, pero multiplicada por una constante. Sustituyendo esta función en la (2.12), nos permite dividir por  $e^{st}$  lo que nos lleva a una ecuación algebraica, en lugar de una ecuación diferencial, lo cual es una gran simplificación. Así pues, suponemos que la solución es  $e^{st}$ . Con este supuesto, la Ec. (2.12) resulta

$$(ms^2 + cs + k)e^{st} = 0 \quad (2.13)$$

Si la (2.13) se satisface, nuestra suposición  $x = e^{st}$  como solución es correcta. Puesto que la Ec. (2.13) es de segundo grado, en  $s$  hay dos valores  $s_1$  y  $s_2$ , que hacen que el primer miembro de la (2.13) sea igual a cero

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.14)$$

de manera que  $e^{s_1 t}$  y  $e^{s_2 t}$  son las dos soluciones de la Ec. (2.12). La solución más general es

$$x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (2.15)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias

Al dilucidar el significado físico de esta ecuación, debemos distinguir dos casos, que dependen de que las expresiones de  $s$  en la Ec. (2.14) sean reales o complejas. Puede verse claramente que cuando  $(c/2m)^2 > k/m$ , la expresión dentro del radical es positiva, siendo, por lo tanto, reales los dos valores de  $s$ . Más aún, ambos son negativos, puesto que la raíz cuadrada es menor que el primer término  $c/2m$ . Así, la (2.15) describe una solución que consiste en la suma de dos curvas exponenciales decrecientes, como se muestra en la Fig. 2.14. Como un ejemplo representativo, el caso  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = -2$  se ha dibujado con una línea punteada.

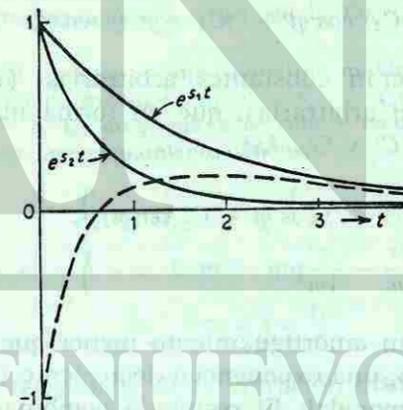


FIG. 2.14. Movimiento de un sistema con un solo grado de libertad con amortiguamiento mayor que el amortiguamiento crítico  $c_c$ .

Sin analizar ningún caso especial, determinando los valores de  $C_1$  y  $C_2$  la figura muestra que el movimiento no es una "vibración"

sino más bien un lento regreso a la posición de equilibrio. Esto se debe al hecho de que cuando  $(c/2m)^2 > k/m$ , amortiguamiento  $c$  es sumamente grande. Para valores menores de  $c$  que conciernen más a los casos prácticos, la (2.14) da valores complejos para  $s$ , y la solución de la (2.15), tal como está escrita, resulta sin significado alguno. Al amortiguamiento  $c$ , en el que ocurre esta transición, se le llama amortiguamiento crítico  $c_c$ :

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \sqrt{mk} = 2m\omega_n \quad (2.16)$$

En el caso de que el amortiguamiento sea menor que éste, la (2.14) puede escribirse mejor como

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm j \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\frac{c}{2m} \pm jq \quad (2.17)$$

donde  $j = \sqrt{-1}$ . Aunque el radical resulta ahora un número real, los dos valores de  $s$  contienen a  $j$  y, como consecuencia, la solución de la (2.15) contiene términos de la forma  $e^{jat}$ , que debe interpretarse por medio de la Ec. (1.8), de la Pág. 29.

Con la (2.17) y la (1.8) la solución de la (2.15) resulta

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{c}{2m}t} [C_1(\cos qt + j \operatorname{sen} qt) + C_2(\cos qt - j \operatorname{sen} qt)] \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} [(C_1 + C_2) \cos qt + (jC_1 - jC_2) \operatorname{sen} qt] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Puesto que  $C_1$  y  $C_2$  eran constantes arbitrarias,  $(C_1 + C_2)$  y  $(jC_1 - jC_2)$  serán también arbitrarias, que en forma más sencilla, podemos escribirlas como  $C'_1$  y  $C'_2$ . Así,

$$\text{donde } \left. \begin{aligned} x &= e^{-\frac{c}{2m}t} (C'_1 \cos qt + C'_2 \operatorname{sen} qt) \\ q &= \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.19a, b)$$

Esta es la solución para un amortiguamiento menor que  $c_c$ . Consta de dos factores: el primero, una exponencial decreciente (Fig. 2.14), y el segundo, una onda senoidal. El resultado combinado es "una onda senoidal amortiguada" descansando en el espacio entre la curva exponencial y su imagen reflejada (Fig. 2.15). Cuanto más pequeña sea la constante de amortiguamiento  $c$ , más aplastada resultará la curva exponencial y más ciclos se requerirán para que se desvanezcan las vibraciones.

La relación de este desvanecimiento es interesante y puede calcularse en forma sencilla considerando dos máximos consecutivos cualesquiera de la curva: A-B, B-C, etc. Durante el intervalo de tiempo entre dos de estos máximos, es decir, durante  $2\pi/q$  seg, la amplitud de la vibración (que en este máximo prácticamente coincide con  $e^{-\frac{c}{2m}t}$ ) disminuye de  $e^{-\frac{c}{2m}t}$  a  $e^{-\frac{c}{2m}(t+\frac{2\pi}{q})}$ . Vemos que la última de estas dos expresiones es igual a la primera multiplicada por un factor constante  $e^{-\frac{\pi c}{mq}}$ , factor que, naturalmente, es menor que la unidad. Puede verse que este factor es el mismo para dos máximos sucesivos cualesquiera, independientemente de la amplitud de vibración o del tiempo. La relación entre dos máximos sucesivos es constante. Las amplitudes decrecen en progresión geométrica.

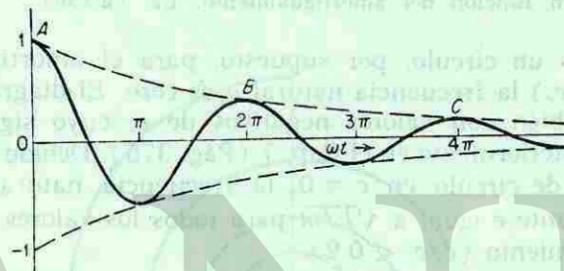


FIG. 2.15. Vibración libre de un sistema con amortiguamiento menor que el amortiguamiento crítico de la Ec. (2.16)

Hemos visto que si  $x_n$  es la  $n$ ésima amplitud máxima durante una vibración y  $x_{n+1}$  es el siguiente máximo, entonces  $x_{n+1} = x_n e^{-\pi c/mq}$  o también  $\log_e(x_n/x_{n+1}) = \pi c/mq = \delta$ . La magnitud  $\delta$  se conoce como el decremento logarítmico. Para pequeño amortiguamiento tenemos

$$\delta = \frac{\pi c}{mq} = 2\pi \frac{c}{c_c} / \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \approx \frac{2\pi c}{c_c}$$

y también  $x_{n+1}/x_n = e^{-\delta} \approx 1 - \delta$ , de modo que

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n} = \delta = \frac{2\pi c}{c_c} \quad (2.20)$$

Vemos que la frecuencia de la vibración disminuye al incrementar el amortiguamiento de acuerdo con la (2.19b), que, escrita en forma no dimensional con la ayuda de la (2.16), resulta

$$\frac{q}{\omega_n} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2}$$

Esta relación se encuentra representada gráficamente en la Fig. 2.16, donde la ordenada  $q/\omega_n$  es la relación de la frecuencia natural amortiguada con respecto a la no amortiguada, mientras que la abscisa es la razón de la constante real a la constante de amortiguamiento

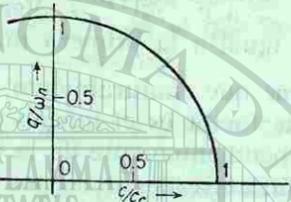


FIG. 2.16. Frecuencia natural de un sistema con un solo grado de libertad amortiguado, en función del amortiguamiento; Ec. (2.19b)

crítico. La figura es un círculo; por supuesto, para el amortiguamiento crítico ( $c = c_c$ ) la frecuencia natural  $q$  es cero. El diagrama se ha dibujado también con valores negativos de  $c$ , cuyo significado se explicará posteriormente en el Cap. 7 (Pág. 375). Debido a la tangente horizontal de círculo en  $c = 0$ , la frecuencia natural es prácticamente constante e igual a  $\sqrt{k/m}$  para todos los valores técnicos del amortiguamiento ( $c/c_c < 0.2$ ).

La vibración libre sin amortiguamiento puede representarse por un vector rotativo, ya que es un movimiento armónico, cuyo punto extremo describe un círculo. En el presente caso de movimiento *amortiguado*, esta representación gráfica sigue siendo válida, a excepción de que la amplitud decrece con el tiempo. Así pues, al girar, el vector se encoge con rapidez proporcional a su longitud, dando así una disminución en progresión geométrica. El punto extremo de este vector describe una "espiral logarítmica" (Fig. 2.17). La amplitud de un diagrama como el de la Fig. 2.15 puede obtenerse de la Fig. 2.17, tomando la proyección horizontal del vector cuyo extremo descansa en la espiral y que gira con una velocidad angular uniforme  $q$  [Ec. (2.19)].

Un caso especial como el precedente acontece cuando la masa o inercia del sistema es pequeña y puede desprejarse, de manera que sólo quede un resorte y un amortiguador. Deseamos conocer el movimiento del émbolo (sin masa) del amortiguador cuando se le libera de una deformación original  $x_0$ . Su ecuación diferencial es

$$c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

la cual puede resolverse directamente escribiendo

$$\begin{aligned} \frac{c}{k} \frac{dx}{x} &= -dt \\ t &= -\frac{c}{k} \int \frac{dx}{x} = -\frac{c}{k} (\log x + \text{const.}) \end{aligned}$$

Cuando  $t = 0$  la deformación es  $x = x_0$ , de manera que la constante es  $-\log x_0$ . Y por ende

$$t = -\frac{c}{k} \log \frac{x}{x_0} \quad \text{y} \quad x = x_0 e^{-\frac{k}{c}t}, \quad (2.21)$$

esta relación está representada por una de las curvas compactas de la Fig. 2.14. Evidentemente el exponente de la función  $e$  es una

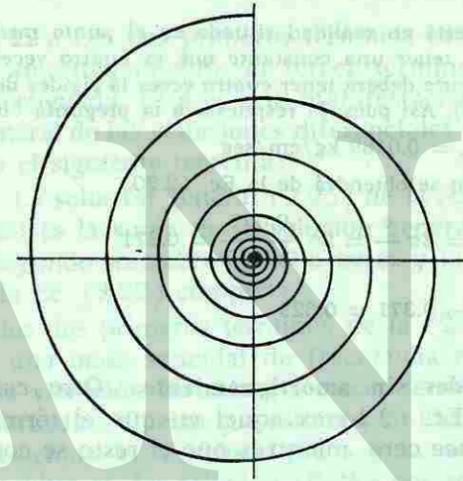


FIG. 2.17. Diagrama vectorial de una vibración libre amortiguada

magnitud, sin dimensión, de manera que  $c/k$  deberá tener por dimensión unidades de tiempo. Esta se conoce como *tiempo de relajamiento*, que, por definición, es el tiempo en el que la deformación del sistema  $x_0$  se "relaja" en  $1/e$  veces su valor original. En la Pág. 185 tendremos oportunidad de utilizar este concepto.

**EJEMPLO:** En el sistema mostrado en la Fig. 2.13, Pág. 61, la masa pesa 1 onza\* y el resorte tiene una rigidez de 10 kg por cm;  $l = 4$  cm;  $a = b = 2$  cm.

\* N. del T. 1 onza = 28.35 g

Más aún, se ha acoplado un mecanismo amortiguador en el punto medio de la viga, es decir, el mismo punto en el que se ha sujetado el resorte. El amortiguador produce una fuerza de 0.001 kg con una velocidad de 1 cm por segundo.

- ¿Cuál es la razón de la declinación de las vibraciones libres?
- ¿Cuál será el amortiguamiento crítico en el amortiguador?

**Solución:** Responderemos primero a la pregunta (b) por medio de la Ec. (2.16). La frecuencia natural sin amortiguamiento es  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . En la Pág. 62 encontramos que la constante equivalente del resorte de la Fig. 2.13 es  $ka^2/l^2$  o  $k/4 = 2.5$  kg por cm. Así,

$$\omega_n = \frac{\sqrt{2.5 \times 981}}{0.02835} = 292.6 \text{ radianes/segundo}$$

La constante crítica de amortiguamiento del sistema (es decir, el amortiguamiento crítico en la masa de un amortiguador imaginario) es, Ec. (2.16),

$$2 \times \frac{0.02835}{981} \times 292.6 = 0.0169 \text{ kg/cm/seg}$$

Puesto que el amortiguador está en realidad situado en el punto medio de la viga, el amortiguador deberá tener una constante que es cuatro veces mayor, por la misma razón que el resorte deberá tener cuatro veces la rigidez del resorte equivalente (véase la Pág. 62). Así pues, la respuesta a la pregunta (b)

$$c_c = 0.0169 \text{ kg/cm/seg}$$

- La razón de declinación se obtendrá de la Ec. (2.20)

$$\frac{\Delta x}{x} = \delta = 2\pi \frac{c}{c_c} = 2\pi \frac{0.001}{0.0169} = 0.371$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - 0.371 = 0.629$$

**2.7. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento.** Otro caso particular importante de la Ec. (2.1) es aquel en que el término del amortiguamiento  $c\dot{x}$  se hace cero, mientras que el resto se conserva:

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \sin \omega t \quad (2.22)$$

Es razonable suponer que la función  $x = x_0 \sin \omega t$  pueda satisfacer esta ecuación. En efecto, al sustituir esta función la Ec. (2.22) resulta

$$-m\omega^2 x_0 \sin \omega t + kx_0 \sin \omega t = P_0 \sin \omega t$$

dividiendo cada término entre  $\sin \omega t$ , obtendremos

$$x_0(k - m\omega^2) = P_0$$

$$x_0 = \frac{P_0}{k - m\omega^2} = \frac{P_0/k}{1 - m\omega^2/k} = \frac{P_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

$$y \quad x = \frac{P_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (2.23)$$

que es una solución de la (2.22). La expresión  $P_0/k$  del numerador tiene un significado físico sencillo: es la deformación estática del resorte bajo la carga (constante)  $P_0$ . Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{P_0}{k} = x_{est}$$

y así la solución resulta

$$\frac{x}{x_{est}} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (2.24)$$

Aunque es válido establecer que esta expresión es "una" solución de la (2.22), no puede ser la solución más general, la cual debe contener dos constantes de integración. Puede verificarse fácilmente por sustitución que

$$x = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + \frac{x_{est}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (2.25)$$

satisface la (2.22). Los dos primeros términos constituyen la vibración libre sin amortiguamiento; el tercer término es la vibración forzada no amortiguada. Esto es una manifestación de la propiedad matemática general de las ecuaciones diferenciales de este tipo, como se establece en el siguiente teorema:

**Teorema:** La solución general (2.25) de la ecuación diferencial completa (2.22) es la suma de la solución general (2.8) de la Ec. (2.7) con el segundo miembro igual a cero, y la solución particular (2.23) de la Ec. (2.22) completa.

Se ve que los dos primeros términos de la (2.25) (la vibración libre) forman una onda senoidal de frecuencia natural o libre  $\omega_n$ , mientras que la vibración forzada (el tercer término) es una onda de frecuencia forzada  $\omega$ . Puesto que estamos en libertad de dar a  $\omega$  los valores que deseemos, es evidente que  $\omega$  y  $\omega_n$  son completamente independientes entre sí. La solución (2.25) por ser la suma de dos ondas senoidales de diferentes frecuencias, no es en sí un movimiento armónico (véase la Fig. 2.25c, Pág. 83).

Es interesante examinar ahora más de cerca las implicaciones del resultado (2.24). Es evidente que  $x/x_{est}$  es una onda senoidal de amplitud  $1/[1 - (\omega/\omega_n)^2]$ , dependiendo de la razón de frecuencias  $\omega/\omega_n$ . La Fig. 2.18 representa esta relación.

De la fórmula (2.24) se sigue de inmediato que para  $\omega/\omega_n < 1$  las amplitudes u ordenadas son positivas, mientras que para  $\omega/\omega_n > 1$  son negativas. Con objeto de comprender el significado de estas amplitudes negativas, volvemos a la Ec. (2.22) y a la

suposición de que  $x_0 \text{ sen } \omega t$  sea la solución hecha inmediatamente a continuación. Parece ser que en la región  $\omega/\omega_n > 1$  los resultados de  $x_0$  son negativos. Pero podemos escribir.

$$-x_0 \text{ sen } \omega t = +x_0 \text{ sen } (\omega t + 180^\circ)$$

lo que muestra que una "amplitud negativa" es equivalente a la amplitud positiva de una onda que esté simplemente defasada  $180^\circ$  con (en oposición a) la onda original. Físicamente esto significa que mientras que  $\omega/\omega_n < 1$  la fuerza y el movimiento están en fase, estarán en oposición cuando  $\omega/\omega_n > 1$ . Mientras que cuando  $\omega/\omega_n < 1$  la masa está debajo de la posición de equilibrio cuando la fuerza empuja hacia abajo; encontramos que cuando  $\omega/\omega_n > 1$  la masa está por encima de la posición de equilibrio mientras la fuerza empuja hacia abajo.

En general esta relación de fases se considera de poca importancia, mientras que la amplitud es de una importancia vital; por lo tanto, puede ignorarse el signo negativo apareciendo la línea punteada de la Fig. 2.18.

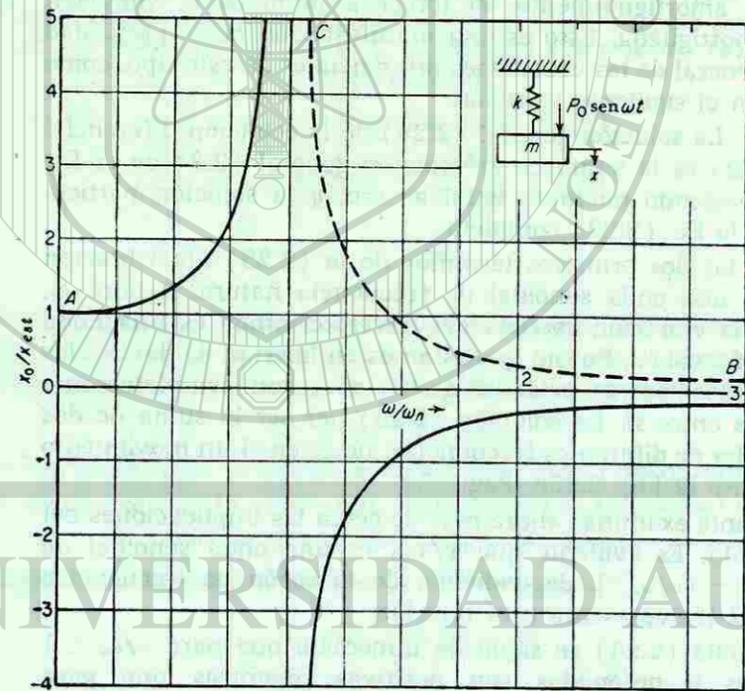


FIG. 2.18. Diagrama de resonancia para el movimiento absoluto de un sistema cuya masa está sujeta a una fuerza de amplitud constante y frecuencia variable; Ec. 2.23. Este diagrama es diferente al de la Fig. 2.20

Existen tres puntos importantes, A, B y C en la Fig. 2.18 en los cuales es posible inferir el valor de la ordenada basándonos en razonamientos puramente físicos. Considere primero el punto A muy cercano a  $\omega = 0$ ; la frecuencia de la fuerza es sumamente lenta y la masa se habrá deformado por la fuerza, solamente en la magnitud de su deformación estática. Esto resulta físicamente claro, y, por lo tanto, las amplitudes de la curva cercanas al punto A deberán ser aproximadamente iguales a la unidad. Por otro lado, para frecuencias muy altas  $\omega/\omega_n \gg 1$  la fuerza se mueve hacia arriba y hacia abajo tan de prisa que la masa simplemente no tiene tiempo para seguirla y la amplitud resulta muy pequeña (punto B).

Pero el caso más interesante ocurre en el punto C, donde la amplitud se hace infinitamente grande. Esto puede también entenderse físicamente. Cuando  $\omega/\omega_n = 1$ , la frecuencia forzada coincide exactamente con la frecuencia natural. La fuerza entonces puede siempre empujar a la masa en el momento oportuno en la dirección adecuada y la amplitud puede aumentar indefinidamente. Es el caso de un péndulo al que se le empuja ligeramente en la dirección de su movimiento cada vez que se balancea: Una fuerza relativamente pequeña puede hacer la amplitud sumamente grande. Este fenómeno tan importante se conoce como "resonancia", y a la frecuencia natural se la suele llamar también "frecuencia de resonancia".

Hasta ahora la teoría se ha circunscrito a una fuerza imprimida en la que la amplitud  $P_0$  es independiente de la frecuencia  $\omega$ . Otro caso de importancia técnica resulta cuando  $P_0$  es proporcional a  $\omega^2$ . Por ejemplo, la Fig. 2.19 representa una viga sustentada en dos apoyos soportando un motor desbalanceado en su centro. Al andar el

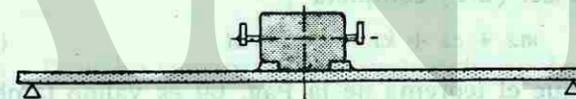


FIG. 2.19. Motor desbalanceado proporcionando una fuerza  $m_1 \omega^2 r$ , que origina el diagrama de resonancia de la Fig. 2.20

eje del motor experimenta una fuerza centrífuga rotativa  $m_1 \omega^2 r$ , donde  $m_1$  es la masa no balanceada y  $r$  su distancia desde el centro de la flecha. Esta fuerza rotativa puede descomponerse en una componente vertical  $m_1 \omega^2 r \text{ sen } \omega t$  y una componente horizontal  $m_1 \omega^2 r \text{ cos } \omega t$ . Supongamos que la viga representa una gran rigidez contra los desplazamientos horizontales y una menor rigidez para los verticales. Tendremos entonces un sistema con un solo grado de libertad

En apariencia el sistema se ha excitado con  $314/290 = 1.08$  veces la resonancia. Así es que por la Fig. 2.18 o la Ec. (2.24), el efecto del par motor se ha aumentado por el factor

$$1 - (1.08)^2 = 6.0$$

De la Ec. (2.4) vemos que el par motor en cuestión es  $600/750 T_0$  o sea, cuatro quintos de la amplitud de la componente alternante del par motor. Como establecimos, el par motor consiste de una parte constante  $T_0$  y una parte alternante con igual amplitud  $T_0$ . El par motor máximo en la flecha es

$$T_0 + 6.0 \times \frac{4}{5} T_0 = 5.80 T_0$$

El par motor estable  $T_0$  puede obtenerse de la velocidad y del cabalaje así:

$$T_0 = \frac{cv}{\omega} = \frac{200 \times 4500}{725 \times 2\pi} = 197 \text{ kg m} = 19700 \text{ kg-cm}$$

El esfuerzo cortante en la flecha debido a este par motor estable es

$$S_c = \frac{T_{or}}{I_p} = \frac{T_0 d/2}{\pi d^4/32} = 5 \frac{T_0}{d^3} = \frac{5 \times 19700}{(6.45)^3} = 368 \text{ kg/cm}^2$$

Debido a la proximidad de la resonancia, este esfuerzo está multiplicado por 5.8, de manera que el máximo esfuerzo de corte total es  $2134 \text{ kg/cm}^2$ . La "resistencia a la fatiga" del acero mencionada se ha derivado de unas pruebas de tensiones, donde el esfuerzo de tensión es el doble del esfuerzo cortante. El límite usual de fatigas en flechas de acero es menor de  $2000 \text{ kg/cm}^2$  por lo que la flecha deberá fallar. El diseño puede mejorarse reduciendo el diámetro de la flecha a 3 cm. Así, la frecuencia natural resulta 62 radianes por segundo, y el factor de amplificación del nuevo esfuerzo máximo de tensión resulta 2.04 que está dentro de los límites de seguridad.

**2.8. Vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso.** Finalmente consideraremos la Ec. (2.1) completa

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t \quad (2.1)$$

Puede comprobarse que el teorema de la Pág. 69 es válido también aquí. De acuerdo con ese teorema, la solución completa de la (2.1) consta de la suma de la solución completa de la Ec. (2.12), que es la (2.1) con el segundo miembro igual a cero, y la solución particular de toda la Ec. (2.1). Pero la solución de la ecuación con el segundo miembro igual a cero ha sido ya obtenida (Ec. 2.19), de manera que

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1 \sin qt + C_2 \cos qt) + \text{solución particular} \quad (2.27)$$

Basta por lo tanto obtener simplemente la solución particular. Análogamente al caso del Art. 2.7, podemos suponer  $x = x_0 \sin \omega t$ , pero

entonces el término  $cx$  nos dará  $c \sin \omega t$ , de manera que este supuesto es evidentemente incorrecto. Es posible suponer

$$\text{sen } x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

y sustituir este valor en la (2.1). En este caso se presentan solamente los términos que contengan  $\sin \omega t$  y  $\cos \omega t$  pero quedan dos constantes  $A$  y  $B$  disponibles. Resolviendo  $A$  y  $B$  algebraicamente, puede obtenerse una solución particular. Aquí derivaremos el resultado en forma diferente, para proporcionar una comprensión física más clara del fenómeno.

Supongamos que la solución es una onda senoidal con frecuencia forzada  $\omega$ . Entonces las cuatro fuerzas de la Ec. (2.1) serán ondas

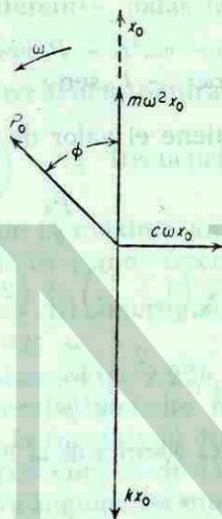


FIG. 2.21. Diagrama vectorial del que puede deducirse la Fig. 2.22

senoidales con esta frecuencia y podrán representarse por medio de vectores. Su derivada es equivalente a multiplicar la longitud del vector por  $\omega$  con un giro hacia adelante de  $90^\circ$ , como se explica en la Pág. 18

Si representamos el desplazamiento por  $\text{sen } x = x_0 \sin(\omega t - \varphi)$ ,

donde  $x_0$  y  $\varphi$  son todavía desconocidas y dibujamos este desplazamiento como un vector vertical dirigido hacia arriba (punteado) en el diagrama de la Fig. 2.21. La fuerza del resorte  $-kx$  tiene una

amplitud  $kx_0$  y se presenta en el diagrama dirigida hacia abajo. La fuerza de amortiguamiento  $-c\dot{x}$  tiene una amplitud  $c\omega x_0$  y está  $90^\circ$  adelantada con respecto a la fuerza del resorte. La fuerza de inercia  $-m\ddot{x}$  está  $90^\circ$  adelante de la fuerza de amortiguamiento y tiene una amplitud  $m\omega^2 x_0$ . La fuerza exterior  $P_0 \sin \omega t$  está  $\varphi$  grados adelante del desplazamiento  $x_0 \sin(\omega t - \varphi)$ . Así, se obtiene el diagrama completo de la Fig. 2.21 (siendo incógnitas  $x_0$  y  $\varphi$ ).

La ley de Newton [o la Ec. (2.1)] que es lo mismo requiere que la suma de las cuatro fuerzas sea cero en todo instante. Esto significa, que la suma geométrica de los cuatro vectores de la Fig. 2.21 deberá ser cero, lo que implica una vez más que las componentes, tanto horizontal como vertical, de esta resultante sean nulas. Expresado en lenguaje matemático

$$\text{Componente vertical: } kx_0 - m\omega^2 x_0 - P_0 \cos \varphi = 0$$

$$\text{Componente horizontal: } c\omega x_0 - P_0 \sin \varphi = 0$$

De estas dos ecuaciones se obtiene el valor de las incógnitas  $x_0$  y  $\varphi$ , con el resultado de

$$x_0 = \frac{P_0}{\sqrt{(c\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}} = \frac{P_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.28a)$$

$$\tan \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - (\omega^2/\omega_n^2)} \quad (2.28b)$$

Con la ayuda del glosario de mecánica eléctrica de la Pág. 50, esto puede transcribirse en

$$Q_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(R\omega)^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2}}$$

$$Q_{\omega\omega} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (2.29)$$

Puesto que  $i = dQ/dt$ , y  $Q = Q_0 \sin \omega t$ , la corriente será  $i = Q_{\omega\omega} \cos \omega t$ . El primer miembro de la Ec. (2.29) es el valor máximo de la corriente. La raíz cuadrada del denominador a la derecha se conoce con el nombre de "impedancia", que es un concepto familiar en la ingeniería eléctrica.

Las expresiones (2.28a, b) para la amplitud  $x_0$  y para el ángulo de fase  $\varphi$  están en términos de magnitudes no dimensionales o, simplemente, en razones. Aparece la razón de frecuencias  $\omega/\omega_n$  y la razón de amortiguamientos  $c/c_c$ , donde  $c_c$  es el "amortiguamiento crítico"

de la fórmula (2.16).  $P_0/k$  puede interpretarse como la deformación del resorte bajo la carga  $P_0$ ; y suele llamársele "deformación estática"  $x_{est}$ .

Estas relaciones se expresan gráficamente en la Fig. 2.22 a y b. El diagrama de amplitudes consiste en una familia de curvas, una para cada valor del amortiguamiento  $c$ . Todas las curvas aparecen debajo de la de amortiguamiento cero, la cual es, por supuesto, la misma que la de la Fig. 2.18. Así vemos que la amplitud de la vibración forzada disminuye con el amortiguamiento. Otra propiedad interesante de la figura es que el máximo de las diferentes curvas no vuelve a ocurrir cuando  $\omega/\omega_n = 1$  sino en una frecuencia un poco menor. De hecho, en el caso de vibraciones amortiguadas se distinguen tres frecuencias diferentes, todas las cuales coinciden cuando  $c = 0$ , a saber

$$(1) \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{la "frecuencia natural no amortiguada"}$$

$$(2) \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \text{la "frecuencia natural amortiguada"}$$

$$(3) \text{La "frecuencia de la máxima amplitud forzada" a la que a veces nos referimos como "frecuencia de resonancia".}$$

Para pequeños valores del amortiguamiento, estas tres frecuencias resultan muy cercanas.

El diagrama ángulo-fase, Fig. 2.22b, es también de considerable interés. Para un amortiguamiento nulo, hemos visto que por debajo de la resonancia, la fuerza y el desplazamiento están en fase ( $\varphi = 0$ ), mientras que por encima de la resonancia se encuentran desfasados  $180^\circ$ . La curva ángulo-fase muestra, por lo tanto, un salto discontinuo en el punto de resonancia. Esto puede verse también en la Ec. (2.28b) haciendo el amortiguamiento  $c$  sumamente pequeño. Por debajo de la resonancia, el denominador es positivo, resultando  $\tan \varphi$  un número positivo muy pequeño, mientras que, por encima de la resonancia,  $\tan \varphi$  resulta un número negativo muy pequeño. De esta forma, el propio ángulo  $\varphi$  tendrá valores cercanos a  $0^\circ$ , o bien, un poco menores que  $180^\circ$ . Haciendo el amortiguamiento igual a cero, resultará ya sea exactamente  $0^\circ$ , o exactamente  $180^\circ$ .

Para valores del amortiguamiento diferentes de cero, las otras curvas de la Fig. 2.22b representarán el ángulo de fase. Puede verse que, en general, el amortiguamiento tiende a suavizar las crestas de los diagramas de amortiguamiento nulo, tanto en la amplitud como en la fase.

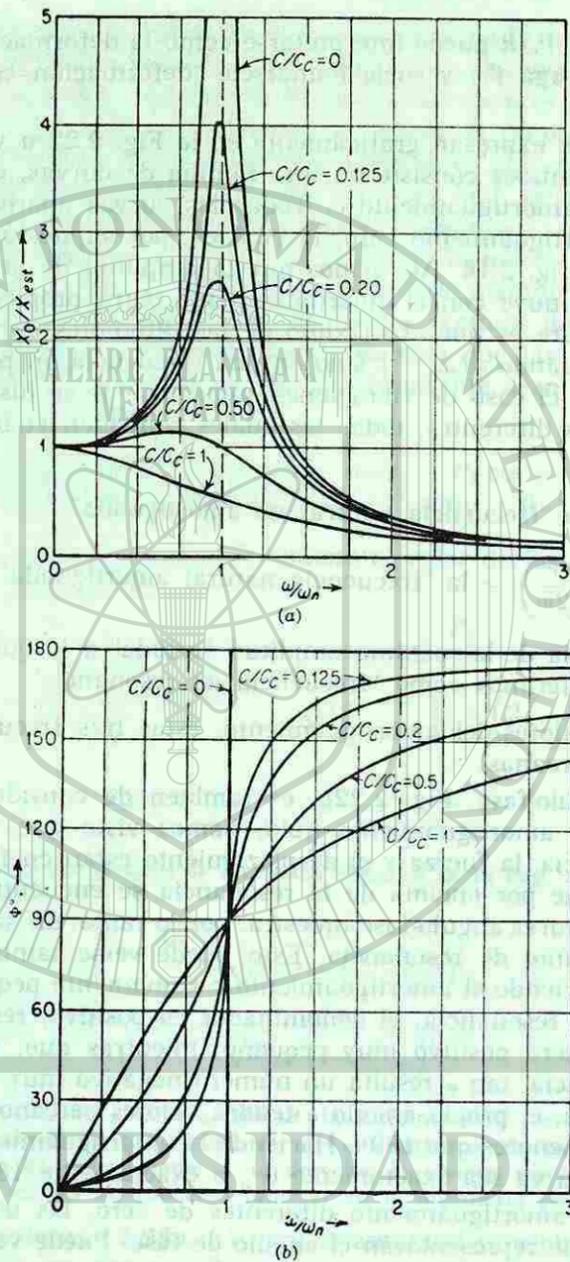


FIG. 2.22. (a) Amplitud de la fuerza de vibración de cualquiera de las Figs. 2.3 a 2.7 para diferentes grados de amortiguamiento. (b) El ángulo de fase entre la fuerza y el desplazamiento en función de la frecuencia para diferentes valores del amortiguamiento

Resulta instructivo volver al diagrama vectorial de la Fig. 2.21 y visualizar cómo los ángulos de amplitud y fase varían con la frecuencia. Para vibraciones muy lentas ( $\omega \approx 0$ ), las fuerzas de amortiguamiento y de inercia resultan despreciables y  $P_0 = kx_0$ , para  $\varphi = 0$ . Aumentando la frecuencia, el vector amortiguamiento crece y las fuerzas de inercia aumentan aún con mayor rapidez. El ángulo de fase no puede permanecer siendo cero, puesto que  $P_0$  deberá tener una componente horizontal hacia la izquierda para equilibrar a  $c\omega x_0$ . El vector fuerza-inercia crecerá hasta lograr la magnitud de la fuerza del resorte. Luego,  $\varphi$  valdrá  $90^\circ$ , y  $P_0 = c\omega x_0$ . Esto sucede en la resonancia, porque  $m\omega^2 x_0 = kx_0$ , o sea  $\omega^2 = k/m$ . Por lo tanto, en la resonancia el ángulo de fase será de  $90^\circ$ , independientemente del amortiguamiento. Por encima de esta frecuencia,  $m\omega^2 x_0$  crecerá, tomando un valor mayor que  $kx_0$ , de tal suerte que  $P_0$  sufrirá una caída descendente y  $\varphi$  se mantendrá mayor de  $90^\circ$ . Para frecuencias muy altas,  $kx_0$  resulta insignificante con respecto a  $m\omega^2 x_0$ , por lo que  $P_0$  se usará para equilibrar la fuerza de inercia siendo  $\varphi = 180^\circ$ .

A bajas velocidades, la fuerza exterior superará a la fuerza del resorte, y para altas velocidades, la fuerza exterior superará a la de inercia, mientras que en la resonancia equilibrará a la fuerza de amortiguamiento.

Las ecuaciones de energía involucradas en este proceso sirven también para proporcionarnos un mejor entendimiento físico. Para movimientos muy lentos  $\varphi = 0$ , se demostró en la Pág. 29 que el trabajo en un ciclo completo es nulo. En otras palabras, durante un ciclo la energía mecánica no se transforma en calor. A partir de una posición de equilibrio, la fuerza exterior deberá recorrer una cierta distancia antes de alcanzar su posición extrema. En este caso, efectivamente realiza un trabajo. Pero este trabajo propiamente se convierte en energía potencial o elástica almacenada en el resorte. Durante el siguiente cuarto de ciclo, el movimiento actúa *contra* la fuerza exterior, cediendo entonces el resorte, su energía almacenada. Por lo tanto, a bajas velocidades, el trabajo de la fuerza exterior se convierte en energía elástica, sin que nada se convierta en calor. Para la frecuencia de resonancia  $\varphi = 90^\circ$ , el trabajo disipado por ciclo será  $\pi P_0 x_0$  (Pág. 29). En este caso, la fuerza exterior es igual en magnitud, pero de sentido opuesto, a la fuerza de amortiguamiento, de tal suerte que el trabajo se disipa en amortiguamiento. Las fuerzas de inercia y del resorte son de igual magnitud, de sentido opuesto y en fase con el desplazamiento. Cada una de estas fuerzas *efectúa* un trabajo durante un cuarto de ciclo pero almacena ener-





# LOS SISMOS Y SUS CAUSAS

Ismael Herrera Revilla,\* L. Ponce Mori\* y G. Suárez Reynoso\*  
\*Investigador, Instituto de Geofísica, UNAM

**RESUMEN** Se presenta en forma breve un panorama del potencial sísmico en México y sus diversas causas. Se hacen algunas consideraciones respecto a la necesidad de fortalecer las observaciones sismológicas y la investigación en este campo.

## 1. INTRODUCCION

En general, llamamos temblor o sismo a cualquier vibración o estremecimiento del suelo. La tierra puede temblar por razones muy diversas, entre las que se tienen: explosiones, colapsos del subsuelo o cualquier otro tipo de deslizamiento o acomodamiento que se produzca por debajo de la superficie del terreno. Los sismos producidos por las explosiones volcánicas pueden ser bastante fuertes. Sin embargo, la mayor parte de los temblores, sobre todos los más fuertes, tienen origen tectónico.

La Tierra, nuestro planeta, está formada por capas concéntricas. La más superficial es la corteza, cuyo espesor es de alrededor de 30 km en los continentes y se reduce a 15 km en los océanos. El límite inferior de la corteza se conoce como "Discontinuidad de Mohorovič". Por debajo está el manto que se extiende hasta una profundidad de 2,900 km, donde se encuentra el núcleo de la Tierra. Tomando en cuenta que el radio de la Tierra es de 6,378 km, resulta que el núcleo terrestre es una esfera de 3,478 km de radio.

El cascarón más externo de la Tierra se comporta como un cuerpo rígido. Esta porción tiene un espesor de aproximadamente 100 km y forma la litósfera, constituida por la corteza y parte del manto que flota sobre el resto del manto. El comportamiento del manto, desde una perspectiva geológica (es decir, en periodos del orden de millones de años) es similar al de un líquido.

Dicho recubrimiento sólido no es continuo, sino que está partido en pedazos similares a los gajos de una pelota de fútbol; a estas porciones se les llama placas. Las que forman o colindan con nuestro país son: la del Pacífico, la de Norteamérica, la de Cocos y la del Caribe. Otras placas muy importantes son: la de Nazca, la Sudamericana, la Africana, la Euroasiática, la Australiana y la Antártica (Fig. 1)

o distinguir dos clases de movimientos en las fronteras de subducción: sismos ordinarios y sismos característicos. En la zona de subducción mexicana se generan sismos característicos con magnitud del orden de 7.8 y cuya longitud de ruptura tiene cierta relación con el tamaño de las brechas, alcanzando unos 200 km. Por otra parte, los sismos ordinarios son más pequeños y frecuentes.

transcurrir muchos años antes de que ocurra un sismo característico en una misma brecha. Por ejemplo, en el caso de México, los periodos de recurrencia se han estimado entre 35 y 80 años. Durante este tiempo la brecha está quieta, en el sentido en que no presenta actividad sísmica mayor, por lo que se habla de una zona de quietud. En general, una zona de quietud que se localiza en una área de subducción sísmica indica que se está acumulando energía que finalmente se liberará en forma de sismos. Es importante que estas zonas de quietud sísmica apoyen los indicios más significativos para realizar la predicción de los temblores. evidente que si es posible determinar, a partir de la observación directa de las fallas, el momento en que esta energía sea liberada, la predicción de los temblores sería más realista. Sin embargo, hasta ahora la predicción no ha logrado dar este último paso.

## EL CASO DE MEXICO

El caso de México presenta una notable actividad sísmica en diversas regiones de su territorio, en las que sus grandes terremotos liberan alrededor del 3% de la energía sísmica mundial. En promedio, ocurre un sismo de magnitud Richter mayor que 7.0 cada 2 años. En el siglo XX han ocurrido en México 8 sismos de magnitud igual o mayor que 8.0 (1900, 8.1; 1907, 8.3; 1907, 8.2; 1928, 8.0; 1931, 8.0; 1942, 8.4 y 8.0; 1987, 8.1), afectando regiones densamente pobladas del Sur del País. Las zonas de Oaxaca, Guadalajara y México, entre otras, han sufrido daños importantes por los terremotos. Descripciones históricas indican que en 1787 México fue afectado por un terremoto, de magnitud Richter del orden de 8.5. Estos terremotos afectan grandes extensiones del territorio nacional y pueden generar maremotos, peligrosos para los poblados de la costa del Sur de México o situados en otras latitudes de la costa del Océano Pacífico. Un sismo de magnitud 8.1, ocurrido el 19 de Septiembre de 1985, fue causado por una falla de 150 km de longitud a lo largo de la Trinchera de Acapulco; de magnitud 8.5, como el del año 1787, debe haberse originado en una falla de unos 350 km de longitud.

Se reconoce en la actualidad que en las placas existen segmentos llamados brechas, que tienen relativa independencia de movimiento. En México, que es un país altamente sísmico (Fig. 2) debido a que su costa del Pacífico está en el borde de una zona de subducción, en la que la placa de Norteamérica cabalga sobre la de Cocos, existen varias de estas brechas, entre ellas están las de Jalisco, Colima, Guerrero, Ometepepec y Tehuantepec. Es nec-

Estos ejemplos justifican la necesidad que tiene México para desarrollar investigaciones y observaciones sismológicas y la preocupación y obligación que tienen las instituciones gubernamentales para prevenir y atender emergencias originadas por terremotos.

## 3. TECTONICA GLOBAL Y SISMICIDAD DE MEXICO

La actividad sísmica de México tiene su origen en los fenómenos neotectónicos producto de la interacción de cuatro grandes placas (Fig. 1), a saber, de Norteamérica, del Pacífico, de Cocos y del Caribe. En el análisis del potencial sísmico también hay que considerar la pequeña placa de Rivera. En general, en México se presentan dos grandes tipos de actividad sísmica.

- Zona de desplazamiento horizontal de placas (Placas de Norteamérica y del Pacífico).
- Zona de Convergencia de Placas. (Placas de Rivera y Norteamérica, Placas de Cocos y del Caribe).

A continuación se analizan sus características con mayor detalle.

A. El movimiento relativo de las Placas de Norteamérica y del Pacífico da origen, en México, a la actividad sísmica que ocurre en el Golfo de California y en la parte norte de la Península de Baja California. Los grandes sismos presentan, por lo general, un movimiento transcurrente lateral derecho a lo largo de fallas de rumbo. Un ejemplo de desplazamiento repentino en este sistema es el terremoto de Mexicali-Valle Imperial,  $M_s=6.9$ , ocurrido el 14 de Octubre de 1979 que causó daños tanto en México como en los Estados Unidos de Norteamérica.

El movimiento relativo entre las Placas de Norteamérica y del Pacífico, a lo largo de las fallas de San Andrés y San Jacinto, presenta valores promedios de 2.5 y 10 cm/año; el potencial sísmico en México, en el norte de la Península de Baja California, está asociado a la extensión de este sistema de fallas hacia el Sur.

Hay que recordar que en 1887 ocurrió el terremoto de Bavispe, Sonora que afectó a poblados fronterizos de México y los E.U.A. Su magnitud es de 7.4 y su mecanismo focal corresponde al de una falla normal con desplazamiento de 3 m a lo largo de 80 km de longitud y unos 15 km de profundidad. El origen de este terremoto tiene relación con la provincia tectónica Basin and Range controlada por esfuerzos tensionales horizontales de la corteza terrestre. En los Estados Unidos de Norteamérica, gracias a la amplia cobertura instrumental está claramente definida la actividad sísmica asociada a la provincia tectónica Basin and Range; en México, esta provincia sísmica no ha sido estudiada instrumentalmente.

B. La interacción de las Placas de Cocos y Norteamérica en el Sur de México (Fig. 1) da origen a grandes sismos, que por su naturaleza podemos diferenciar en 4 tipos fundamentales: [1] interplaca, debido al desplazamiento relativo de ambas placas a profundidades someras (15-35 km); [2] Intraplaca, por fracturamiento de la placa subducente de Cocos (Fig. 4) a profundidades intermedias (40-150 km); [3] Intraplaca, por deformaciones tensionales de la corteza terrestre (5-15 km) debido a fenómenos volcánicos; [4] Intraplaca, por deformaciones de compresión de la corteza y manto de la Placa de Norteamérica a profundidades someras (20-30 km).

B.1 Los terremotos de interplaca o típicos de subducción, presentan en México las mayores magnitudes registradas instrumentalmente. En Junio de 1932, los terremotos de Jalisco alcanzaron una magnitud de 8.4 y 8.0 en la escala de Richter. En este siglo en el Sur de México, entre Jalisco y Oaxaca han ocurrido 33 sismos de magnitud mayor que 7.0. Las placas de Cocos y Norteamérica convergen con una velocidad promedio de 6 cm/año. Los grandes sismos liberan aproximadamente la mitad de la energía elástica acumulada por dicho movimiento; la otra mitad se libera por procesos asísmicos.

Un ejemplo de estos grandes terremotos es el ocurrido el 19 de Septiembre de 1985 de magnitud 8.1 y de carácter complejo, pues estuvo constituido por 2 eventos de aproximadamente igual magnitud que ocurrieron a 27 segundos de diferencia, y con epicentros distantes alrededor de 100 km, estando situado el segundo al sureste del primero. Al día siguiente, 36 horas después del terremoto del 19 de Septiembre, ocurrió otro terremoto de magnitud 7.5 situado a continuación del área de réplicas del terremoto principal. Fenómenos de ésta y mayor complejidad se presentan también en otras zonas de subducción. El modelo de tectónica de placas es útil para predecir las regiones de mayor potencial sísmico, pero insuficiente para pronosticar el grado de complejidad de las rupturas por encañamiento casi simultáneo de dos o más unidades sismogénicas. El terremoto de 1787 pudiera constituir un evento múltiple que rompió más de una unidad sismogénica, dando como resultado un terremoto mayor, de magnitud del orden de 8.5.

B.2 En México, la Placa oceánica de Cocos penetra por debajo de la Placa de Norteamérica con un ángulo que varía de 35° en Colima-Michoacán, a 15° en Oaxaca. La expresión superficial de este fenómeno es un Eje Volcánico Transmexicano no paralelo con la Trincheras de Acapulco. Además, a profundidades del orden de 50 a 100 km, en la Placa de Cocos se producen tensiones que originan sismos de gran magnitud, del orden de 6.5 a 7.0, que causan graves daños en las poblaciones del interior de la República. Ciudades de los estados de Puebla, Veracruz y Norte de Oaxaca han sido afectadas notablemente por

terremotos de este tipo. No existen fundamentos para descartar que terremotos de esta naturaleza puedan ocurrir también en la parte norte de los estados de Guerrero y Michoacán, pues allí ocurren sismos de magnitud moderada, menor que 6.0, originados por esfuerzos tensionales en la placa de Cocos que subduce.

A manera de ejemplo de terremotos interplaca de profundidad intermedia, citamos el de Córdoba-Orizaba de Agosto de 1973 y el de Huajuapán de León de Octubre de 1982, ambos de magnitudes del orden de 7.0. El de mayor magnitud de este siglo ocurrió al Sur de la Ciudad de Oaxaca, en enero de 1931, con magnitud igual a 8.0 y profundidad de 40 km. Todos ellos han causado intensos daños en el área epicentral, destruyendo monumentos históricos y otras obras civiles.

B.3 En el territorio continental del Sur de México ocurren también sismos de gran magnitud (M 7.0) asociados al Eje Volcánico Transmexicano. Estos sistemas generalmente son del tipo de falla normal, someros (5-15 km de profundidad) controlados por esfuerzos tensionales de la corteza. Los dos sismos más notables ocurridos durante este siglo son los de Tixmadeje-Acambay, Edo. de México y magnitud 7.0; el segundo ocurrió en 1920 a 30 km de la Ciudad de Jalapa, Ver. con magnitud de 6.5. Estos terremotos son especialmente peligrosos en la región epicentral por su poca profundidad (Fig. 3).

La sismicidad de gran magnitud asociada al Eje volcánico Transmexicano no ocurre al azar sino asociada a rasgos morfoestructurales de origen volcánico. Una de las tareas más urgentes de la sismología mexicana es instrumentar las áreas de alto potencial sísmico del Eje Volcánico Transmexicano y realizar investigaciones multidisciplinarias con geólogos e ingenieros sísmicos, pues las ciudades más pobladas y una porción importante de la infraestructura industrial están asentadas en él.

B.4 En México ocurren también sismos en la región del Golfo de México, debido a la deformación compresional de la corteza terrestre, por la convergencia de las placas de Norteamérica y de Cocos. Estos sismos presentan en general magnitudes moderadas, menores de 5.5. Sin embargo, en la región de Jáltipan-Coatzacoalcos, en el Estado de Veracruz, han ocurrido terremotos destructores como el del 26 de Agosto de 1959, de magnitud 6.4 y a profundidad de 20 km. Los antecedentes históricos confirman que esta zona ha sido afectada anteriormente por terremotos similares, lo que significa que en ella existe un peligro sísmico permanente. Es una región aún no instrumentada en México y requiere una atención urgente por el amplio desarrollo industrial, principalmente petrolero (Fig. 4).

## PELIGRO SISMICO ACTUAL EN MEXICO

La descripción anterior ilustra que en México existe un peligro sísmico en una parte importante del país. Sólo en la península de Yucatán y en región central y oriental del norte del país no existe peligro sísmico. La pregunta fundamental es, entonces: ¿Dónde, cuándo y con qué magnitud puede ocurrir un terremoto?

La primera pregunta ya está contestada. La respuesta al cuándo, es imposible contestarla en el momento. Sin embargo, podemos destacar que usando los conceptos de la tectónica de placas y la historia sísmica de México se puede contestar lo siguiente:

Para los terremotos de subducción, los períodos de recurrencia varían, en general, entre 35 y 80 años. Con estos antecedentes, concluimos que en el Sur de México existen a lo menos 2 brechas importantes pronto a romperse; una es la de Guerrero, entre Zihuatanejo y Acapulco y la otra es la del Istmo de Tehuantepec, Oaxaca. Los últimos terremotos en la primera brecha ocurrieron a comienzos de este siglo, hace casi 80 años. Los últimos terremotos de la segunda, ocurrieron probablemente hace 200 años, en 1787.

Las magnitudes, de acuerdo al tamaño de la brecha pueden variar de 7.9 a 8.4. Es importante insistir que esta estimación del peligro sísmico no tiene ningún valor predictivo sobre la fecha de ocurrencia; sólo significa que la probabilidad de ocurrencia de un terremoto en dichas regiones es alta, de acuerdo al conocimiento actual de la tectónica global. Otras investigaciones y observaciones pudieran refinar nuestras estimaciones, pero no eliminar el hecho de que tarde o temprano allí ocurrirá un gran terremoto.

Para los grandes terremotos de profundidad intermedia, los períodos de recurrencia parecen ser del orden de 100 años; lamentablemente son difíciles de estudiar espacialmente, pues la actividad microsísmica es de baja magnitud y la cobertura observacional actual de México no es suficiente para localizar confiablemente la sismicidad de fondo. Sin embargo, y muy en general, podríamos sugerir que la región Sur de Puebla, Norte de Oaxaca presentaría un mayor peligro sísmico y magnitud probable del orden de 7.0.

Mucho más difícil es pronosticar el "cuándo" ocurrirán los terremotos del Eje Volcánico y del Golfo de México; las descripciones históricas no permiten estimar un período de recurrencia confiable y esto puede deberse a que los procesos tectónicos allí son lentos y la estructura geológica compleja. Las magnitudes esperadas no deberían ser inferiores a las máximas observadas instrumentalmente.

## 5. OBSERVACIONES SISMOLOGICAS EN MEXICO

Tradicionalmente las observaciones sismológicas de México las ha realizado el Servicio Sismológico Nacional (Fig. 4), dependiente actualmente del Instituto de Geofísica de la UNAM. El SSN cuenta con observaciones desde comienzos de este siglo; desde 1910 cuenta con una red de sismógrafos mecánicos tipo Wiechert que, en su época fue una de los mejores de América. El desarrollo posterior fue poco homogéneo; en los años 1960-1970 se instalaron sismógrafos electromagnéticos de los cuales aún funcionan algunos. En la segunda mitad de los años 70 se inició el desarrollo de una red telemétrica (RESMAC) que alcanzó a tener unas 12 estaciones en el país, pero con una distribución geográfica poco útil para estudios de sismicidad. En el presente, en el Instituto de Geofísica de la UNAM, existen proyectos ambiciosos de desarrollo instrumental, adecuándose al actual desarrollo de la tecnología electrónica, de comunicaciones y computacional. Sin embargo, este tipo de proyectos rebasan la capacidad financiera de la propia Universidad y su éxito dependerá del apoyo financiero permanente del Gobierno de México.

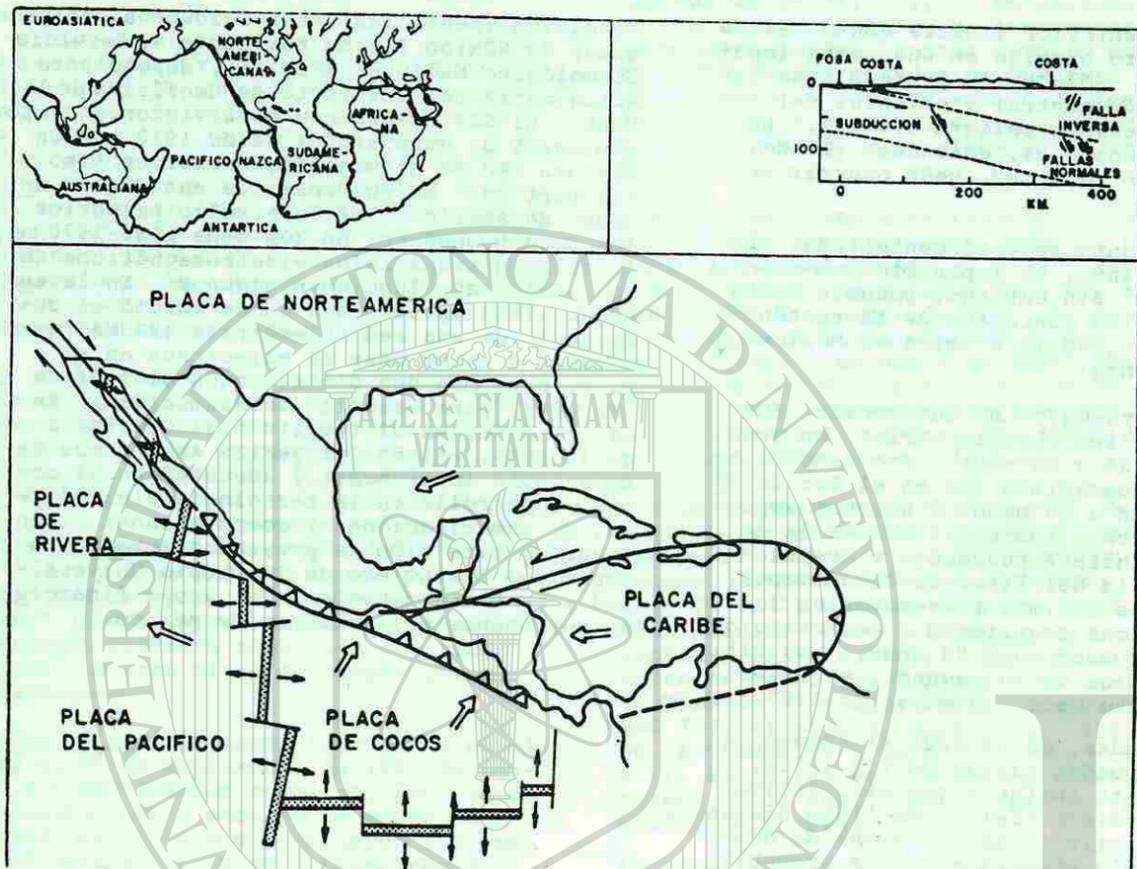


Fig. 1 Disposición de las placas tectónicas, cuyo movimiento relativo determina la sismicidad del territorio de México. En la figura de la esquina superior izquierda se muestra esquemáticamente la distribución global de las mayores placas tectónicas. En la figura de la esquina superior derecha, en un corte esquemático se observa el proceso de subducción y los sismos a los que da origen: de interplaca o subducción, de intraplaca de fallamiento normal y de intraplaca de fallamiento inverso.



Fig. 2 Mapa epicentral de los sismos mayores ( $M \geq 7.0$ ) ocurridos en México desde 1900 a la fecha. Se observa que la mayor liberación de energía sísmica ocurre en la parte sur de la República.

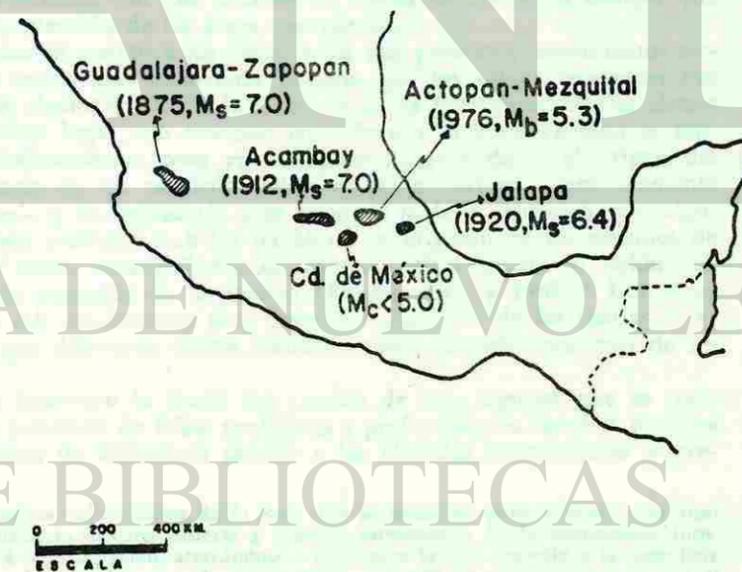


Fig. 3 Mapa esquemático de las regiones del Eje Volcánico Mexicano que han sido afectadas repetidamente por sismos someros de moderada o gran magnitud. Estos sismos son especialmente peligrosos por ocurrir en zonas densamente pobladas.



Fig. 4 Distribución actual de la red de observatorios sísmológicos del Instituto de Geofísica, UNAM. Aparentemente la red cubre la zona sísmica del sur del país; sin embargo, la diversidad y obsolescencia del instrumental no permiten asegurar un monitoreo confiable de la actividad sísmica de México.

## 7

### Características de los sismos

#### 7.1 Causas de los sismos

Muchos son los fenómenos que pueden dar origen a los sismos: la actividad volcánica, las explosiones, el colapso de los techos-de-cavernas, etcétera. Con mucho, los sismos más importantes desde el punto de vista de la ingeniería son de origen tectónico, es decir, los asociados con deformaciones a gran escala en la corteza de la tierra. La situación obedece a la frecuencia con que ocurren los sismos tectónicos, la energía que liberan y la extensión de las áreas que afectan.

Hay dudas en cuanto a los mecanismos que producen movimientos tectónicos. La teoría más favorecida sostiene que los sismos tectónicos son causados por deslizamientos a lo largo de fallas geológicas. En los sismos mayores tendría lugar una reacción en cadena a lo largo de toda la longitud del deslizamiento, pero en cualquier instante dado, el origen del sismo quedaría en un pequeño volumen de la corteza —prácticamente en un punto— y se desplazaría a lo largo de la falla. Sin embargo, algunos sismólogos sostienen que los temblores se originan en los cambios de fase de las rocas, acompañados de cambio volumétricos, en volúmenes relativamente pequeños de la corteza (Evison, 1963 y 1967).<sup>1</sup> Los datos que existen son insuficientes para sostener cualquiera de las teorías, y es concebible que diferentes sismos tectónicos sean causados por más de un mecanismo.

Quienes favorecen la teoría del cambio de fase arguyen que es poco probable la presencia de fallas geológicas a profundidades mayores de unos cuantos cientos de kilómetros debido a las elevadas temperaturas y pre-

<sup>1</sup> Los cambios volumétricos de la roca que se necesitan para alcanzar una condición de equilibrio pueden deberse a cambios importantes en la compresión litostática, causada por migración, acercándose o alejándose la roca respecto a la superficie de la tierra, o pueden deberse a la aplicación o remoción de grandes cargas, como el peso de los glaciales y del agua en los vasos de almacenamiento.



Fig. 4 Distribución actual de la red de observatorios sísmológicos del Instituto de Geofísica, UNAM. Aparentemente la red cubre la zona sísmica del sur del país; sin embargo, la diversidad y obsolescencia del instrumental no permiten asegurar un monitoreo confiable de la actividad sísmica de México.

## 7

### Características de los sismos

#### 7.1 Causas de los sismos

Muchos son los fenómenos que pueden dar origen a los sismos: la actividad volcánica, las explosiones, el colapso de los techos-de-cavernas, etcétera. Con mucho, los sismos más importantes desde el punto de vista de la ingeniería son de origen tectónico, es decir, los asociados con deformaciones a gran escala en la corteza de la tierra. La situación obedece a la frecuencia con que ocurren los sismos tectónicos, la energía que liberan y la extensión de las áreas que afectan.

Hay dudas en cuanto a los mecanismos que producen movimientos tectónicos. La teoría más favorecida sostiene que los sismos tectónicos son causados por deslizamientos a lo largo de fallas geológicas. En los sismos mayores tendría lugar una reacción en cadena a lo largo de toda la longitud del deslizamiento, pero en cualquier instante dado, el origen del sismo quedaría en un pequeño volumen de la corteza —prácticamente en un punto— y se desplazaría a lo largo de la falla. Sin embargo, algunos sismólogos sostienen que los temblores se originan en los cambios de fase de las rocas, acompañados de cambio volumétricos, en volúmenes relativamente pequeños de la corteza (Evison, 1963 y 1967).<sup>1</sup> Los datos que existen son insuficientes para sostener cualquiera de las teorías, y es concebible que diferentes sismos tectónicos sean causados por más de un mecanismo.

Quienes favorecen la teoría del cambio de fase arguyen que es poco probable la presencia de fallas geológicas a profundidades mayores de unos cuantos cientos de kilómetros debido a las elevadas temperaturas y pre-

<sup>1</sup> Los cambios volumétricos de la roca que se necesitan para alcanzar una condición de equilibrio pueden deberse a cambios importantes en la compresión litostática, causada por migración, acercándose o alejándose la roca respecto a la superficie de la tierra, o pueden deberse a la aplicación o remoción de grandes cargas, como el peso de los glaciales y del agua en los vasos de almacenamiento.

siones confinantes y, sin embargo, los datos parecen indicar que se han originado temblores a profundidades mayores de 600 km (Gutenberg y Richter, 1954) y hasta de 800 km. Por tanto, quizá algunos sismos no estén asociados a las fallas. Por otra parte, una evaluación de los sismos del sur de California en el periodo de 1934-1963 favorece fuertemente la hipótesis de que cuando menos la mayoría de estos movimientos provienen de deslizamientos a lo largo de las fallas geológicas (Allen y coautores, 1965). Además, los más precisos de los análisis recientes de los registros de la tierra invariablemente señalan los deslizamientos en las fallas como mecanismos responsables (véanse, por ejemplo, números del *Bull. Seism. Soc. of Am.*, 1964-1969).

Quizá el modelo teórico más satisfactorio para el mecanismo del deslizamiento en las fallas sea el propuesto por Burridge y Knopoff (1967). Se concibe que cuando menos un lado de la falla está formado por un gran número de elementos, constituido cada uno por un cuerpo rígido, un resorte lineal, un amortiguador lineal y un componente de fricción de Coulomb. El modelo explica tales fenómenos como los temblores premonitorios, las réplicas de temblores y corrimientos diferidos de las fallas, que se observan en combinación con un gran porcentaje de los macrosismos.

La cuestión de los mecanismos generadores no es puramente académica. Las características de los movimientos intensos cerca del foco son sensibles al mecanismo generador (véase, por ejemplo, Rascón y Cornell, 1969). Así, suponiendo que los deslizamientos en fallas producen sismos y adoptando algunas hipótesis respecto a la propiedades mecánicas de las rocas, Housner (1965) ha deducido que la aceleración máxima posible es  $0.5g$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

No se ha podido acotar la aceleración máxima posible del terreno con base en la suposición de que los temblores provienen de cambios de fase en las rocas. Por otra parte, la velocidad máxima del terreno que puede transmitirse está limitada por las deformaciones a la ruptura de las rocas y las velocidades de las ondas de cortante. Dependiendo de las propiedades de las rocas en cuestión, se han calculado velocidades horizontales máximas posibles del terreno de 1 a 3 m/seg (Newmark, 1968). De acuerdo con Ambraseys (1969) el límite superior queda entre 1 y 1.5 m/seg.

Estas velocidades corresponden a las intensidades sísmicas mayores que las que suelen suponerse para la mayoría de los objetivos prácticos. Puede aseverarse, pues, que desde el punto de vista práctico no hay límite superior a la intensidad de los sismos. De aquí se deduce que, independientemente de cuán conservador sea un diseño, existe una probabilidad finita de falla estructural en todo intervalo finito de tiempo, y es seguro que algún día se presentará la falla a menos que la estructura se demuela a propósito. La conclusión es válida aun en las llamadas zonas asísmicas. La regionalización sísmica debe tomarse en el sentido de mayor o menor riesgo, y una base aceptable para los mapas "de intensidad máxima probable" es el tiempo de retorno a que puedan corresponder.

La manera más sencilla de expresarse cuantitativamente respecto a los temblores consiste en graduarlos mediante un solo número —la intensidad o poder destructivo local del temblor— en alguna escala convencional. Esta es una base demasiado burda para la mayoría de los fines ingenieriles. Una descripción más adecuada abarca acelerogramas u otras

representaciones, en función del tiempo, de tres componentes ortogonales de traslación del movimiento del terreno en un punto: los dos horizontales y el componente vertical. Esta descripción es suficiente para el fin de calcular los efectos sísmicos en edificios de dimensiones pequeñas o moderadas. En casos especiales, las derivadas espaciales de las aceleraciones del terreno llegan a ser importantes; así sucede con las componentes rotacionales de la aceleración del terreno cuando se trata de estructuras esbeltas, y con las deformaciones del suelo en las grandes obras de ingeniería.

## 7.2 Foco, magnitud e intensidad

El *foco*, *centro*, *hipofoco* o *hipocentro* de un sismo es el punto de la corteza terrestre en el que indican los cálculos que se originan las ondas sísmicas.

El *epifoco* o *epicentro* es la proyección vertical del foco en la superficie de la tierra. En ausencia de datos instrumentales el epicentro ha de fijarse a veces, basándose en los daños observados, como el punto de sacudidas más intensas. En general este punto no coincide exactamente con el epicentro instrumental. Términos tales como *distancia focal* y *distancia epicentral* se refieren a distancias a un punto de interés dado, llamado *estación*.

La *magnitud* de un sismo es una medida de la energía liberada. *Intensidad* es una medida de la capacidad de destrucción sísmica local. Por tanto, a un sismo se asocia una sola magnitud, mientras que su intensidad varía de estación a estación.

Las escalas de magnitud de Richter se usan universalmente (véase Richter, 1958). En su definición original, la magnitud (representada por  $M$ ) es el logaritmo común de la amplitud de la traza, en micras, de un sismógrafo estándar Wood-Anderson con amplificación de 2800, periodo natural de 0.8 seg y coeficiente de amortiguamiento de 80 por ciento, instrumento que esté colocado en terreno firme a 100 km del epicentro. Existen diagramas y tablas empíricas para corregir para distancias epicentrales que difieran de 100 km y para distintas condiciones del terreno. Los diagramas correctivos y la definición misma se aplican estrictamente solo a sismos con profundidad focal menor de unos 30 km. Los diagramas correctivos son relativamente precisos hasta distancias epicentrales de unos 600 km.

La escala telesísmica (que también se representa por  $M$ ) y la escala unificada de Gutenberg (representada por  $m$ ) se aplican, respectivamente, a distancias focales mayores de 2000 km y de 600 a 2000 km. Ambas se determinan a partir de las amplitudes y periodos de ciertas fases de los sismos. Aunque se intenta que coincidan con la definición original de magnitud, estas dos escalas, especialmente la unificada, dan diferencias sistemáticas con la magnitud original de Richter (Riznichenko, 1962), sobre todo en condiciones geológicas diferentes de las de California (Jordan, Black y Bates, 1965). La mayoría de las magnitudes que se manifiestan oficialmente se determinan con base en la escala telesísmica original (sin embargo, el U.S. Coast and Geodetic Survey ha conservado la escala unificada en sus informes), y en este libro confinaremos el uso cuantitativo del término *magnitud* a las escalas  $M$  (para magnitudes muy grandes

la definición original de Richter se reemplaza siempre con la escala tele-sísmica o la escala unificada).

Ha sido necesario modificar las expresiones primitivas que relacionan magnitud con desprendimiento de energía. La relación siguiente goza del favor de los sismólogos:

$$\log_{10} W = 11.8 + 1.5M \quad (7.1)$$

donde  $M$  es magnitud y  $W$  es la energía desprendida en ergios (Gutenberg y Richter, 1956).<sup>2</sup> Usaremos esta expresión en conexión con la sismicidad en el capítulo 8.

Las explosiones nucleares desprenden cantidades de energía que se comparan con los sismos medianos. Una bomba de un megatón libera fracción de ella se convierte en ondas sísmicas. Serían necesarios aproximadamente 50 megatones para producir una energía sísmica igual a ésta, que es del mismo orden que la energía de un sismo de magnitud 7.3 (Ec. 7.1). Los temblores naturales de esta magnitud o mayor ocurren como promedio siete veces al año en todo el mundo (Gutenberg y Richter, 1954). Los efectos más importantes de las explosiones nucleares no se transmiten normalmente como ondas sísmicas, de manera que los movimientos del terreno que provienen de esta causa merecen un tratamiento secundario y especializado, que difiere del de los sismos naturales y no se abordará en la presente obra en forma detallada.

Casi todas las escalas de intensidad son subjetivas y tienen formato semejante al de la escala de Mercalli modificada ( $MM$ ) (apéndice 2). Esta escala, muy usada en Norteamérica, se parece en rasgos generales a la escala soviética, a la de Cancanni-Sieberg, que se usa extensamente en Europa occidental, y la más reciente de Medvedev, Sponheuer y Karnik, conocida como la MSK-64 (Medvedev y Sponheuer, 1969). Se han publicado equivalencias en otras escalas de intensidad (Richter, 1958).

Parece indeseable la naturaleza subjetiva de estas escalas. Las reacciones del hombre a los sismos dependen de numerosos factores, incluyendo la experiencia previa con movimientos del terreno. Los efectos en los edificios dependen del proyecto local y de los procedimientos de construcción. Parecen especialmente criticables las cláusulas que permiten asignar una intensidad a un sismo en regiones desiertas en función de la amplitud de las deformaciones permanentes, fallas de taludes o desplazamientos relativos del terreno, pues la zona de máxima intensidad no suele coincidir con fallas superficiales en que se acusan los deslizamientos relativos, y las fallas de taludes ocurren con frecuencia en ausencia de sismos.

A pesar de sus muchos inconvenientes, las escalas subjetivas de intensidad constituyen un elemento importante de juicio en áreas donde no se hayan instalado instrumentos para movimientos fuertes y suministran el único medio para interpretar la información histórica.

Con objeto de utilizar datos instrumentales y relacionarlos con las escalas subjetivas, también se han propuesto escalas instrumentales de in-

<sup>2</sup> Una escuela de sismólogos favorece sustituir las escalas de magnitud relativamente arbitrarias con el "momento sísmico" que se basa en conceptos físicos, y esta cantidad puede relacionarse directamente con el desprendimiento de energía (J. Brune y C. Lomintz, comunicación personal, 1969).

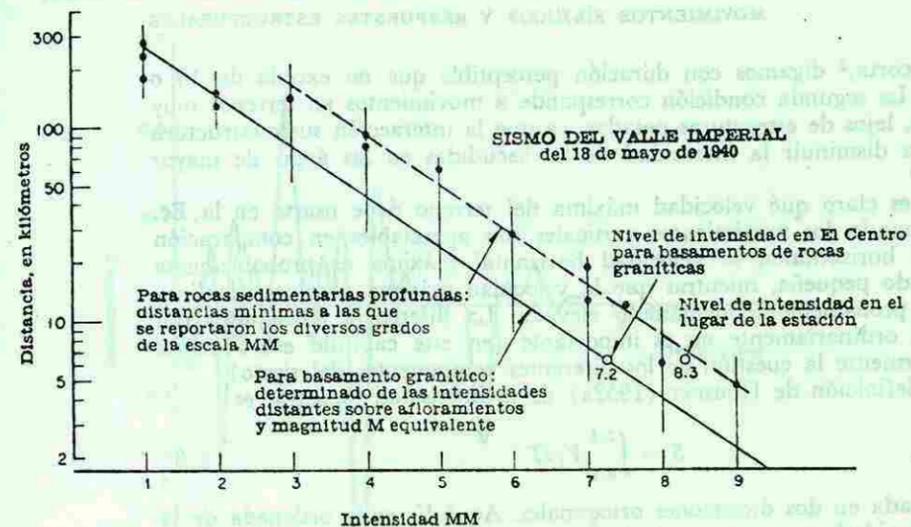


FIGURA 7.1. Gráfica distancia-intensidad para los sismos de California, con autorización de *Earthquake Intensity and Related Ground Motion*, por Frank Neuman, derechos registrados ©, 1954, por la University of Washington Press

tensidad. Las que se apoyan exclusivamente en la máxima aceleración del terreno o en la traza máxima de algún tipo de sismógrafo guardan poca relación con lo destructivo del movimiento del terreno. Las cosas mejoran algo si cuando menos se toma toscamente en cuenta la distancia focal. Se muestra en la figura 7.1 una correlación aproximada de este tipo (que probablemente es aplicable a los sismos de California, aunque no necesariamente a otras regiones del mundo).

Ya que la destructividad está directamente relacionada a la energía que el movimiento de la tierra transmite a los seres humanos y a las estructuras construidas por el hombre, puede esperarse una correlación mucho mejor, la cual se ha confirmado, con la máxima velocidad del terreno, o mejor todavía, con la ordenada media del espectro pseudovelocidad, como se describirá en los capítulos 15 y 17.

La siguiente expresión coincide razonablemente bien con las correlaciones propuestas (Esteve y Rosenblueth, 1964; Rosenblueth, 1964c) y comprobadas entre la intensidad  $I$  de la escala  $MM$  y la velocidad máxima del terreno  $v$  (cm/seg):

$$I = \frac{\log 14v}{\log 2} \quad (7.2)$$

En promedio, esta correlación es válida hasta  $I = 10$  y sobrestima  $I$  para intensidades mayores. Convendría modificar la escala  $MM$  para intensidades mayores que 10, de acuerdo con la ecuación.

Existen otras dos condiciones en que la Ec. 7.2 sobrestima la intensidad. Una corresponde a los movimientos del terreno con duración excepcional-

mente corta,<sup>3</sup> digamos con duración perceptible que no exceda de 10 o 15 seg. La segunda condición corresponde a movimientos en terrenos muy blandos, lejos de estructuras pesadas, ya que la interacción suelo-estructura tiende a disminuir la intensidad de las sacudidas en las áreas de mayor interés.<sup>4</sup>

No es claro qué velocidad máxima del terreno debe usarse en la Ec. 7.2. Cuando los movimientos verticales son apreciables en comparación con los horizontales, la velocidad horizontal máxima es probablemente demasiado pequeña, mientras que la velocidad máxima absoluta (inclinada) es probablemente demasiado elevada. La diferencia entre estos dos criterios ordinariamente no es importante (en este capítulo estudiaremos posteriormente la cuestión de los diferentes componentes del sismo).

La definición de Housner (1952a) de la intensidad espectral es

$$S = \int_{0.1}^{2.5} V_{\zeta} dT \quad (7.3)$$

promediada en dos direcciones ortogonales. Aquí  $V_{\zeta}$  es la ordenada de la pseudovelocity espectral en pies/seg, para un amortiguamiento  $\zeta$ , y  $T$  es el periodo natural en segundos.  $\zeta$  suele tomarse igual a 0.2 en la Ec. 7.3. Poniendo  $S$  en centímetros en lugar de pies y dividiendo entre el intervalo de integración, 2.4 seg, debe dar valores próximos a los de  $v$  que han de usarse en la Ec. 7.2 para obtener  $I$  en la escala  $MM$ , y sin el inconveniente del sesgo que en la Ec. 7.2 corresponde a los sismos de muy corta duración.

### 7.3 Tipos de ondas terrestres

Cualesquiera que sean las causas de los sismos, éstos generan dos tipos de ondas de cuerpo:  $P$  y  $S$  (sección 3.9). Debido a la diferencia de la velocidad de propagación de estas ondas, se podría esperar que los acelerogramas, a partir de cierta distancia focal, consistieran en dos trenes separados de oscilaciones, uno para cada tipo de onda. Mas tales acelerogramas son siempre muy complicados, y el tren de ondas  $S$  siempre empieza antes de que se hayan desvanecido las ondas  $P$ . Aun los acelerogramas de los movimientos generados por explosiones y los debidos a un solo golpe de un marro son bastante complejos (figuras 7.2 y 7.3). Indudablemente estas características de los movimientos fuertes del terreno deben atribuirse a reflejos y refracciones múltiples en interfases geológicas irregulares y a veces difusas.<sup>5</sup>

Un acelerograma típico (figura 7.4) contiene tres grupos principales de ondas o *fases*:  $P$ , o primaria;  $S$ , o secundaria, y  $L$ , u ondas superficiales, que incluyen las de Love, Rayleigh y otros tipos de ondas. En los acelerogramas de sismos destructivos, las ondas  $L$  generalmente se confunden con el final de la fase  $S$  porque las aceleraciones de las ondas  $L$  son ordinariamente muy pequeñas. Por otra parte, los sismogramas de telesismos se

<sup>3</sup> Encontramos un ejemplo en el sismo de San Salvador del 3 de mayo de 1965 (Rosenblueth y Prince, 1965).

<sup>4</sup> Ésta es la explicación más probable de las altas velocidades del terreno asociadas a algunos sismos de baja intensidad en la ciudad de México.

<sup>5</sup> La cuestión está bien expuesta por Bullen (1953) con base en el razonamiento de Jeffreys.

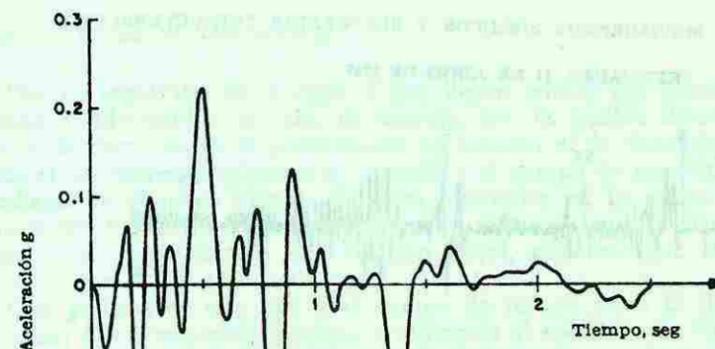


FIGURA 7.2. Acelerograma del movimiento del terreno generado por explosiones. Según Carder y Cloud (1959), reproducido por Housner (1961)



FIGURA 7.3. Acelerograma de los movimientos del terreno generados por un golpe de martillo de forja. Según Flygare (1955), reproducido por Housner (1962)

gramas de sismos destructivos, las ondas  $L$  generalmente se confunden con el final de la fase  $S$  porque las aceleraciones de las ondas  $L$  son ordinariamente muy pequeñas. Por otra parte, los sismogramas de telesismos se

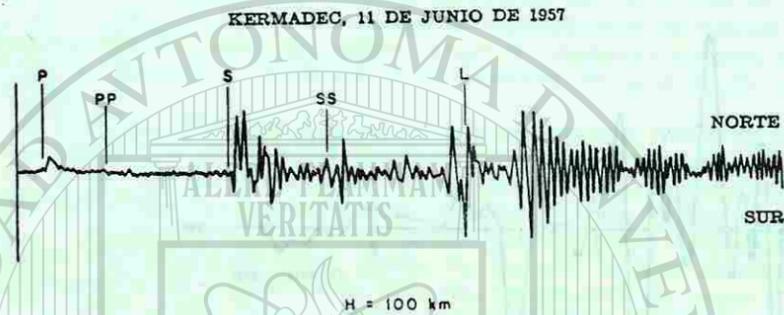


FIGURA 7.4. Acelerograma típico de un sismo. Adaptado de *Elementary Seismology*, por Charles F. Richter, W. H. Freeman and Company, derechos registrados ©, 1958

obtienen con instrumentos que amplifican mucho más los componentes de periodos largos que las porciones de alta frecuencia; además, como vimos en el capítulo 3, las ondas superficiales decaen aproximadamente como las perturbaciones cilíndricas y, por tanto, mucho más lentamente que las ondas de cuerpo, las cuales decaen esencialmente como ondas esféricas. En consecuencia, la fase *L* de los registros telesísmicos aparece en forma prominente con relación a las fases *P* y *S* (en la sismología moderna rara vez se hace mención de las tres fases en términos tan sobresimplificados. Dentro de cada fase se reconoce una gran variedad de ondas, y se haría injusticia a un registro de un sismo si se refiriese uno a menos de media docena de clases en la porción *L* solamente).



FIGURA 7.5. Curva simplificada de tiempo-recorrido para ondas *P*. Adaptado de *Elementary Seismology*, por Charles F. Richter, W. H. Freeman and Company, derechos registrados ©, 1958

52

Pueden registrarse los tiempos a que llegan señales del mismo evento sísmico a diferentes estaciones, de manera que es posible determinar el tiempo de recorrido de la perturbación en función de la distancia angular desde el epicentro. Empleando la distancia y el tiempo de recorrido correspondiente se obtienen curvas como las mostradas en la figura 7.5. La gráfica del tiempo de recorrido contra la distancia para ondas superficiales acusa esencialmente una relación lineal, mientras que las curvas de las ondas *P* y *S* son convexas.

Con gráficas de este tipo y el tiempo de retraso entre la llegada de las ondas *P* y *S* es posible localizar la distancia al epicentro de varias estaciones para un sismo dado. La intersección de los arcos circulares correspondientes sirve para localizar el epicentro (en realidad, un estudio de los sismogramas correspondientes a las tres direcciones ortogonales en una sola estación permite asimismo hacer un cálculo aproximado de la dirección en que se ubica el epicentro y estimar la profundidad focal).

La integración de las curvas de recorrido permite calcular las velocidades de las ondas en función de la profundidad. Los resultados de estos cálculos son las relaciones dibujadas en forma de gráfica en la figura 7.6.

	Profundidad, km	Velocidades, km/seg	
		$v_p$	$v_s$
SUPERFICIE	0	5	3
Corteza continental		6	3.5
DISCONTINUIDAD DE MOHOROVICIC	30*	7.2	4.2
		8.2	4.5
Manto			
	2 900	13.5	8
Núcleo			
	5 000	10	-
Núcleo interior			
CENTRO	6 370	11.5	?

\* La profundidad de la discontinuidad de Mohorovicic difiere grandemente de región a región y puede llegar a ser el doble de la que se da en la tabla.

FIGURA 7.6. Variación de las velocidades de onda con la profundidad. Adaptado de *Elementary Seismology*, por Charles F. Richter, W. H. Freeman and Company, derechos registrados ©, 1958

53

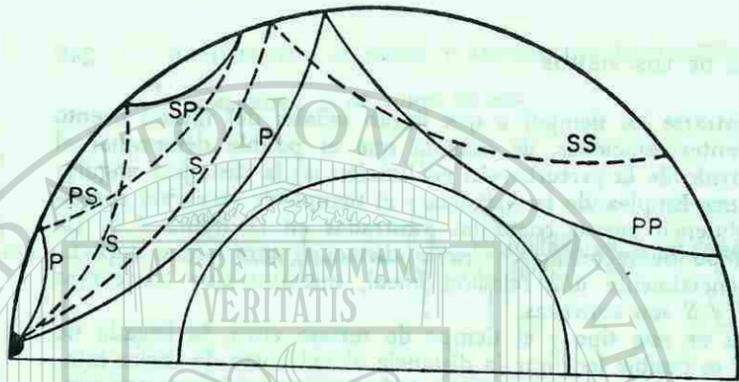


FIGURA 7.7. Reflejos en la superficie de la tierra. Adaptado de *Elementary Seismology*, por Charles F. Richter, W. H. Freeman and Company, derechos registrados ©, 1958

Los cambios bruscos en las velocidades a ciertas profundidades marcan interfases entre las capas principales dentro de la tierra.

Los reflejos más conspicuos se producen en la superficie de la tierra. En este tipo de reflejos una onda *P* puede generar tanto ondas *P* como *S*, llamadas ondas *PP* y *PS* respectivamente (figura 7.7). Análogamente, al reflejarse una onda incidente *S* puede producir ondas *P* y *S*, respectivamente llamadas *SP* y *SS*.

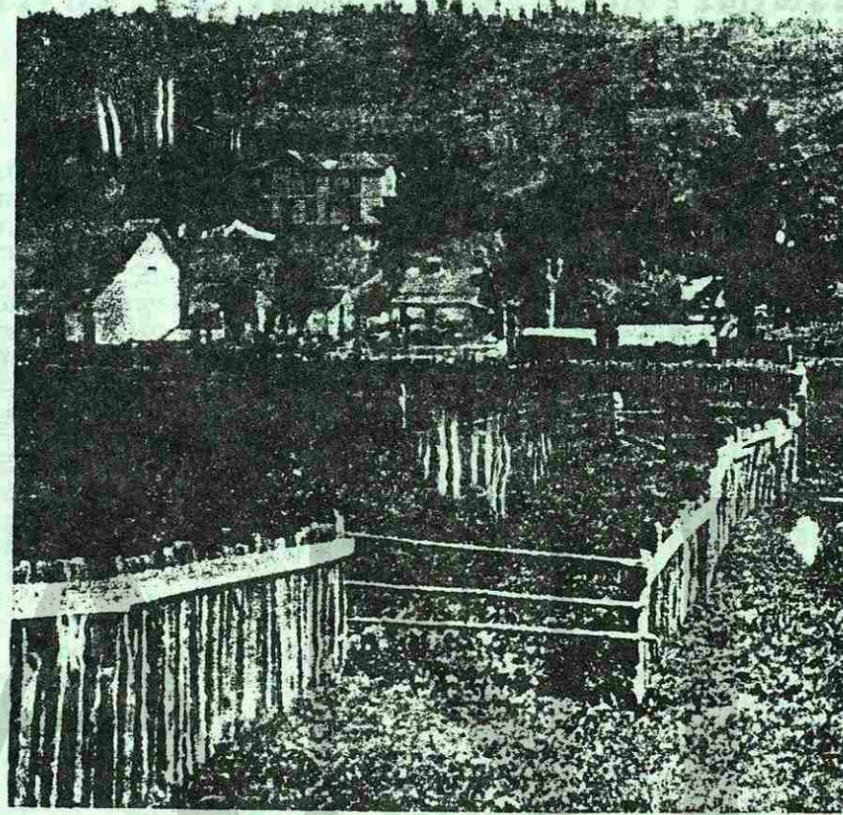
Los efectos de reflexión y refracción de las ondas sísmicas crean una zona de sombras (figura 7.7) entre las distancias de 105° a 142°. En esta región prácticamente no se registran ondas *P* ni *S*. El fenómeno, aunado al estudio de las ondas reflejadas, ha llevado a la conclusión de que la tierra contiene un núcleo líquido, capaz de reflejar ondas *P* y *S* y de refractar las *P*.

El símbolo *c* se usa para indicar un reflejo en la frontera del núcleo y el *K* para indicar aquella parte de la onda que se refracta a través del núcleo. Así, una onda *PcS* es una *P* que ha bajado a la frontera del núcleo y se ha reflejado como onda *S*. *PKS* es una onda *P* que se ha refractado dentro del núcleo y refractado de nuevo a través del manto convirtiéndose en la onda *S*, como finalmente emerge.

Nunca se ha observado que las ondas *S* pasen a través del núcleo. Ésta es la razón principal para creer que el núcleo es líquido, pues los fluidos no transmiten ondas de corte.

Existen pruebas de que la región más próxima al centro de la tierra, llamada núcleo interior, es bastante rígida y de que puede transmitir ondas *S*. Se usa el símbolo *I* para referirse a las ondas *P* del núcleo interior.

Los datos sismológicos han servido para inferir conclusiones respecto a la estructura de la tierra. Así se ha descubierto una discontinuidad en que la velocidad de la onda *P* salta de 6.4 y 6.7 km/seg a 8.1 y 8.2 km/seg (figura 7.8). Se la ha bautizado con el nombre de su descubridor, Mohorovičić (Moho), y define la frontera inferior de la propia corteza. El espesor de la corteza así definida es de unos 5 km bajo los océanos y 35 km bajo los continentes.



La desviación de la cerca muestra el movimiento de 260 m que ocurrió lateralmente en la falla de San Andrés cerca de Woodville en el condado Marin al norte de San Francisco. Nótese que no están destruidas las estructuras y marcos de madera al fondo de la foto. Temblor de San Francisco de 1906. K. Gilbert Photo.

#### APENDICE 1.1 Escala de Mercalli modificada

La escala mejorada de intensidades de Mercalli (1902) sirvió de base a la escala propuesta por Wood y Neumann (1931), conocida como la escala de Mercalli modificada y comúnmente abreviada MM. La versión modificada se describe a continuación con algunas mejoras por Richter (1958). Las siguientes notas son tomadas casi al pie de la letra de *Elementary Seismology* por Charles F. Richter (W. H. Freeman and Company, San Francisco, © 1958).

Para eliminar muchas repeticiones verbales en la escala original, se ha adoptado el siguiente acuerdo. Cada efecto se nombra con aquel nivel de intensidad con el que aparece primero frecuente y característicamente. Cada efecto puede encontrarse menos fuerte o, en menos casos, en el siguiente grado inferior de intensidad; más fuerte o, en más casos, en el siguiente grado superior. Unos pocos efectos se nombran en dos niveles sucesivos para indicar un incremento más gradual.

**Mampostería A, B, C, D.** Para evitar ambigüedad en el lenguaje, la calidad de la mampostería, tabiques u otro tipo, se especifica con las siguientes letras (que no tienen conexión con la construcción común Clase A, B y C).

**Mampostería A.** Buena mano de obra, mortero y diseño; reforzada, en especial, lateralmente y unida utilizando concreto, acero, etc.; diseñada para resistir fuerzas laterales.

**Mampostería B.** Buena mano de obra y mortero; reforzada pero no diseñada en detalle para resistir fuerzas laterales.

**Mampostería C.** Mano de obra y mortero ordinario; sin puntos débiles en el extremo como falta de unión en esquinas, pero no reforzada ni diseñada contra fuerzas horizontales.

**Mampostería D.** Materiales débiles como adobe; mortero pobre; baja calidad de la mano de obra, horizontalmente débil.

Escala de intensidades de Mercalli modificada de 1931 (abreviada y reescrita por C. F. Richter).\*

1. No percibido. Marginal y período largo de grandes sismos.
2. Percibido por personas en reposo, en pisos superiores o favorablemente colocadas.
3. Percibido en interiores. Los objetos suspendidos oscilan, hay vibraciones como si pasaran camiones ligeros. Duración estimada. Puede no ser reconocido como un sismo.

4. Los objetos suspendidos oscilan. Se perciben vibraciones como si pasaran camiones pesados o sensación de una sacudida como si una pelota pesada golpeará las paredes. Los vehículos en reposo oscilan. Las ventanas, los platos y las puertas resacaen. Los vasos tiemblan.

5. Se percibe en el exterior; dirección estimada. Se despierta la gente. Se perturba el reposo de los líquidos; algunos se derraman. Objetos pequeños inestables se desplazan o se voltean. Las puertas oscilan, se abren y se cierran. Las persianas y los cuadros se mueven. Los relojes de péndulo se detienen, se ponen en marcha, cambian su ritmo.

6. Es percibido por todos: muchos se asustan y echan a correr hacia el exterior. Las personas caminan tambaleándose. Las ventanas y los platos se rompen. Los libros se caen de los libreros. Los cuadros se desploman de las paredes. Los muebles se mueven o se voltean. El enyesado débil y mampostería D se agrietan. Las campanas pequeñas (iglesias, escuelas) tañen. Los árboles, arbustos son sacudidos visiblemente o se oye el murmullo de sus hojas.

7. Difícil mantenerse en pie. Percibido por choferes. Los objetos colgantes vibran. Los muebles se rompen. Daño a mampostería D, aparecen grietas. Las chimeneas débiles se rompen en la línea del techo. Caen el yeso, se aflojan ladrillos, piedras, tejas, cornisas, parapetos no afianzados y ornamentos arquitectónicos. Aparecen algunas grietas en mampostería C. Se forman olas en estanques; agua turbia con lodo. Hay pequeños derrumbes y deslizamientos en taludes de arena o grava. Las campanas grandes tañen. Los canales de concreto de irrigación se dañan.

8. Dirección del auto afectada. Daño a mampostería C; colapso parcial. Algunos daños a mampostería B; ninguno al tipo A. Caída de estuco y algunos muros de mampostería. Torcimiento y caída de chimeneas, monumentos, torres, tanques elevados. Los marcos de casas habitación se mueven sobre la cimentación si no se anclan; los paneles de muros sueltos se desprenden. Los pilotes deteriorados se rompen. Las ramas de los árboles se desprenden. Hay cambios en flujo o temperatura de manantiales y pozos. Aparecen grietas en terreno húmedo y taludes empinados.

9. Pánico general. Mampostería D destruida; mampostería C seriamente dañada, a veces con colapso completo; mampostería B seriamente dañada. Daños generales en cimentaciones. Los marcos de estructuras no anclados, levantados de la cimentación. Marcos llevados por el viento. Grietas visibles en el suelo. En áreas aluviales se expulsan arena y lodo, se forman manantiales sísmicos y cráteres de arena.

10. La mayor parte de las estructuras de mampostería destruidas con sus cimentaciones. Algunas estructuras bien construidas y puentes de madera destruidos. Serios daños a presas, diques, terraplenes. Hay grandes derrumbes. El agua es arrojada sobre los bordos de canales, ríos, lagos, etc. La arena y el lodo son desplazados horizontalmente en playas y terreno plano. Los rieles se doblan ligeramente.

11. Rieles muy doblados. Las tuberías subterráneas quedan completamente fuera de servicio.

12. Daño casi total. Grandes deformaciones permanentes en estructuras de mampostería.

## Espectros de temblores y su aplicación

JORGE PRINCE \*

Los daños sufridos por las construcciones como consecuencia de un temblor son solamente la culminación de un complicado proceso que se inicia en el mismo momento que el movimiento sísmico. Sin embargo, la espectacularidad de los daños y de los efectos inmediatos, como el pánico de la población, concentra la atención en esos aspectos y relega a un plano secundario la importancia de las diversas etapas del proceso en sí.

El estudio y conocimiento de esas etapas constituye uno de los objetos de la Ingeniería Sísmica; su fin es permitir que construcciones de todas clases sean proyectadas y construidas cada vez con mayor economía y seguridad, a la luz de los nuevos descubrimientos en ese campo. Continuamente se logran avances relacionados con el comportamiento de las estructuras ante la acción de los temblores, y en muchos casos encuentran rápida aplicación en la práctica.

La utilización de los avances conseguidos requiere del conocimiento completo de las condiciones locales, en lo que se refiere a materiales y tipos de construcción, influencia de la geología regional, determinación de epicentros, etc. Por esta razón, en México se han iniciado desde hace tiempo diversos estudios encaminados a mejorar estos conocimientos. Este trabajo se referirá concretamente a algunos conceptos relacionados con la ocurrencia de temblores, señalando los beneficios obtenidos de su estudio, así como los medios empleados para llevar a cabo tales estudios.

### IMPORTANCIA DEL PROBLEMA SISMICO EN MEXICO

Se denomina Cinturón Circumpacífico a la zona relativamente angosta que rodea al Océano Pacífico, extendiéndose desde Nueva Zelanda hasta Chile como se muestra en la fig. 1.

A grandes rasgos comprende numerosas islas del Pacífico Sud-occidental, Nueva Guinea, Filipinas, Japón, la península de Kamchatka y las islas Aleutianas. Finalmente abarca toda la costa oeste del Continente Americano. Es

\* Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

notable en el mundo por su gran actividad sísmica.

Nuestro país forma parte destacada de esa zona ya que... "en lo referente a temblores de origen a poca profundidad, la sismicidad de la región central de la costa mexicana del Pacífico es la más alta del Hemisferio Occidental". Esta aseveración queda justificada por el número de temblores registrados por el Servicio Sismológico durante los primeros cincuenta años de operación (1909-1959), que asciende a 18,211<sup>2</sup> es decir, un promedio muy cercano a uno por día. Desde luego, un gran porcentaje de ellos han sido de intensidad tan leve que sólo los instrumentos de estaciones sismológicas pudieron percibirlos, o bien fueron sentidos por unas cuantas personas en situaciones favorables. Si se consideran únicamente aquellos de intensidad superior a II (MM)<sup>3</sup> se cuentan 520, es decir, un promedio algo superior a 10 por año. Entre ellos, a 48 se les atribuyó una intensidad de V o mayor, o sea que durante el período mencionado se sintió prácticamente cada año, en el país, un temblor que puede considerarse como fuerte.

Esta frecuencia y la improbabilidad de que disminuya en el futuro, explican la necesidad que hay en México de lograr una mejor comprensión del mecanismo sísmico. Además, no debe olvidarse que nuestro país está expuesto a temblores mucho más fuertes que los ocurridos hasta ahora. El monto oficial de los daños en julio de 1957 fue inferior a 30 millones de dólares y el número de víctimas fue 71; en 1923 en Tokio las pérdidas llegaron a 2.500 millones de dólares, 100,000 muertos y 43,000 desaparecidos.

### DE LA INTENSIDAD Y REGISTRO DE LOS SISMOS

La intensidad de un temblor se indica mediante un grado de una de las varias escalas

<sup>1</sup> B. Gutenberg y C. F. Richter, "Seismicity of the Earth", 2a. edic., Princeton University Press (Princeton, New Jersey, 1954), p. 36.

<sup>2</sup> J. Figueroa, "Carta sísmica de la República Mexicana", *Anales del Instituto de Geofísica*, UNAM, Vol. 5, 1959, pp. 59 y 127.

<sup>3</sup> Escala de Mercalli Modificada.

#### APENDICE 1.1 Escala de Mercalli modificada

La escala mejorada de intensidades de Mercalli (1902) sirvió de base a la escala propuesta por Wood y Neumann (1931), conocida como la escala de Mercalli modificada y comúnmente abreviada MM. La versión modificada se describe a continuación con algunas mejoras por Richter (1958). Las siguientes notas son tomadas casi al pie de la letra de *Elementary Seismology* por Charles F. Richter (W. H. Freeman and Company, San Francisco, © 1958).

Para eliminar muchas repeticiones verbales en la escala original, se ha adoptado el siguiente acuerdo. Cada efecto se nombra con aquel nivel de intensidad con el que aparece primero frecuente y característicamente. Cada efecto puede encontrarse menos fuerte o, en menos casos, en el siguiente grado inferior de intensidad; más fuerte o, en más casos, en el siguiente grado superior. Unos pocos efectos se nombran en dos niveles sucesivos para indicar un incremento más gradual.

**Mampostería A, B, C, D.** Para evitar ambigüedad en el lenguaje, la calidad de la mampostería, tabiques u otro tipo, se especifica con las siguientes letras (que no tienen conexión con la construcción común Clase A, B y C).

**Mampostería A.** Buena mano de obra, mortero y diseño; reforzada, en especial, lateralmente y unida utilizando concreto, acero, etc.; diseñada para resistir fuerzas laterales.

**Mampostería B.** Buena mano de obra y mortero; reforzada pero no diseñada en detalle para resistir fuerzas laterales.

**Mampostería C.** Mano de obra y mortero ordinario; sin puntos débiles en el extremo como falta de unión en esquinas, pero no reforzada ni diseñada contra fuerzas horizontales.

**Mampostería D.** Materiales débiles como adobe; mortero pobre; baja calidad de la mano de obra, horizontalmente débil.

Escala de intensidades de Mercalli modificada de 1931 (abreviada y reescrita por C. F. Richter).\*

1. No percibido. Marginal y período largo de grandes sismos.
2. Percibido por personas en reposo, en pisos superiores o favorablemente colocadas.
3. Percibido en interiores. Los objetos suspendidos oscilan, hay vibraciones como si pasaran camiones ligeros. Duración estimada. Puede no ser reconocido como un sismo.

4. Los objetos suspendidos oscilan. Se perciben vibraciones como si pasaran camiones pesados o sensación de una sacudida como si una pelota pesada golpeará las paredes. Los vehículos en reposo oscilan. Las ventanas, los platos y las puertas resacaen. Los vasos tiemblan.

5. Se percibe en el exterior; dirección estimada. Se despierta la gente. Se perturba el reposo de los líquidos; algunos se derraman. Objetos pequeños inestables se desplazan o se voltean. Las puertas oscilan, se abren y se cierran. Las persianas y los cuadros se mueven. Los relojes de péndulo se detienen, se ponen en marcha, cambian su ritmo.

6. Es percibido por todos: muchos se asustan y echan a correr hacia el exterior. Las personas caminan tambaleándose. Las ventanas y los platos se rompen. Los libros se caen de los libreros. Los cuadros se desploman de las paredes. Los muebles se mueven o se voltean. El enyesado débil y mampostería D se agrietan. Las campanas pequeñas (iglesias, escuelas) tañen. Los árboles, arbustos son sacudidos visiblemente o se oye el murmullo de sus hojas.

7. Difícil mantenerse en pie. Percibido por choferes. Los objetos colgantes vibran. Los muebles se rompen. Daño a mampostería D, aparecen grietas. Las chimeneas débiles se rompen en la línea del techo. Caen el yeso, se aflojan ladrillos, piedras, tejas, cornisas, parapetos no afianzados y ornamentos arquitectónicos. Aparecen algunas grietas en mampostería C. Se forman olas en estanques; agua turbia con lodo. Hay pequeños derrumbes y deslizamientos en taludes de arena o grava. Las campanas grandes tañen. Los canales de concreto de irrigación se dañan.

8. Dirección del auto afectada. Daño a mampostería C; colapso parcial. Algunos daños a mampostería B; ninguno al tipo A. Caída de estuco y algunos muros de mampostería. Torcimiento y caída de chimeneas, monumentos, torres, tanques elevados. Los marcos de casas habitación se mueven sobre la cimentación si no se anclan; los paneles de muros sueltos se desprenden. Los pilotes deteriorados se rompen. Las ramas de los árboles se desprenden. Hay cambios en flujo o temperatura de manantiales y pozos. Aparecen grietas en terreno húmedo y taludes empinados.

9. Pánico general. Mampostería D destruida; mampostería C seriamente dañada, a veces con colapso completo; mampostería B seriamente dañada. Daños generales en cimentaciones. Los marcos de estructuras no anclados, levantados de la cimentación. Marcos llevados por el viento. Grietas visibles en el suelo. En áreas aluviales se expulsan arena y lodo, se forman manantiales sísmicos y cráteres de arena.

10. La mayor parte de las estructuras de mampostería destruidas con sus cimentaciones. Algunas estructuras bien construidas y puentes de madera destruidos. Serios daños a presas, diques, terraplenes. Hay grandes derrumbes. El agua es arrojada sobre los bordos de canales, ríos, lagos, etc. La arena y el lodo son desplazados horizontalmente en playas y terreno plano. Los rieles se doblan ligeramente.

11. Rieles muy doblados. Las tuberías subterráneas quedan completamente fuera de servicio.

12. Daño casi total. Grandes deformaciones permanentes en estructuras de mampostería.

## Espectros de temblores y su aplicación

JORGE PRINCE \*

Los daños sufridos por las construcciones como consecuencia de un temblor son solamente la culminación de un complicado proceso que se inicia en el mismo momento que el movimiento sísmico. Sin embargo, la espectacularidad de los daños y de los efectos inmediatos, como el pánico de la población, concentra la atención en esos aspectos y relega a un plano secundario la importancia de las diversas etapas del proceso en sí.

El estudio y conocimiento de esas etapas constituye uno de los objetos de la Ingeniería Sísmica; su fin es permitir que construcciones de todas clases sean proyectadas y construidas cada vez con mayor economía y seguridad, a la luz de los nuevos descubrimientos en ese campo. Continuamente se logran avances relacionados con el comportamiento de las estructuras ante la acción de los temblores, y en muchos casos encuentran rápida aplicación en la práctica.

La utilización de los avances conseguidos requiere del conocimiento completo de las condiciones locales, en lo que se refiere a materiales y tipos de construcción, influencia de la geología regional, determinación de epicentros, etc. Por esta razón, en México se han iniciado desde hace tiempo diversos estudios encaminados a mejorar estos conocimientos. Este trabajo se referirá concretamente a algunos conceptos relacionados con la ocurrencia de temblores, señalando los beneficios obtenidos de su estudio, así como los medios empleados para llevar a cabo tales estudios.

### IMPORTANCIA DEL PROBLEMA SISMICO EN MEXICO

Se denomina Cinturón Circumpacífico a la zona relativamente angosta que rodea al Océano Pacífico, extendiéndose desde Nueva Zelanda hasta Chile como se muestra en la fig. 1.

A grandes rasgos comprende numerosas islas del Pacífico Sud-occidental, Nueva Guinea, Filipinas, Japón, la península de Kamchatka y las islas Aleutianas. Finalmente abarca toda la costa oeste del Continente Americano. Es

\* Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

notable en el mundo por su gran actividad sísmica.

Nuestro país forma parte destacada de esa zona ya que... "en lo referente a temblores de origen a poca profundidad, la sismicidad de la región central de la costa mexicana del Pacífico es la más alta del Hemisferio Occidental". Esta aseveración queda justificada por el número de temblores registrados por el Servicio Sismológico durante los primeros cincuenta años de operación (1909-1959), que asciende a 18,211<sup>2</sup> es decir, un promedio muy cercano a uno por día. Desde luego, un gran porcentaje de ellos han sido de intensidad tan leve que sólo los instrumentos de estaciones sismológicas pudieron percibirlos, o bien fueron sentidos por unas cuantas personas en situaciones favorables. Si se consideran únicamente aquellos de intensidad superior a II (MM)<sup>3</sup> se cuentan 520, es decir, un promedio algo superior a 10 por año. Entre ellos, a 48 se les atribuyó una intensidad de V o mayor, o sea que durante el período mencionado se sintió prácticamente cada año, en el país, un temblor que puede considerarse como fuerte.

Esta frecuencia y la improbabilidad de que disminuya en el futuro, explican la necesidad que hay en México de lograr una mejor comprensión del mecanismo sísmico. Además, no debe olvidarse que nuestro país está expuesto a temblores mucho más fuertes que los ocurridos hasta ahora. El monto oficial de los daños en julio de 1957 fue inferior a 30 millones de dólares y el número de víctimas fue 71; en 1923 en Tokio las pérdidas llegaron a 2.500 millones de dólares, 100,000 muertos y 43,000 desaparecidos.

### DE LA INTENSIDAD Y REGISTRO DE LOS SISMOS

La intensidad de un temblor se indica mediante un grado de una de las varias escalas

<sup>1</sup> B. Gutenberg y C. F. Richter, "Seismicity of the Earth", 2a. edic., Princeton University Press (Princeton, New Jersey, 1954), p. 36.

<sup>2</sup> J. Figueroa, "Carta sísmica de la República Mexicana", *Anales del Instituto de Geofísica*, UNAM, Vol. 5, 1959, pp. 59 y 127.

<sup>3</sup> Escala de Mercalli Modificada.

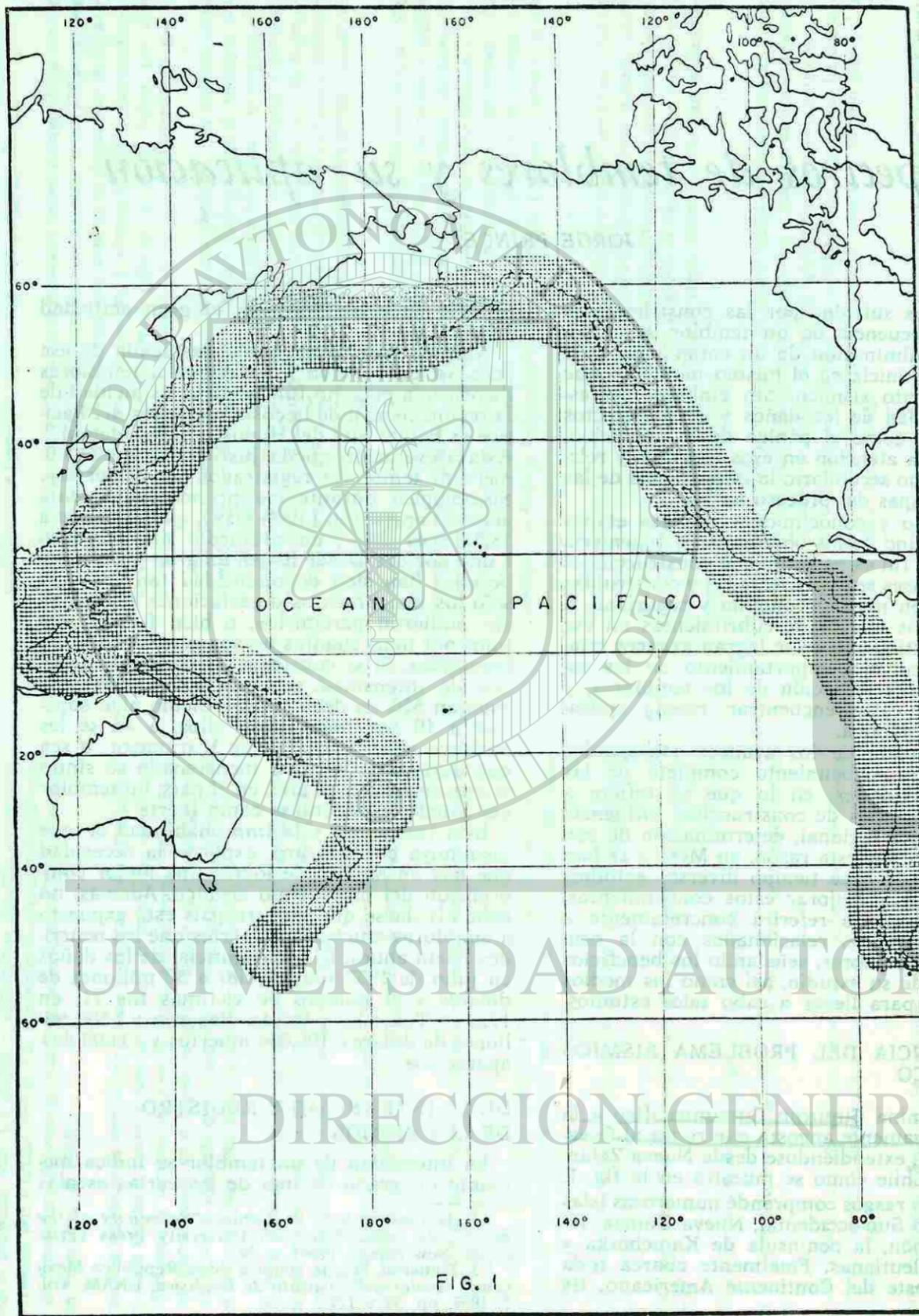


FIG. 1

existentes. Las más usuales basan su graduación principalmente en el efecto que el temblor produce en las personas y en los daños que, apreciativamente, sufren las construcciones más o menos típicas, es decir, son escalas puramente subjetivas.

En consecuencia, la intensidad atribuida a un temblor no proporciona ninguna de las características con que es posible definir cuantitativamente el movimiento mismo: aceleración, velocidad, desplazamiento, dirección, duración, etc.

Para obtener dichas características es necesario el empleo de instrumentos diferentes de aquellos que se utilizan en estaciones sismológicas. Estos sismógrafos no son construidos para el registro de movimientos fuertes, sino que son de alta sensibilidad, lo que permite captar movimientos sísmicos originados a gran distancia para estudios de índole totalmente diferente. Por tanto, decir que "se saltaron las agujas" no significa que el instrumento haya fallado sino que cuenta con un mecanismo de protección que actúa al exceder el movimiento un cierto límite o que, simplemente, la línea sale del registro.

Para obtener registros completos se han diseñado aparatos menos sensibles denominados "acelerógrafos", capaces de registrar movimientos de gran violencia. Han sido usados extensamente en Japón y Estados Unidos desde hace más de 25 años, al hacerse patente la necesidad de conocer los sismos en toda su duración. Por lo expuesto, sería razonable preguntarse lo siguiente: ¿Cuáles son las ventajas de obtener esos registros si los temblores que sigan no serán iguales a los ya ocurridos?

Debido a las modificaciones que sufren las ondas sísmicas al recorrer la corteza terrestre desde donde se originaron y a la influencia del suelo de cada lugar, temblores sucesivos, con ondas sísmicas diferentes, presentan características comunes que interesa conocer, pues indican en términos generales cómo se mueve el suelo durante cualquier temblor.

#### FACTORES QUE DETERMINAN EL EFECTO DE UN SISMO

Los efectos de un temblor sobre una cierta estructura dependen de los factores siguientes:

- 1° Las características de la estructura misma.
- 2° Las características de las ondas que lleguen.
- 3° La naturaleza del suelo en el lugar.

Al mencionar las características de la estructura, conviene hacer notar que la gran variedad de formas de edificación y de materiales usados contribuyen al conocimiento incompleto de lo que ocurre en un edificio en particular, al sujetarlo a movimientos más o menos re-

peninos de su base. Sólo las formas más simples se pueden analizar sin gran dificultad en un tiempo razonable; la disposición irregular de sus elementos complica en grado extremo el análisis.

Por su parte los materiales constituyen otra incógnita de importancia; en general, sus propiedades varían de un caso a otro y dependen del tipo de cargas a que se sometan. A esto se debe, en parte, el hecho observado con frecuencia de que dos edificios aparentemente iguales sufran daños de muy diversa importancia bajo la acción de un temblor.

Es conveniente tratar en forma conjunta para los fines de este trabajo, los dos últimos factores mencionados, es decir, las características de las ondas sísmicas y la naturaleza del suelo, ya que las propiedades del subsuelo tienen una notable influencia sobre las ondas sísmicas que lo atraviesan. Un mismo temblor puede hacerse sentir con mayor fuerza y duración en terreno blando que en terreno duro; si el cambio en las propiedades del subsuelo es brusco, la diferencia puede ser importante aún a la distancia de 100 metros.

El estudio del efecto combinado de estos dos factores es de mayor utilidad que el de cada uno por separado, ya que en esta forma es posible obtener las características comunes, mencionadas antes, de diferentes temblores en un mismo lugar. Estas características comunes las proporcionan los registros de temblores. Como la información que se obtiene de cada registro es exclusiva del lugar, será de más extensa aplicación cuanto mayor sea el área en que se conserven las mismas propiedades del subsuelo. Si se considera el caso de la ciudad de México, sería de gran utilidad para la construcción conocer la influencia de los cambios de las propiedades del subsuelo en diferentes puntos de la ciudad. De acuerdo con lo expuesto, estos resultados no serían aplicables en Acapulco, por ejemplo, donde las condiciones locales son enteramente diferentes.

Podemos resumir diciendo que el efecto combinado de las ondas sísmicas y naturaleza del suelo se obtiene de registros completos de temblores.

Existe un método que permite estudiar el efecto simultáneo de los tres factores: los dos mencionados en el párrafo anterior y las características de la estructura. Su publicación en 1932 por M. Biot dio a la Ingeniería Sísmica una de sus herramientas más valiosas. Con este método se obtiene una característica intrínseca de cada temblor que se denomina espectro de respuesta. Para proceder a su descripción es necesario introducir algunos conceptos auxiliares.

#### PERIODOS DE OSCILACION

Todas las características de una estructura como peso, dimensiones, etc., pueden combi-

narse en tal forma que la estructura quede definida por las propiedades de sus oscilaciones libres, siendo la principal su *periodo de oscilación*, o sea, *el tiempo que tarda en efectuar una oscilación completa*. En esta forma puede representarse cualquier estructura por medio de sus periodos de oscilación únicamente.

Ahora bien, un edificio de varios pisos no tiene un solo periodo de oscilación. Si suponemos movimiento en *una sola dirección*, por ejemplo transversal, tendrá tantos periodos como pisos, todos diferentes entre si. Si se consideran dos direcciones, longitudinal y transversal, tendrá dos por cada piso. El hecho de que un edificio de dos pisos tenga en una dirección dos periodos de oscilación diferentes, se puede comprobar fácilmente mediante una pieza de madera o metal que sea bastante flexible.

Esta varilla, fig. 2a, representará al edificio, fig. 2A. Si se sostiene por un extremo y se mueve como lo indican las flechas de la figura, se observará lo siguiente:

- 1º Si el movimiento es relativamente lento, oscilará del modo representado en (b).
- 2º Si se aumenta la rapidez del movimiento, oscilará como se indica en (c). Las oscilaciones equivalentes del edificio se presentan en (B) y (C) de la misma figura.

Es decir, cada modo de vibrar de la varilla tiene su propio periodo de oscilación y el mo-

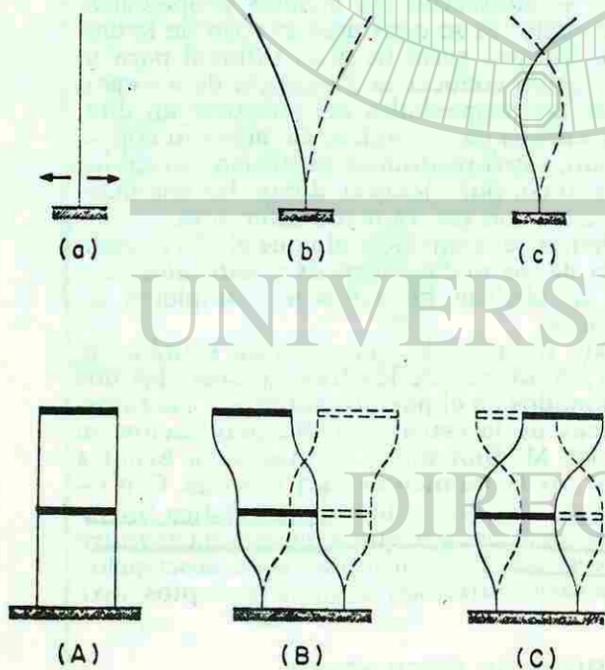


FIG. 2

do (c) tendrá un periodo más corto que el (b). Lo que sucede en el edificio es análogo y puede extenderse a varios pisos y direcciones.

Si el movimiento aplicado a la base de la estructura produce una vibración como (B) en la figura, el efecto será diferente que si produce una vibración como (C). En general un temblor produce los dos simultáneamente, pero los dos efectos separados se pueden combinar obteniéndose el efecto total.

Con estos antecedentes pasamos a comentar los espectros de respuesta.

### ESPECTROS DE RESPUESTA

Desde el punto de vista de la construcción podemos definir espectro de respuesta de un temblor como la gráfica que relaciona periodos de oscilación de varias estructuras de un piso con el *efecto máximo que produce en cada una de ellas un movimiento conocido de su base* (fig. 3).



FIG. 3

Como lo indica esta figura, el efecto considerado para el trazo del espectro puede ser aceleración, velocidad, etc.

De acuerdo con nuestra definición de espectro, estas gráficas relacionan entre sí los tres factores que determinan el efecto de un temblor en una estructura, agrupados como sigue:

- 1) Las características de la estructura, expresadas como periodos de oscilación, y
- 2) Las características de las ondas sísmicas en combinación con la influencia de la naturaleza del terreno, lo que se obtiene de los registros de temblores.

Se hace notar que los espectros son también aplicables a estructuras de varios pisos aun cuando la definición se refiere a un solo piso; los diversos periodos de un edificio (tantos como pisos en una dirección) se consideran por separado. En otras palabras, para el uso del espectro, el edificio de varios pisos se descompone en varios edificios de un piso, cada uno con periodo igual a uno de los periodos de la estructura original.

Daremos a continuación varios ejemplos de diferentes interpretaciones que tiene el espectro. Refiriéndonos a la fig. 3, que presenta un caso hipotético, podemos observar lo siguiente:

- a) El espectro comprende a *todos* los edificios que se quiera, *definidos por sus periodos de oscilación*, siempre que el movimiento de la base haya sido el mismo para todos ellos.
- b) Si se consideran dos construcciones A y B de la misma clase y de un piso, cuyos periodos son 1.0 y 2.0 segundos respectivamente, el espectro indica que el "efecto" será doble en A que en B.
- c) Si un edificio de varios pisos tiene periodos de oscilación de 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0 segundos, el "efecto" a que se refiere el espectro puede tomarse de la gráfica para cada uno de esos valores y combinarse para obtener el efecto total.

Los espectros de los temblores proporcionan el medio más eficaz que se conoce actualmente para el diseño adecuado de toda clase de construcciones en zonas afectadas por movimientos sísmicos. Como su empleo en la práctica exige el registro de temblores, la aplicación del método descrito está más desarrollada en los países donde se han instalado mayor número de registradores. En el nuestro está aún en sus primeras etapas ya que se cuenta con acelerógrafos únicamente en la ciudad de México y su instalación fue posterior al temblor de 1957.

### AMORTIGUAMIENTO

Más adelante se mencionan espectros calculados a partir de registros de temblores ocurridos. Su tratamiento hace necesario introducir un concepto de amortiguamiento que constituye otra de las características de las estructuras cuya importancia es fundamental para estudiar el comportamiento de la estructura bajo la acción sísmica.

Se entiende por *amortiguamiento* la capacidad de una estructura para disipar una parte de la energía que el sismo le comunica; es decir, esta parte de la energía total no se transforma en movimiento de la estructura sino que se pierde, transformándose principalmente en calor.

El amortiguamiento proviene de las fuerzas que se oponen al movimiento, como son la *resistencia del aire*, las *fuerzas de fricción* en las diversas superficies de contacto entre partes de la estructura, la *fricción interna* de los materiales, así como de la devolución de energía al terreno.

El grado de amortiguamiento es diferente en cada estructura. Conviene por tanto adoptar una unidad de medida del amortiguamiento que permita comparar directamente el de diversas construcciones. A ello obedece que

suela expresarse el amortiguamiento como una fracción de la unidad denominada *amortiguamiento crítico*.

Supongamos un sistema oscilatorio constituido por un péndulo simple como muestra la fig. 4a.

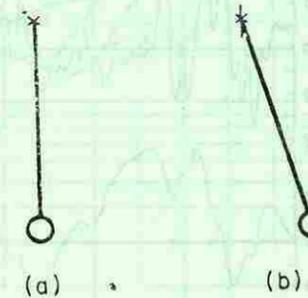


FIG. 4

En la fig. 4b se muestra el mismo péndulo que ha sido desplazado hasta una posición desde la que se le deja oscilar libremente. Puesto que en este caso únicamente la resistencia del aire se opone al movimiento, el número de oscilaciones del péndulo, hasta llegar a su posición de equilibrio, será considerable si se compara con el número de oscilaciones del mismo péndulo sumergido parcialmente en un líquido, como se muestra en la fig. 5.

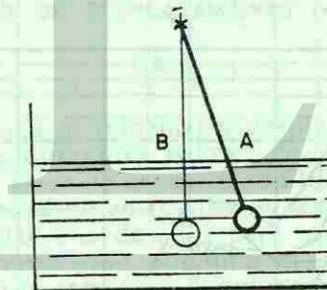


FIG. 5

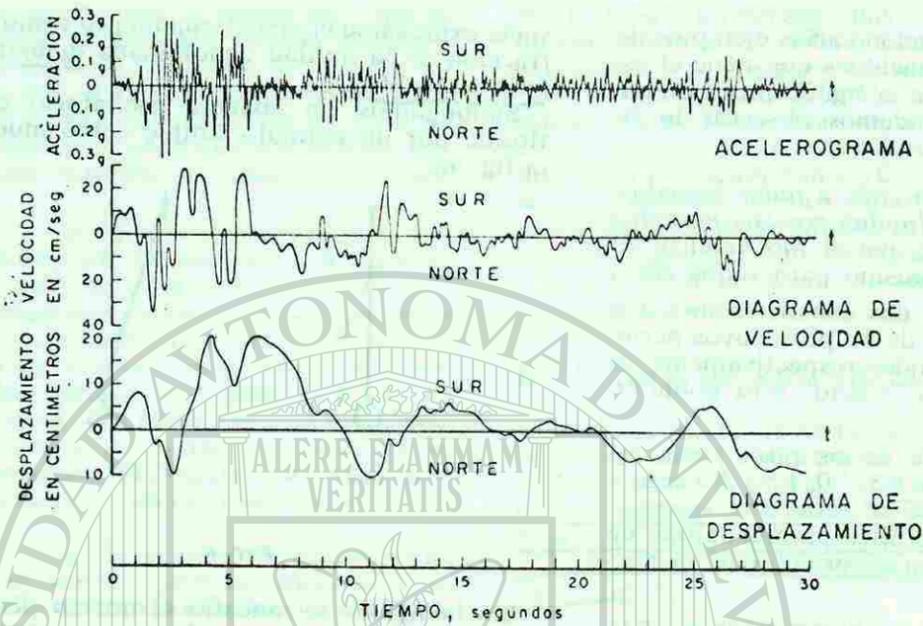
Por otra parte, el número de oscilaciones será menor entre más viscoso sea el líquido usado. Este tipo de amortiguamiento, ligeramente idealizado, se denomina *viscoso* o *lineal* y la fuerza que se opone al movimiento es proporcional en cada momento a la velocidad con que el péndulo se desplaza. Es decir,

$$F = cv$$

donde  $F$  = fuerza que se opone al movimiento

$c$  = coeficiente de proporcionalidad que depende de la viscosidad del líquido

$v$  = velocidad del péndulo (variable a lo largo de su recorrido)



TEMBLOR DE EL CENTRO, CALIFORNIA  
MAYO 18 DE 1940. COMPONENTE N-S

FIG. 6

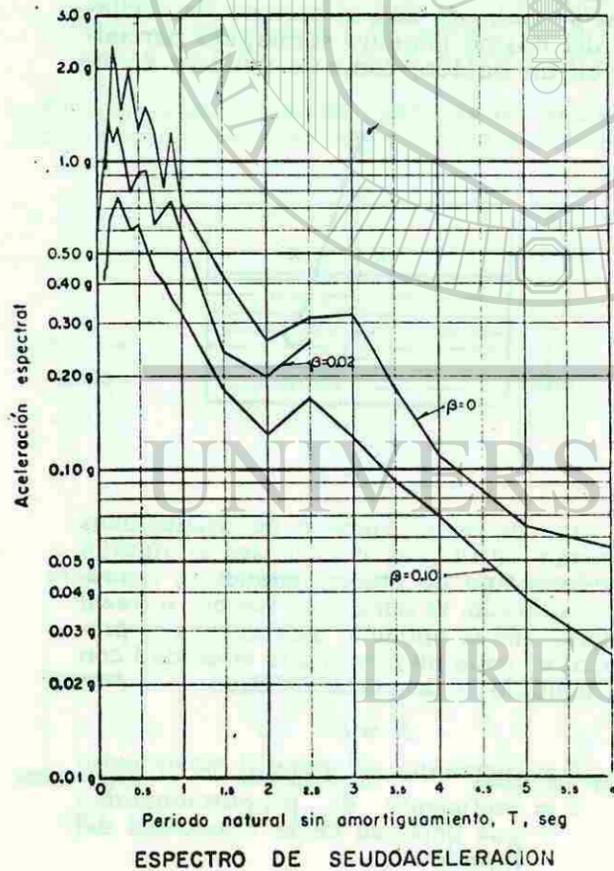


FIG. 7

Supóngase que en el recipiente de la fig. 5 se usa un líquido cuya viscosidad tiene el mínimo valor necesario para que al dejar el péndulo libre desde la posición A, no llegue a pasar a la izquierda de la posición B de equilibrio sino se aproxime asintóticamente a ella. En estas condiciones ya no existe movimiento oscilatorio. El coeficiente que corresponde a este líquido se denomina crítico y se designará aquí como  $c_{cr}$ .

Según lo que antecede, si  $c/c_{cr} < 1$  hay oscilación, mientras que si  $c/c_{cr} \geq 1$  no la hay. El grado de amortiguamiento que corresponde a  $c_{cr}$  se denomina amortiguamiento crítico, y al cociente  $c/c_{cr}$  se le llama grado o por ciento de amortiguamiento.

Aunque en el ejemplo del péndulo (fig. 5) el amortiguamiento es producido por el líquido, el concepto de amortiguamiento crítico no está limitado a este tipo de fuerza que se opone al movimiento sino incluye otras causas de absorción de energía.

La importancia del amortiguamiento se deriva de que aun una pequeña fracción del crítico en una estructura reduce considerablemente el efecto a que se hace mención en la fig. 3.

#### ESPECTROS COMUNMENTE EMPLEADOS

En la parte superior de la fig. 6 se reproduce la componente norte-sur de la aceleración del terreno durante el temblor ocurrido

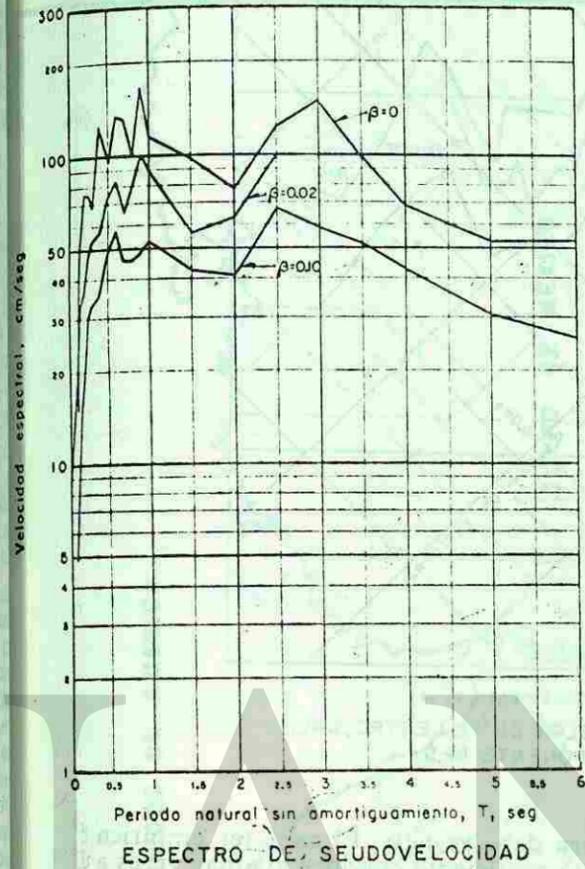


FIG. 8

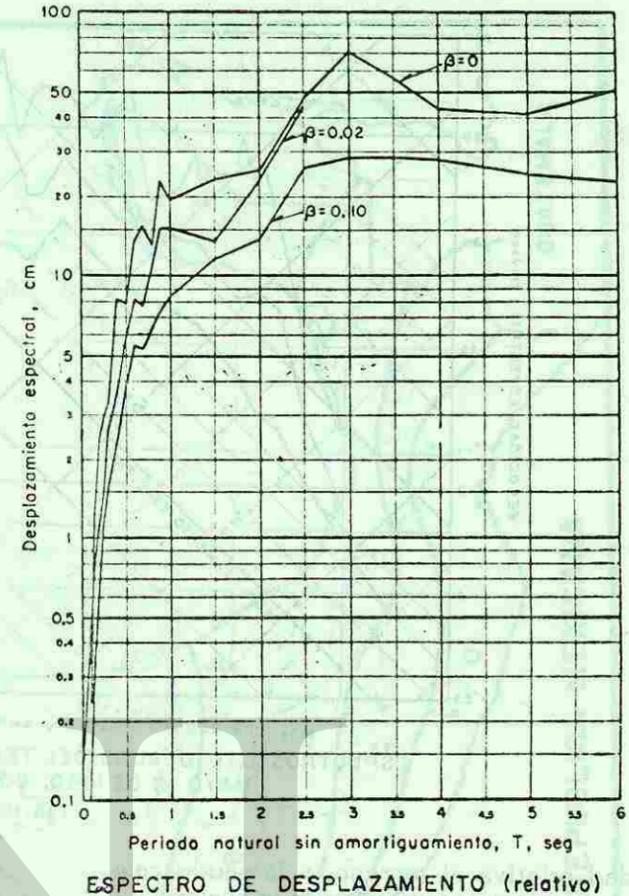


FIG. 9

el 18 de mayo de 1940 en la población de El Centro, California. En la parte media se reproduce la curva de velocidad obtenida por integración de la gráfica registrada por el acelerógrafo; y en la parte inferior se muestra la de los desplazamientos del terreno obtenida de la anterior por igual procedimiento. En esta figura se aprecia que la aceleración horizontal del terreno alcanzó un tercio de la aceleración de la gravedad.

Este temblor es el más fuerte del que se ha obtenido un registro completo. Sin embargo, aun en las últimas décadas han ocurrido sismos de mayor intensidad, como el de Assam (India) en 1950, el de Agadir (Marruecos) en 1960 y los de Chile en el mismo año; en estos casos no hubo en el lugar aparatos adecuados para su registro.

Del acelerograma de la fig. 6 se han calculado los espectros de aceleración, velocidad y desplazamiento que muestran las figs. 7 a 9; éstos corresponden respectivamente a valores máximos de la pseudoaceleración (aproximadamente igual a la aceleración absoluta), seudovelocidad (aproximadamente igual a la ve-

locidad relativa al terreno) y desplazamiento relativo para diferentes valores de  $c/c_{cr}$ .

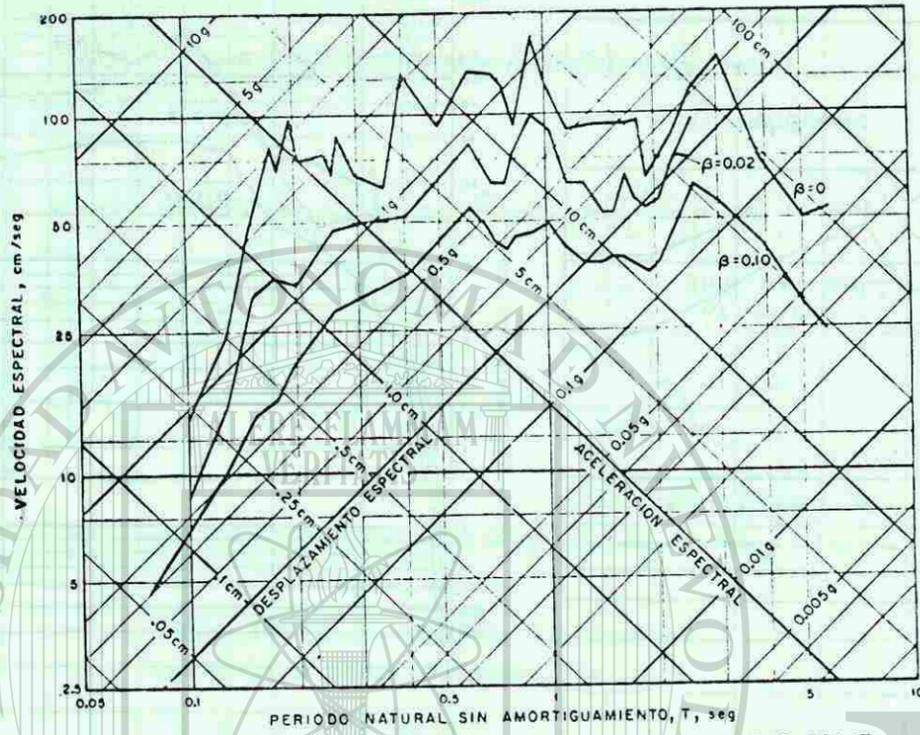
Estos tres tipos de espectro son los más comunes y la relación entre ellos es simple. Basta con calcular uno de ellos para obtener los otros dos. Supóngase obtenido el de seudovelocidad: si la ordenada de un punto de este espectro se multiplica por  $2\pi/T$ , siendo  $T$  (período) la abscisa correspondiente, se obtiene el punto del espectro de aceleraciones para igual valor de  $T$ .

Para obtener el de desplazamientos relativos (entre estructura y terreno) es suficiente multiplicar en forma análoga por  $T/2\pi$ .

El empleo de los términos *seudoadceleración* y *seudovelocidad* se ha generalizado en la literatura respectiva para indicar que la simple relación entre estos espectros incluye una aproximación, que usualmente tiene poca importancia, que facilita la conversión de uno a otro y que además permite incluir los tres espectros en una sola gráfica como se muestra en la fig. 10 en escalas logarítmicas. En rigor los tres espectros representan en distintas formas el de desplazamientos; la seudovelocidad es en promedio aproximadamente igual a la

62

63



ESPECTROS CALCULADOS DEL TEMBLOR DE EL CENTRO, CALIF. MAYO 18 DE 1940. COMPONENTE N-S  
FIG. 10

velocidad relativa al terreno, y la pseudoaceleración coincide exactamente con la aceleración máxima absoluta de la estructura sólo cuando esta carece de amortiguamiento; de lo contrario difiere de ella, pero la diferencia no adquiere valores importantes excepto para estructuras fuertemente amortiguadas o de muy corto período de vibración.

En las figs. 7 a 10 se observa la marcada influencia que el amortiguamiento de una estructura tiene sobre el efecto ocasionado por un sismo; un amortiguamiento tan bajo como 2% del crítico reduce significativamente las ordenadas de los espectros mencionados, especialmente cuando se trata de estructuras de corto período natural de vibración.

**CONCLUSIONES**

- 1) Los métodos habituales de diseño por sismo se basan en el uso de un coeficiente para el cálculo de las fuerzas que la estruc-

tura debe resistir. El carácter empírico de este coeficiente conduce algunas veces a diseños inseguros, y con frecuencia a estructuras de costo mayor de lo necesario.

La aplicación del método descrito resulta en diseños más adecuados en cada caso, es decir, más seguros y menos costosos.

- 2) El empleo de espectros tiene la gran ventaja de combinar cuantitativamente los factores que tienen influencia sobre los efectos de movimientos sísmicos. A cambio, exige amplio conocimiento de las condiciones locales que únicamente se puede adquirir mediante el empleo de instrumentos.

**LECTURAS RECOMENDADAS**

Al lector que desee profundizar en el tema se le recomienda el artículo "Fundamentos de Ingeniería Sísmica" por G. W. Housner del Instituto Tecnológico de California, publicado en la Revista *Ingeniería*, julio de 1962.

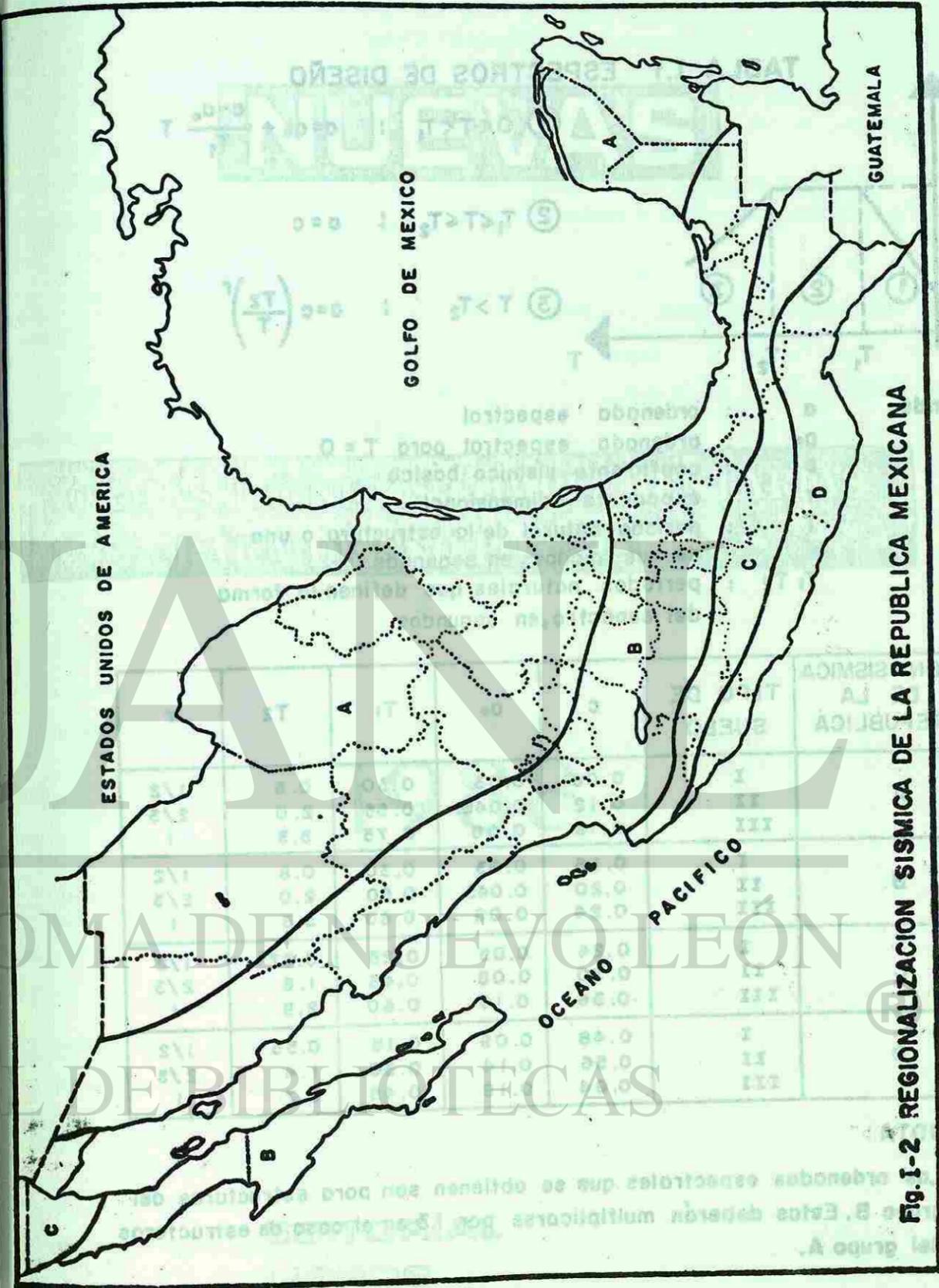


Fig. 1-2 REGIONALIZACION SISMICA DE LA REPUBLICA MEXICANA

TABLA I.1 ESPECTROS DE DISEÑO



donde:

- a : ordenada espectral
- a<sub>0</sub> : ordenada espectral para T = 0
- c : coeficiente sísmico básico
- r : exponente adimensional
- T : período natural de la estructura o uno de sus modos, en segundos
- T<sub>1</sub> T<sub>2</sub> : períodos naturales que definen la forma del espectro, en segundos

ZONA SISMICA DE LA REPUBLICA	TIPO DE SUELO	c	a <sub>0</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	r
A	I	0.08	0.03	0.30	0.8	1/2
	II	0.12	0.045	0.55	2.0	2/3
	III	0.16	0.06	0.75	3.3	1
B	I	0.16	0.03	0.30	0.8	1/2
	II	0.20	0.045	0.50	2.0	2/3
	III	0.24	0.06	0.80	3.3	1
C	I	0.24	0.05	0.25	0.67	1/2
	II	0.30	0.08	0.45	1.6	2/3
	III	0.36	0.10	0.60	2.9	1
D	I	0.48	0.09	0.15	0.55	1/2
	II	0.56	0.14	0.30	1.4	2/3
	III	0.64	0.18	0.45	2.7	1

NOTA:

Las ordenadas espectrales que se obtienen son para estructuras del grupo B. Estas deberán multiplicarse por 1.3 en el caso de estructuras del grupo A.

**NUEVAS**

**NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS  
PARA DISEÑO POR SISMO**

1988

EDITORIAL  
LIBROS  
**ECONOMICOS**

TABLA I.1 ESPECTROS DE DISEÑO



①  $0 < T < T_1$  :  $a = a_0 + \frac{c - a_0}{T_1} T$

②  $T_1 < T < T_2$  :  $a = c$

③  $T > T_2$  :  $a = c \left( \frac{T_2}{T} \right)^r$

- donde:
- a : ordenada espectral
  - a<sub>0</sub> : ordenada espectral para T = 0
  - c : coeficiente sísmico básico
  - r : exponente adimensional
  - T : período natural de la estructura o uno de sus modos, en segundos
  - T<sub>1</sub> T<sub>2</sub> : períodos naturales que definen la forma del espectro, en segundos

ZONA SISMICA DE LA REPUBLICA	TIPO DE SUELO	c	a <sub>0</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	r
A	I	0.08	0.03	0.30	0.8	1/2
	II	0.12	0.045	0.55	2.0	2/3
	III	0.16	0.06	0.75	3.3	1
B	I	0.16	0.03	0.30	0.8	1/2
	II	0.20	0.045	0.50	2.0	2/3
	III	0.24	0.06	0.80	3.3	1
C	I	0.24	0.05	0.25	0.67	1/2
	II	0.30	0.08	0.45	1.6	2/3
	III	0.36	0.10	0.60	2.9	1
D	I	0.48	0.09	0.15	0.55	1/2
	II	0.56	0.14	0.30	1.4	2/3
	III	0.64	0.18	0.45	2.7	1

NOTA:

Las ordenadas espectrales que se obtienen son para estructuras del grupo B. Estas deberán multiplicarse por 1.3 en el caso de estructuras del grupo A.

**NUEVAS**

**NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS  
PARA DISEÑO POR SISMO**

1988

EDITORIAL  
LIBROS  
**ECONOMICOS**

## Acuerdo por el que se expiden las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo

**RAMON AGUIRRE VELAZQUEZ**, Jefe del Departamento del Distrito Federal, con fundamento en lo dispuesto por los artículos 5o., 15, 16 y 44 de la Ley Orgánica de la Administración Pública Federal; lo., 3o. y 20 de la Ley Orgánica del Departamento del Distrito Federal; lo., 4o. y 5o. fracción XXVI de su Reglamento Interior; lo., 173 y Décimo Transitorio del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, y

### CONSIDERANDO

Que es un deber esencial del Estado, otorgar y brindar a los gobernados, los servicios de seguridad en la utilización de las edificaciones e instalaciones que conforman el Distrito Federal;

Que en los términos de los artículos lo., 173 y Décimo Transitorio del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, corresponde al Departamento del Distrito Federal, establecer los requisitos técnicos a que deberán sujetarse las edificaciones e instalaciones que se realicen en el Distrito Federal, a fin de que satisfagan las condiciones mínimas de seguridad, higiene, comodidad e integración al contexto urbano, para asegurar su habitabilidad y funcionalidad debidas, he tenido a bien expedir el siguiente

### ACUERDO

**PRIMERO.**—Se expiden las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo, mismas que entrarán en vigor mediante su publicación en la *Gaceta Oficial* del Departamento del Distrito Federal.

**SEGUNDO.**—Las Unidades Administrativas y Organos Desconcentrados del Departamento del Distrito Federal, de conformidad con las atribuciones que les confiere el Reglamento Interior del propio Departamento, vigilarán el cumplimiento de las presentes Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal.

### TRANSITORIO

**UNICO.**—El presente Acuerdo y las Normas Técnicas Complementarias que autoriza, entrarán en vigor al día siguiente de su publicación en la *Gaceta Oficial* del Departamento del Distrito Federal.

1. México, D.F., a 28 de Septiembre de 1987.—Rúbrica

## NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS DISEÑO POR SISMO

### NOTACION

Cada símbolo empleado en estas normas se define donde aparece por primera vez. Los más importantes son:

(adimensional) = ordenada de los espectros de diseño, como fracción de la aceleración de la gravedad, sin reducción con fines de diseño

(metros) = dimensión del entrepiso que se analiza, medida perpendicularmente a la dirección de análisis

(adimensional) = coeficiente de diseño sísmico

(adimensional) = diferencia en valores de la aceleración horizontal expresada como fracción de la gravedad, que sería necesario aplicar en cada uno de los dos sentidos opuestos de una dirección dada, para que fallara la estructura

(metros) = distancia entre el centro de gravedad de las resistencias y la línea de acción de la fuerza cortante de entrepiso

(metros) = excentricidad torsional

(adimensional) = inclinación de una estructura con respecto a la vertical

(m/seg<sup>2</sup>) = aceleración de la gravedad

(metros) = altura, sobre el terreno, de la masa para la que se calcula una fuerza horizontal

(adimensional) = factor de comportamiento sísmico, independiente de T

(adimensional) = factor reductor de fuerzas sísmicas con fines de diseño, función del periodo natural

(adimensional) =  $(T_b/T)^r$

(adimensional) = exponente en las expresiones para cálculo de las ordenadas de los espectros de diseño

S = respuesta de la estructura como combinación de las respuestas modales

S<sub>i</sub> = respuesta de la estructura en el modo natural de vibración i

T (segundos) = periodo natural de vibración

T<sub>a</sub>, T<sub>b</sub> (segundos) = periodos característicos de los espectros de diseño

V (toneladas) = fuerza cortante horizontal en el nivel que se analiza

V<sub>o</sub> (toneladas) = fuerza cortante horizontal en la base de la construcción

W (toneladas) = peso de la construcción arriba del nivel que se considera, incluyendo la carga viva que se especifica en el capítulo V, título VI del Reglamento

W<sub>o</sub> (toneladas) = valor de W en la base de la estructura

## 2. ELECCION DEL TIPO DE ANALISIS

### 2.1 Análisis estático y dinámico

Toda estructura podrá analizarse mediante un método dinámico según se establece en la sección 9 de estas normas. Las estructuras que no pasen de 60 m de alto podrán analizarse, como alternativa, mediante el método estático que describe la sección 8. Con la misma limitación, para estructuras ubicadas en las zonas II o III como se definen en el artículo 219 del Reglamento, también será admisible emplear los métodos de análisis que especifica el apéndice a las presentes normas, en los cuales se tienen en cuenta los periodos dominantes del terreno en el sitio de interés y la interacción suelo-estructura.

### 2.2 Método simplificado de análisis

El método simplificado a que se refiere la sección 7 del presente cuerpo normativo será aplicable al análisis de edificios que cumplan simultáneamente los siguientes requisitos:

I. En cada planta, al menos el 75 por ciento de las cargas verticales estarán soportadas por muros ligados entre sí mediante losas monolíticas u otros sistemas de piso suficientemente resistentes y rígidos al corte. Dichos muros tendrán distribución sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales y deberán satisfacer las condiciones que establecen las normas complementarias correspondientes. Será admisible cierta asimetría en la distribución de los muros cuando existan en todos los pisos dos muros de carga perimetrales paralelos cada uno con longitud al menos igual a la mitad de la dimensión mayor en planta del edificio. Los muros a que se refiere este párrafo podrán ser de mampostería, concreto reforzado o madera; en este último caso estarán arriostros con diagonales.

II. La relación entre longitud y anchura de la planta del edificio no excederá de 2.0, a menos que, para fines de análisis sísmico, se pueda suponer dividida dicha planta en tramos independientes cuya relación entre longitud y anchura satisfaga esta restricción y cada tramo resista según el criterio que marca la sección 7 de las presentes normas.

III. La relación entre la altura y la dimensión mínima de la base del edificio no excederá de 1.5 y la altura del edificio no será mayor de 13 m.

### 3. ESPECTROS PARA DISEÑO SISMICO

Cuando se aplique el análisis dinámico modal que especifica la sección 9 de estas normas, se adoptarán las siguientes hipótesis para el análisis de la estructura:

La ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico,  $a$ , expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por las siguientes expresiones:

$$a = (1 + 3T/T_a)c/4, \text{ si } T \text{ es menor que } T_a$$

$$a = c, \text{ si } T \text{ está entre } T_a \text{ y } T_b$$

$$a = qc, \text{ si } T \text{ excede de } T_b$$

$$q = (T_b/T)^r$$

$T$  es el período natural de interés;  $T$ ,  $T_a$  y  $T_b$  están expresados en segundos;  $c$  es el coeficiente sísmico, y  $r$  un exponente que depende de la zona en que se halla la estructura.

El coeficiente  $c$  se obtiene del artículo 206 del Reglamento, salvo que en la parte sombreada de la zona II en la figura 3.1 se tomará  $c = 0.4$  para las estructuras del grupo B, y  $c = 0.6$  para las del A.

$T_a$ ,  $T_b$  y  $r$  se consignan en la tabla 3.1.

Tabla 3.1 Valores de  $T_a$ ,  $T_b$  y  $r$

Zona	$T_a$	$T_b$	$r$
I	0.2	0.6	1/2
II*	0.3	1.5	2/3
III+	0.6	3.9	1

\* no sombreada en la figura 3.1.

+ y parte sombreada de la zona II en la Figura 3.1.

### 4. REDUCCION DE FUERZAS SISMICAS

#### 4.1 Factor reductor

Con fines de diseño, las fuerzas sísmicas para análisis estático y las obtenidas del análisis dinámico modal empleando los métodos que fijan estas normas se podrán reducir dividiéndolas entre el factor reductor  $Q'$ . En el diseño sísmico de estructuras que satisfagan las condiciones de regularidad que fija la sección 6 de estas normas,  $Q'$  se calculará como sigue:

$$Q' = Q \text{ si se desconoce } T \text{ o si éste es mayor o igual a } T_a$$

$$Q' = 1 + (T/T_a)(Q - 1), \text{ si } T \text{ es menor que } T_a$$

$T$  se tomará igual al período fundamental de vibración cuando se emplee el método estático e igual al período natural de vibración del modo que se considere cuando se emplee el método de análisis modal de la sección 9, y  $T_a$  es un período característico del espectro de diseño que se define en la sección 3.

En el diseño sísmico de las estructuras que no satisfagan las condiciones de regularidad que fija la sección 6 de estas normas, se multiplicará por 0.8 el valor de  $Q'$ .

Las deformaciones se calcularán multiplicando por  $Q$  las causadas por las fuerzas sísmicas reducidas cuando se emplee el método estático de análisis que se detalla en la sección 8 de las presentes normas o el de análisis modal de la sección 9.

Cuando se adopten dispositivos especiales capaces de disipar energía por amortiguamiento o comportamiento inelástico, podrán emplearse criterios de diseño sísmico que difieran de los aquí especificados, pero congruentes

3. 70

ellos, si se demuestran a satisfacción del Departamento tanto la eficacia de los dispositivos o soluciones estructurales como la validez de los valores del amortiguamiento y de  $Q'$  que se propongan.

### FACTOR DE COMPORTAMIENTO SISMICO

Se adoptarán los siguientes valores del factor de comportamiento sísmico a que se refieren la sección 4 de las normas y el artículo 207 del Reglamento:

Se usará  $Q = 4$  cuando se cumplan los requisitos siguientes:

La resistencia en todos los entrepisos es suministrada exclusivamente por marcos no contraventeados de concreto reforzado, o bien por marcos contraventeados o con muros de concreto reforzado en los que cada entrepiso los marcos son capaces de resistir, sin contar muros ni contravientos, cuando menos 50 por ciento de la fuerza sísmica actuante.

Si hay muros ligados a la estructura en la forma especificada en el caso I del artículo 204 del Reglamento, se deben tener en cuenta en el análisis, pero su contribución a la capacidad ante fuerzas laterales sólo se tomará en cuenta si estos muros son de piezas macizas, o marcos, sean o no contraventeados, y los muros de concreto reforzado son capaces de resistir al menos 80 por ciento de las fuerzas laterales totales sin la contribución de los muros de mampostería.

El mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiere en más de 5 por ciento del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos. Para verificar el cumplimiento de este requisito, se calculará la capacidad resistente de cada entrepiso teniendo en cuenta todos los elementos que contribuyen a la resistencia, en particular los muros que se hallen en el caso I a que se refiere el artículo 204 del Reglamento.

Los marcos y muros de concreto reforzado cumplen los requisitos que fijan las normas complementarias correspondientes para marcos y muros dúctiles.

Los marcos rígidos de acero satisfacen los requisitos para marcos dúctiles que fijan las normas complementarias correspondientes.

Se adoptará  $Q = 3$  cuando se satisfacen las condiciones 2, 4 y 5 del caso I y en cualquier entrepiso dejan

de satisfacerse las condiciones 1 o 3 especificadas para el caso I pero la resistencia en todos los entrepisos es suministrada por columnas de acero o de concreto reforzado con losas planas, por marcos rígidos de acero, por marcos de concreto reforzado, por muros de este material, por combinaciones de éstos y marcos o por diafragmas de madera contrachapada. Las estructuras con losas planas deberán además satisfacer los requisitos que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

III. Se usará  $Q = 2$  cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada por losas planas con columnas de acero o de concreto reforzado, por marcos de acero o de concreto reforzado, contraventeados o no, o muros o columnas de concreto reforzado, que no cumplen en algún entrepiso lo especificado por los casos I y II de esta sección, o por muros de mampostería de piezas macizas confinados por castillos, dadas, columnas o trabes de concreto reforzado o de acero que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, o diafragmas contravientos con duelas inclinadas o por sistemas de muros formados por duelas de madera horizontales o verticales combinados con elementos diagonales de madera maciza. También se usará  $Q = 2$  cuando la resistencia es suministrada por elementos de concreto prefabricado o preforzado, con las excepciones que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

IV. Se usará  $Q = 1.5$  cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada en todos los entrepisos por muros de mampostería de piezas huecas, confinados o con refuerzo interior, que satisfacen los requisitos de las normas complementarias respectivas, o por combinaciones de dichos muros con elementos como los descritos para los casos II y III, o por marcos y armaduras de madera.

V. Se usará  $Q = 1$  en estructuras cuya resistencia a fuerzas laterales es suministrada al menos parcialmente por elementos o materiales diferentes de los arriba especificados, a menos que se haga un estudio que demuestre, a satisfacción del Departamento, que se puede emplear un valor más alto que el que aquí se especifica.

En todos los casos se usará para toda la estructura en la dirección de análisis el valor mínimo de  $Q$  que corresponde a los diversos entrepisos de la estructura en dicha dirección.

El factor  $Q$  puede diferir en las dos direcciones ortogonales en que se analiza la estructura, según sean las propiedades de ésta en dichas direcciones.

4. 71

## 6. CONDICIONES DE REGULARIDAD

Para que una estructura pueda considerarse regular debe satisfacer los siguientes requisitos:

1. Su planta es sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales por lo que toca a masas, así como a muros y otros elementos resistentes.
2. La relación de su altura a la dimensión menor de su base no pasa de 2.5.
3. La relación de largo a ancho de la base no excede de 2.5.
4. En planta no tiene entrantes ni salientes cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección que se considera de la entrante o saliente.
5. En cada nivel tiene un sistema de techo o piso rígido y resistente.
6. No tiene aberturas en sus sistemas de techo o piso cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión en planta medida paralelamente a la dimensión que se considere de la abertura, las áreas huecas no ocasionan asimetrías significativas ni difieren en posición de un piso a otro y el área total de aberturas no excede en ningún nivel de 20 por ciento del área de la planta.
7. El peso de cada nivel, incluyendo la carga viva que debe considerarse para diseño sísmico, no es mayor que el del piso inmediato inferior ni, excepción hecha del último nivel de la construcción, es menor que 70 por ciento de dicho peso.

8. Ningún piso tiene un área, delimitada por los pisos exteriores de sus elementos resistentes verticales, mayor que la del piso inmediato inferior ni menor que 70% de ésta. Se exige de este último requisito únicamente al último piso de la construcción.

9. Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en dos direcciones ortogonales por diafragmas horizontales y por trabes o losas planas.

10. La rigidez al corte de ningún entrepiso excede en más de 100 por ciento a la del entrepiso inmediatamente inferior.

11. En ningún entrepiso la excentricidad torsional calculada estáticamente,  $e_s$ , excede del 10 por ciento de la dimensión en planta de ese entrepiso medida paralelamente a la excentricidad mencionada.

## 7. METODO SIMPLIFICADO DE ANALISIS

Para aplicar este método se hará caso omiso de los desplazamientos horizontales, torsiones y momentos de volteo. Se verificará únicamente que en cada piso la suma de las resistencias al corte de los muros de carga, proyectados en la dirección en que se considera la aceleración, sea cuando menos igual a la fuerza cortante total que obre en dicho piso, calculada según se especifica en el inciso 1 de la sección 8 de las presentes normas, pero empleando los coeficientes sísmicos reducidos que se establecen en la tabla 7.1 para construcciones del grupo B. Tratándose de las clasificadas en el grupo A estos coeficientes habrán de multiplicarse por 1.5.

Tabla 7.1 Coeficientes sísmicos reducidos para el método simplificado, correspondientes a estructuras del grupo B

ZONA	MUROS DE PIEZAS MACIZAS O DIAFRAGMAS DE MADERA CONTRACHAPADA ALTURA DE LA CONSTRUCCION			MUROS DE PIEZAS HUECAS O DIAFRAGMAS DE DUELAS DE MADERA * ALTURA DE LA CONSTRUCCION		
	Menor de 4 m	Entre 4 y 7 m	Entre 7 y 13 m	Menor de 4 m	Entre 4 y 7 m	Entre 7 y 13 m
I	0.07	0.08	0.08	0.10	0.11	0.11
II y III	0.13	0.16	0.19	0.15	0.19	0.23

\* Diafragmas de duelas de madera inclinadas o sistemas de muros formados por duelas de madera verticales u horizontales arriostradas con elementos de madera maciza.

## ANALISIS ESTATICO

Fuerzas cortantes:

Para calcular las fuerzas cortantes a diferentes niveles una estructura, se supondrá un conjunto de fuerzas horizontales actuando sobre cada uno de los puntos donde se supongan concentradas las masas. Cada una de estas fuerzas se tomará igual al peso de la masa que corresponde multiplicado por un coeficiente proporcional a  $h$ , siendo  $h$  la altura de la masa en cuestión sobre el desplante (nivel a partir del cual las deformaciones estructurales deben ser apreciables). El coeficiente se tomará de tal manera que la relación  $V_o/W_o$  sea igual a  $c/Q$ , siendo  $V_o$  la fuerza cortante basal,  $W_o$  el peso de la construcción incluyendo las cargas muertas que fija el capítulo IV, título VI del Reglamento y las vivas que especifica el artículo V, título VI, Q el factor de comportamiento que se toma en la sección 5 de estas normas y  $c$  el coeficiente que establece el artículo 206 del Reglamento,  $c$  que en la parte sombreada de la zona II en la tabla 3.1 se tomara  $c = 0.4$  para estructuras del grupo B y  $c = 0.6$  para las del A.

Reducción de las fuerzas cortantes

Se adoptarán fuerzas cortantes menores que las calculadas según el inciso anterior, siempre que se tome en cuenta el valor aproximado del periodo fundamental de la estructura, de acuerdo con lo siguiente:

El periodo fundamental de vibración,  $T$ , se tomará igual a:

$$0.3 \times (\sum W_i x_i^2 / g \sum P_i x_i)^{1/2}$$

donde  $W_i$  es el peso de la masa  $i$ ,  $P_i$  la fuerza horizontal que actúa sobre ella de acuerdo con el inciso 1,  $x_i$  el correspondiente desplazamiento en la dirección de la fuerza, y  $g$  la aceleración de la gravedad.

Si  $T$  es menor o igual que  $T_b$  se procederá como en el inciso 1 pero de tal manera que la relación  $V_o/W_o$  sea igual a  $a/Q'$ , calculándose  $a$  y  $Q'$  como se especifica respectivamente en las secciones 3 y 4 de las presentes normas.

Si  $T$  es mayor que  $T_b$  se procederá como en el párrafo b pero de tal manera que cada una de las fuerzas laterales se tome proporcional al peso de

$$V_o = \frac{c}{Q} (k_1 h_1 + k_2 h_2) = \frac{c}{Q} k_1 h_1 + \frac{c}{Q} k_2 h_2$$

la masa que corresponde multiplicado por un coeficiente igual a  $k_1 h_1 + k_2 h_2$ , siendo

$$k_1 = q[1 - r(1 - q)] \sum W_i / (\sum W_i h_i)$$

$$k_2 = 1.5rq(1 - q) \sum W_i / (\sum W_i h_i^2)$$

y  $W_i$  y  $h_i$  respectivamente el peso y la altura de la  $i$ -ésima masa sobre el desplante. Además,  $q$  no se tomará menor de  $c/4$ .

## 8.3 Péndulos invertidos

En el análisis de péndulos invertidos (estructuras en que 50 por ciento o más de su masa se halle en el extremo superior y tengan un solo elemento resistente en la dirección de análisis o una sola hilera de columnas perpendicular a ésta), además de la fuerza lateral estipulada se tendrán en cuenta las aceleraciones verticales de la masa superior asociadas al giro de dicha masa con respecto a un eje horizontal normal a la dirección de análisis y que pase por el punto de unión entre la masa y el elemento resistente. El efecto de dichas aceleraciones se tomará equivalente a un par aplicado en el extremo superior del elemento resistente, cuyo valor es  $1.5P_i r_o^2 u/x$  siendo  $P_i$  la fuerza lateral actuante sobre la masa de acuerdo con el inciso 1,  $r_o$  el radio de giro de dicha masa con respecto al eje horizontal en cuestión y  $u$  y  $x$  el giro y el desplazamiento lateral, respectivamente, del extremo superior del elemento resistente bajo la acción de la fuerza lateral  $P_i$ .

## 8.4 Apéndices

Para valuar las fuerzas sísmicas que obran en tanques, apéndices y demás elementos cuya estructuración difiera radicalmente de la del resto del edificio, se supondrá actuando sobre el elemento en cuestión la distribución de aceleraciones que le correspondería si se apoyara directamente sobre el terreno, multiplicada por  $1 + 4c'/c$  donde  $c'$  es el factor por el que se multiplican los pesos, a la altura de desplante del elemento cuando se valúan las fuerzas laterales sobre la construcción. Se incluyen en este requisito los parapetos, pretiles, anuncios, ornamentos, ventanales, muros, revestimientos y otros apéndices. Se incluyen, asimismo, los elementos sujetos a esfuerzos que dependen principalmente de su propia aceleración.

$$\frac{\sum W_i x_i^2}{g \sum P_i x_i}$$

ción (no de la fuerza cortante ni del momento de volteo), como las losas que transmiten fuerzas de inercia de las masas que soportan.

### 8.5 Momento de volteo

El momento de volteo para cada marco o grupo de elementos resistentes en un nivel dado podrá reducirse, tomándolo igual al calculado multiplicado por  $0.8 \pm 0.2z$  (siendo  $z$  la relación entre la altura a la que se calcula el factor reductor por momento de volteo y la altura total de la construcción), pero no menor que el producto de la fuerza cortante en el nivel en cuestión multiplicada por su distancia al centro de gravedad de la parte de la estructura que se encuentre por encima de dicho nivel. En péndulos invertidos no se permite reducción de momento de volteo.

### 8.6 Efectos de torsión

La excentricidad torsional de rigideces calculada en cada entrepiso,  $e_t$ , se tomará como la distancia entre el centro de torsión del nivel correspondiente y la fuerza cortante en dicho nivel. Se entenderá por excentricidad de resistencias al corte,  $e_r$ , la distancia entre el centroide de las resistencias de todos los elementos resistentes ante fuerza cortante en el entrepiso que se considera y la línea de acción de la fuerza cortante en ese nivel. En estructuras para las que el factor de comportamiento sísmico,  $Q$ , que se especifica en la sección 5, sea igual a 3 se suministrarán resistencias tales que el centroide de las resistencias se halle del mismo lado de la fuerza cortante que el centro de torsión y  $e_r$  no sea menor que  $e_s - 0.2b$ , y si  $Q$  excede de 3, resistencias tales que el centroide de la resistencia se halle del mismo lado de la fuerza cortante que el centro de torsión y  $e_r$  no sea menor que  $e_s - 0.1b$ , en que  $b$  es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de  $e_r$  y  $e_s$ . Para fines de diseño, el momento torsionante se tomará por lo menos igual a la fuerza cortante de entrepiso multiplicada por la excentricidad que para cada marco o muro resulte más desfavorable de las siguientes:  $1.5e_s + 0.1b$  o  $e_s - 0.1b$ . Además, la excentricidad de diseño en cada sentido no se tomará menor que la mitad del máximo valor de  $e_s$  calculado para los entrepisos que se hallan abajo del que se considera, ni se tomará el momento torsionante de ese entrepiso menor que la mitad del máximo calculado para los entrepisos que están arriba del considerado.

### 8.7 Efectos de segundo orden

Deberán tenerse en cuenta explícitamente en el análisis los efectos de segundo orden, esto es, los momentos y cor-

tantes adicionales provocados por las cargas verticales al obrar en la estructura desplazada lateralmente, en toda estructura en que la diferencia en desplazamientos laterales entre dos niveles consecutivos, dividida entre la diferencia de alturas correspondiente, exceda de  $0.08V/W$  entre cada par de niveles consecutivos, siendo  $V$  la fuerza cortante calculada y  $W$  el peso de la construcción incluyendo cargas muertas y vivas que obra encima de la elevación que se considera.

### 8.8 Efectos bidireccionales

Los efectos de ambos componentes horizontales del movimiento del terreno se combinarán tomando, en cada dirección en que se analice la estructura, el 100% de los efectos del componente que obra en esa dirección y el 30% de los efectos del que obra perpendicularmente a ella, con los signos que para cada concepto resulten más desfavorables.

### 8.9 Falla de cimentación

Se verificará que ni la estructura ni su cimentación alcanza ninguno de los estados límite de falla o de servicio a que se refiere el capítulo VI, título VI del Reglamento. Al revisar con respecto a estados límite de falla de la cimentación se tendrá en cuenta la fuerza de inercia horizontal que obra en el volumen de suelo que se halla bajo los cimientos y que potencialmente se desplazaría al fallar el suelo en cortante, estando dicho volumen sujeto a una aceleración horizontal igual a  $c/4$  veces la aceleración de la gravedad.

### 8.10 Revisión por rotura de vidrios

Al revisar con respecto al estado límite por rotura de vidrios se verificará que alrededor de cada tablero de vidrio o cada marco exista una holgura no menor que el desplazamiento relativo entre los extremos del tablero o marco, calculado a partir de la deformación por cortante de entrepiso y dividido entre  $1 + H_v/B_v$ , donde  $B_v$  es la base del tablero o marco y  $H_v$  su altura.

### 8.11 Comportamiento asimétrico

En el diseño de estructuras cuyas relaciones fuerza-deformación difieran en sentidos opuestos se dividirán los factores de resistencia entre  $1 + 2.5dQ$ , en que  $d$  es la diferencia en los valores de  $a/Q'$ , expresados como fracción de la gravedad, que causarían la falla o fluencia plástica de la estructura en uno y otro sentido.

## ANÁLISIS DINAMICO

Se aceptarán como métodos de análisis dinámico el análisis modal y el cálculo paso a paso de respuestas a valores específicos.

### Análisis modal

Se usa el análisis modal, deberá incluirse el efecto de todos los modos naturales de vibración con periodo mayor o igual a 0.4 seg, pero en ningún caso podrán considerarse menos que los tres primeros modos de translación en cada dirección de análisis. Puede despreciarse el efecto dinámico torsional de excentricidades estáticas. En tal caso, el efecto de dichas excentricidades y de la excentricidad accidental se calculará como lo especifica el artículo correspondiente al análisis estático.

Para calcular la participación de cada modo natural de las fuerzas laterales que actúan sobre la estructura, se pondrán las aceleraciones espectrales de diseño especificadas en la sección 3 de estas normas reducidas como establece en la sección 4 de las mismas.

Las respuestas modales  $S_i$  (donde  $S_i$  puede ser fuerza cortante, desplazamiento lateral, momento de volteo, etc.), se combinarán para calcular las respuestas totales  $S$  de acuerdo con la expresión

$$S = (S_1^2)^{1/2}$$

que los periodos de los modos naturales en cuestión difieran al menos 10% entre sí. Para las respuestas a modos naturales que no cumplen esta condición se tendrá en cuenta el acoplamiento entre ellos. Los desplazamientos laterales así calculados habrán de multiplicarse para calcular efectos de segundo orden así como verificar que la estructura no alcanza ninguno de los estados límite de servicio a los que se refiere el capítulo VI, título VI del Reglamento.

### Análisis paso a paso

Se emplea el método de cálculo paso a paso de respuestas a temblores específicos, podrá acudirse a aceleraciones de temblores reales o de movimientos simulados, combinaciones de éstos, siempre que se usen no menos de cuatro movimientos representativos, independientes

entre sí, cuyas intensidades sean compatibles con los demás criterios que consignan el Reglamento y estas normas, y que se tengan en cuenta el comportamiento no lineal de la estructura y las incertidumbres que haya en cuanto a sus parámetros.

### 9.3 Revisión por cortante basal

Si con el método de análisis dinámico que se haya aplicado se encuentra que, en la dirección que se considera, la fuerza cortante basal  $V_o$  es menor que  $0.8aW_o/Q'$ , se incrementarán todas las fuerzas de diseño y desplazamientos laterales correspondientes en una proporción tal que  $V_o$  iguale a este valor.

### 9.4 Efectos bidireccionales

Cualquiera que sea el método dinámico de análisis que se emplee, los efectos de movimientos horizontales del terreno en direcciones ortogonales se combinarán como se especifica en relación con el método estático de análisis sísmico. Igualmente aplicables son las demás disposiciones de la sección 8 de estas normas en cuanto al cálculo de fuerzas internas y desplazamientos laterales, con las salvedades que señala la presente sección.

## 10. ANÁLISIS Y DISEÑO DE OTRAS CONSTRUCCIONES NUEVAS

Las presentes normas complementarias sólo son aplicables en su integridad a edificios. Tratándose de otras estructuras se aplicarán métodos de análisis apropiados al tipo de estructura en cuestión siempre que tales métodos respeten las disposiciones de la presente sección, sean congruentes con este cuerpo normativo y reciban la aprobación del Departamento.

### 10.1 Tanques, péndulos invertidos y chimeneas

En el diseño de tanques, péndulos invertidos y chimeneas las fuerzas internas debidas al movimiento del terreno en cada una de las direcciones en que se analice se combinarán con el 50% de las que produzca el movimiento del terreno en la dirección perpendicular a ella, tomando estas últimas con el signo que para cada elemento estructural resulte más desfavorable.

En el diseño de tanques deberán tenerse en cuenta las presiones hidrostáticas y las hidrodinámicas del líquido

almacenado así como los momentos que obren en el fondo del recipiente.

## 10.2 Muros de retención

Los empujes que ejercen los rellenos sobre los muros de retención, debidos a la acción de los sismos, se evaluarán suponiendo que el muro y la zona de relleno por encima de la superficie crítica de deslizamiento se encuentran en equilibrio límite bajo la acción de las fuerzas debidas a carga vertical y a una aceleración horizontal igual a  $c/3$  veces la gravedad. Podrán asimismo emplearse procedimientos diferentes siempre que sean previamente aprobados por el Departamento.

## 11. ESTRUCTURAS EXISTENTES

En la revisión de la seguridad de un edificio existente se adoptará el valor del factor de comportamiento sísmico  $Q$  que, en los términos de la sección 5 de las presentes normas, corresponda al caso cuyos requisitos sean esencialmente satisfechos por la estructura, a menos que se justifique a satisfacción del Departamento la adopción de un valor mayor que éste.

Tratándose de estructuras cuyo comportamiento en sentidos opuestos sea asimétrico por inclinación de la estructura con respecto a la vertical, si el desplome de la construcción excede de 0.01 veces su altura, se tomará en cuenta la asimetría multiplicando las fuerzas sísmicas de diseño por  $1 + 10f$  cuando se use el método simplificado de análisis sísmico, o por  $1 + 5Qf$  cuando se use el estático o el dinámico modal, siendo  $f$  el desplome de la construcción dividido entre la altura de ésta. Si se emplea el método dinámico de análisis paso a paso se hará consideración explícita de la inclinación.

Cuando se refuerce una construcción del grupo B con elementos estructurales adicionales será válido adoptar los valores de  $Q$  que corresponden a estos elementos siempre que sean capaces de resistir en cada entrepiso al menos 50% de la fuerza cortante de diseño, resistiendo la estructura existente al resto, y en cada nivel las resistencias de los elementos añadidos sean compatibles con las fuerzas de diseño que les correspondan. Deberá comprobarse que los sistemas de piso tienen la rigidez y resistencia suficientes para transmitir las fuerzas que se generan en ellos por los elementos de refuerzo que se han colocado y, de no ser así, deberán reforzarse los sistemas de piso para lograrlo.

## APENDICE

### A1 ALCANCE

Para el diseño de estructuras ubicadas en las zonas II o III será permisible tener en cuenta los efectos de los periodos dominantes del terreno en el sitio de interés y de la interacción suelo-estructura. Cuando así se proceda se aplicarán al cuerpo principal de las presentes normas técnicas complementarias las modificaciones que contiene el presente apéndice. En todos los aspectos que no cubre este apéndice son aplicables las demás disposiciones de las normas técnicas complementarias.

### A2 NOTACION ADICIONAL

Se emplean aquí los símbolos del cuerpo principal de estas normas, así como otros, entre los cuales los más importantes son:

A (m <sup>2</sup> )	=	área de la superficie neta de cimentación
G (ton/m <sup>2</sup> )	=	módulo de rigidez del suelo
H (metros)	=	profundidad de los depósitos firmes profundos, medida desde la superficie del terreno
I (m <sup>4</sup> )	=	momento de inercia de la superficie neta de cimentación con respecto a su eje centroidal perpendicular a la dirección que se analiza
J (ton m <sup>2</sup> )	=	momento de inercia neto del peso de la construcción con respecto al eje centroidal de su base y perpendicular a la dirección que se analiza, descontando el momento de inercia del peso del suelo desplazado por la infraestructura
K <sub>p</sub> (ton m)	=	rigidez de la cimentación al giro, debida a la rigidez axial de un sistema de pilotes de punta
K <sub>r</sub> (ton m/radián)	=	rigidez equivalente del suelo bajo una estructura, en rotación con respecto al eje centroidal de la base y perpen-

9  
76

dicular a la dirección que se analiza

(ton/m)	=	rigidez equivalente del suelo bajo una estructura, en dirección vertical
(ton/m)	=	rigidez equivalente del suelo bajo una estructura, en la dirección que se analiza
(ton m)	=	momento de volteo basal
(metros)	=	radio equivalente para cálculo de K <sub>r</sub>
(metros)	=	radio equivalente para cálculo de K <sub>x</sub> y de K <sub>y</sub>
(segundos)	=	periodo fundamental de vibración que tendría la estructura en la dirección que se analiza, si descansara sobre base rígida
(segundos)	=	periodo fundamental de vibración de la estructura calculado teniendo en cuenta la interacción de ésta con el terreno
(segundos)	=	periodo natural de vibración que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base sólo pudiera girar con respecto al eje centroidal horizontal perpendicular a la dirección que se analiza
(segundos)	=	periodo dominante más largo del terreno en el sitio de interés
(segundos)	=	periodo natural de vibración que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base sólo pudiera desplazarse en la dirección que se analiza
(toneladas)	=	valor de W al nivel de desplante de la estructura incluyendo el peso de sus cimientos y descontando el peso del suelo desplazado por la infraestructura

### A3 DEL TIPO DE ANALISIS

Solamente serán aplicables los métodos estático y dinámico a que se refiere la sección 2 de estas normas complementarias y con las limitaciones que allí se establecen.

### A4 ESPECTROS PARA DISEÑO SISMICO

Cuando se aplique el análisis dinámico modal que especifica la sección 9 de estas normas, se adoptará como ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico,  $a$ , expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, la que se especifica en la sección 3.

El periodo fundamental de vibración de la estructura se calculará teniendo en cuenta su interacción con el terreno, como se especifica en la sección A7.

Para estructuras ubicadas en sitios para los que se desconoce el periodo dominante más largo del sitio, el coeficiente  $c$  se obtiene del artículo 206 del Reglamento, salvo que en las partes sombreadas de la figura 3.1 se tomará  $c = 0.4$  para las estructuras del grupo B, y 0.6 para las del A. Para los sitios en que se desconoce dicho periodo,  $T_a$ ,  $T_b$  y  $r$  se consignan en la tabla 3.1. En sitios en que se conozca el periodo dominante más largo del terreno,  $T_s$ , y que se hallen en las partes sombreadas de la figura 3.1, también se adoptará  $c = 0.4$  para estructuras del grupo B, y 0.6 para las del A; fuera de las partes sombreadas se adoptará

$$c = \frac{1.6T_s}{4 + T_s^2}$$

para las estructuras del grupo B, y 1.5 veces este valor para las del A;  $T_s$  está en segundos; en estos sitios se tomará  $T_a = 0.64T_s$  en la zona II  $T_a = 0.35T_s$ , pero no menor que 0.64 seg en la III, y  $T_b = 1.2T_s$ , en ambas zonas. El valor de  $T_s$  se tomará de la figura A4.1 o se determinará a partir de ensayos y análisis de dinámica de suelos que tengan en cuenta la estratigrafía y propiedades locales del suelo y reciban aprobación del Departamento.

### A5 ANALISIS ESTATICO

Será aplicable el método que describe la sección 8 de las presentes normas siempre que la estructura no exceda de 60 m de alto, tomando en cuenta el valor aproximado

10  
77

del periodo fundamental de vibración de la estructura, con las siguientes salvedades:

I. En el cálculo del valor aproximado del periodo fundamental de vibración,  $T_1$ , se incluirán las contribuciones provenientes de interacción suelo-estructura debidas a desplazamiento horizontal y rotación de la base de la construcción. Tales contribuciones se calcularán como establece la sección A7 de las presentes normas.

II. Si  $T_1$  es menor o igual que  $T_b$ , se procederá; como en el inciso 1 de la sección 8 pero de tal manera que la relación  $V_o/W_o$  sea igual a  $a/Q'$ , calculándose  $a$  y  $Q'$  como se especifica respectivamente en las secciones A4 y 4 de las presentes normas.

III. Si  $T_1$  es mayor que  $T_b$ , se procederá como en el inciso II pero tomando las fuerzas laterales proporcionales al coeficiente que marca el párrafo c del inciso 2 de la sección 8.

IV. En el cálculo de sollicitaciones y fuerzas internas se tomarán en cuenta los efectos de desplazamientos y rotaciones de la base como lo especifica la sección A7 de estas normas, así como los debidos a las deformaciones axiales de muros y columnas cuando estos efectos sean significativos. No será necesario incluir estas contribuciones en la revisión de los estados límite de deformaciones laterales y de rotura de vidrios, mas sí en el cálculo de los efectos de segundo orden y en el de separaciones entre la construcción y sus linderos con predios vecinos o en juntas de construcción entre cuerpos de un mismo edificio.

## A6 ANALISIS DINAMICO

Serán aplicables los métodos que especifica la sección 9 de las presentes normas, con las siguientes salvedades:

Se tomará en cuenta la interacción suelo-estructura. Cuando se emplee el método de análisis modal se dará por satisfecho este requisito si se consideran los efectos de dicha interacción, como lo especifica la sección A7 de las presentes normas, en el periodo y forma del modo fundamental de vibración y en el factor  $Q'$  correspondiente según estipula la sección 4.

## A7 INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA

Como una aproximación a los efectos de interacción suelo-estructura será válido incrementar el periodo fundamental de vibración y los desplazamientos calculados en la estructura bajo la hipótesis de que ésta se apoya rigidamente en su base, de acuerdo con la siguiente expresión

$$T_1 = (T_o^2 + T_x^2 + T_r^2)^{1/2}$$

en que  $T_1$  es el periodo fundamental de vibración de la estructura en la dirección que se analiza corregido por interacción con el suelo,  $T_o$  el periodo fundamental que tendría la estructura si se apoyara sobre una base rígida,  $T_x$  el periodo natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base sólo pudiera trasladarse en la dirección que se analiza y  $T_r$  es el periodo natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base sólo pudiera girar con respecto a un eje horizontal que pasara por el centroide de la superficie de desplante de la estructura y fuera perpendicular a la dirección que se analiza. Podrán en este caso despreciarse los efectos de la interacción en los periodos superiores de vibración de la estructura.

Para el cálculo de  $T_x$  en la expresión que antecede se supondrá que el desplazamiento de la base está restringido por un elemento elástico cuya rigidez vale  $K_x$ , en ton/m:

$$T_x = 2\pi(W_o'/gK_x)^{1/2}$$

donde  $T_x$  está en segundos,  $W_o'$  es el peso neto de la construcción al nivel de su desplante, incluyendo el peso de los cimientos y descontando el del suelo que es desplazado por la infraestructura, en toneladas y  $g$  es la aceleración de la gravedad, en m/seg<sup>2</sup>. El valor de  $W_o'$  no se tomará menor de  $0.7 W_o$ . Para el cálculo de  $T_r$  se supondrá que la rotación de la base está restringida por un elemento elástico de rigidez  $K_r$ , en ton m/radián:

$$T_r = 2\pi(J/gK_r)^{1/2}$$

de  $T_r$  está en segundos y  $J$  es el momento neto de inercia del peso de la construcción, en ton m<sup>2</sup>, con respecto al eje de rotación, descontando el momento de inercia de la masa del suelo desplazado por la infraestructura. La diferencia no se tomará menor de 0.7 veces el momento de inercia calculado con el peso de la construcción.

Tratándose de construcciones que se apoyan sobre zapatas corridas con dimensión mayor en la dirección que se analiza o sobre losa o cascarón que abarque toda el área de cimentación, y que posean suficiente rigidez y resistencia para suponer que su base se desplaza como cuerpo rígido, los valores de  $K_x$  y  $K_r$  se obtendrán de la tabla A7.1, en que  $G$  es el módulo de rigidez medio, en ton/m, del estrato en que se apoya la construcción, y los valores equivalentes  $R_x$  y  $R_r$ , en metros, se calcularán empleando las expresiones:

$$R_x = (A/\pi)^{1/2}$$

$$R_r = (4I/\pi)^{1/4}$$

donde  $A$ , en m<sup>2</sup>, es el área de la superficie neta de cimentación, e  $I$ , en m<sup>4</sup>, es el momento de inercia de dicha superficie neta con respecto a su eje centroidal perpendicular a la dirección que se analiza.

Tratándose de construcciones suficientemente rígidas y resistentes, cimentadas sobre zapatas corridas con dimensión corta en la dirección que se analiza, y de construcciones sobre zapatas aisladas, los coeficientes  $K_x$  y  $K_r$  de cimentación se calcularán mediante las fórmulas:

$$K_x = \sum K_{x1}$$

$$K_r = \sum x_1^2 K_{r1}$$

donde  $i$  denota valores correspondientes a la zapata en cuestión;  $x_1$  es la distancia, en la dirección de análisis, desde el centroide de la zapata y el eje centroidal de la estructura de cimentación, y  $K_{x1}$  y  $K_{r1}$  se determinan de la tabla A7.1 empleando el valor de  $R_x$  que corresponde a la zapata en cuestión.

En el caso de cimentaciones sobre pilotes de punta, su influencia en el valor de  $K_r$  se considera con el segundo término de la expresión correspondiente de la tabla A7.1, empleando para el cálculo de  $K_r$  la siguiente expresión:

$$K_r = \sum_{i=1}^n k_{pi} d_i^2$$

en la que  $n$  es el número de pilotes, y  $k_{pi}$  y  $d_i$  son respectivamente la rigidez vertical y distancia del pilote  $i$ ésimo al eje centroidal de rotación.

En la verificación de que la estructura no alcanza los estados límite por desplazamientos laterales y por rotura de vidrios no será necesario tener en cuenta el desplazamiento y rotación de la base. Para el cálculo de efectos de segundo orden debe tenerse en cuenta dicha rotación, dada por  $M_o/K_r$ , en radianes, en que  $M_o$  es el momento de volteo que obra en la base de la estructura, en ton m; y en la revisión del estado límite por choques entre estructuras deben incluirse tanto los desplazamientos debidos a esta rotación como el desplazamiento de la base, dado por  $V_o/K_x$ , en metros, en que  $V_o$  es la fuerza cortante basal, en toneladas.

El módulo de rigidez medio,  $G$ , se determinará mediante pruebas dinámicas de campo o laboratorio. A falta de tales determinaciones se tomará

$$G = 2(H/T_o)^2$$

donde  $G$  está en ton/m<sup>2</sup>,  $T_o$  es el periodo dominante más largo del terreno, en segundos, en el sitio donde se halle la estructura y se obtendrá de la figura A4.1, y  $H$  es la profundidad, en metros, de los depósitos firmes profundos en dicho sitio, y se determinará a partir de estudios locales de mecánica de suelos o, si éstos son insuficientes para determinarla, se tomará de la figura A7.1. En los sitios donde no se conoce el valor de  $G$ , si  $G$  no se determina experimentalmente, se adoptará el valor que resulte más desfavorable entre los límites de 400 y 900 ton/m<sup>2</sup>.

Tabla A7.1 Valores de  $K_x$ ,  $K_r$  y  $K_v$

En la zona II

Profundidad de desplante(1)	$K_x$	$K_r$ (2)	$K_v$ Losa	$K_v$ Zapata
$\leq 1$ m	$11GR_x$	$7GR_r^3$	$20GR_x$	$12GR_x$
$\geq 3$ m	$16GR_x$	$11GR_r^3$	$29GR_x$	$20GR_x$

En la zona III

Profundidad de desplante(1)	$K_x$	$K_r$			$K_v$
		Sobre el terreno	Sobre pilotes de fricción (3)	Sobre pilotes de punta (4)	
$\leq 1$ m	$7GR_x$	$6GR_r^3$	$7GR_r^3$	$6GR_r^3 + \frac{1}{1/43GR_r^3 + 1/K_p}$	$12GR_x$
$\geq 3$ m	$8GR_x$	$9GR_r^3$	$11GR_r^3$	$9GR_r^3 + \frac{1}{1/43GR_r^3 + 1/K_p}$	$16GR_x$

1. Para profundidades de desplante intermedias entre 1 y 3 m interpólese linealmente entre los valores de la tabla.

2. Para estructuras cimentadas sobre pilotes o pilas en la zona II supóngase  $K_r$  infinita.

3. Si éstos son capaces de resistir por adherencia con el suelo circundante, al menos la mitad del peso bruto de la construcción incluyendo el de sus cimientos. Cuando tienen menos de esta capacidad, interpólese linealmente entre los valores consignados en la tabla.

4.  $K_p$  se calculará teniendo en cuenta los pilotes de punta que contribuyan a resistir el momento de volteo, calculando la rigidez de estos elementos ante fuerza axial como si su punta no se desplazara verticalmente.

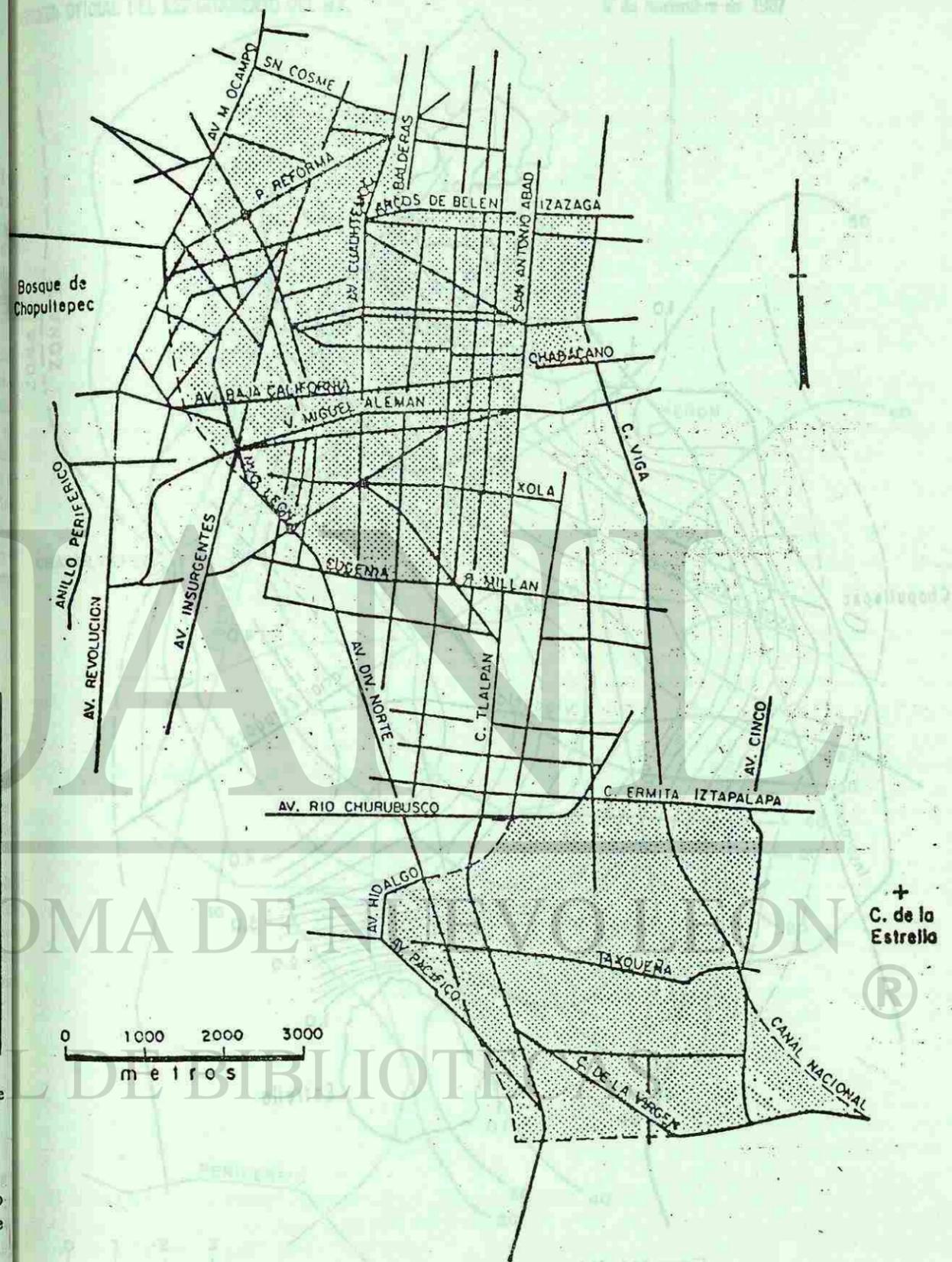


Figura 3.1 Subzonificación de la zona del lago y de la zona de transición.

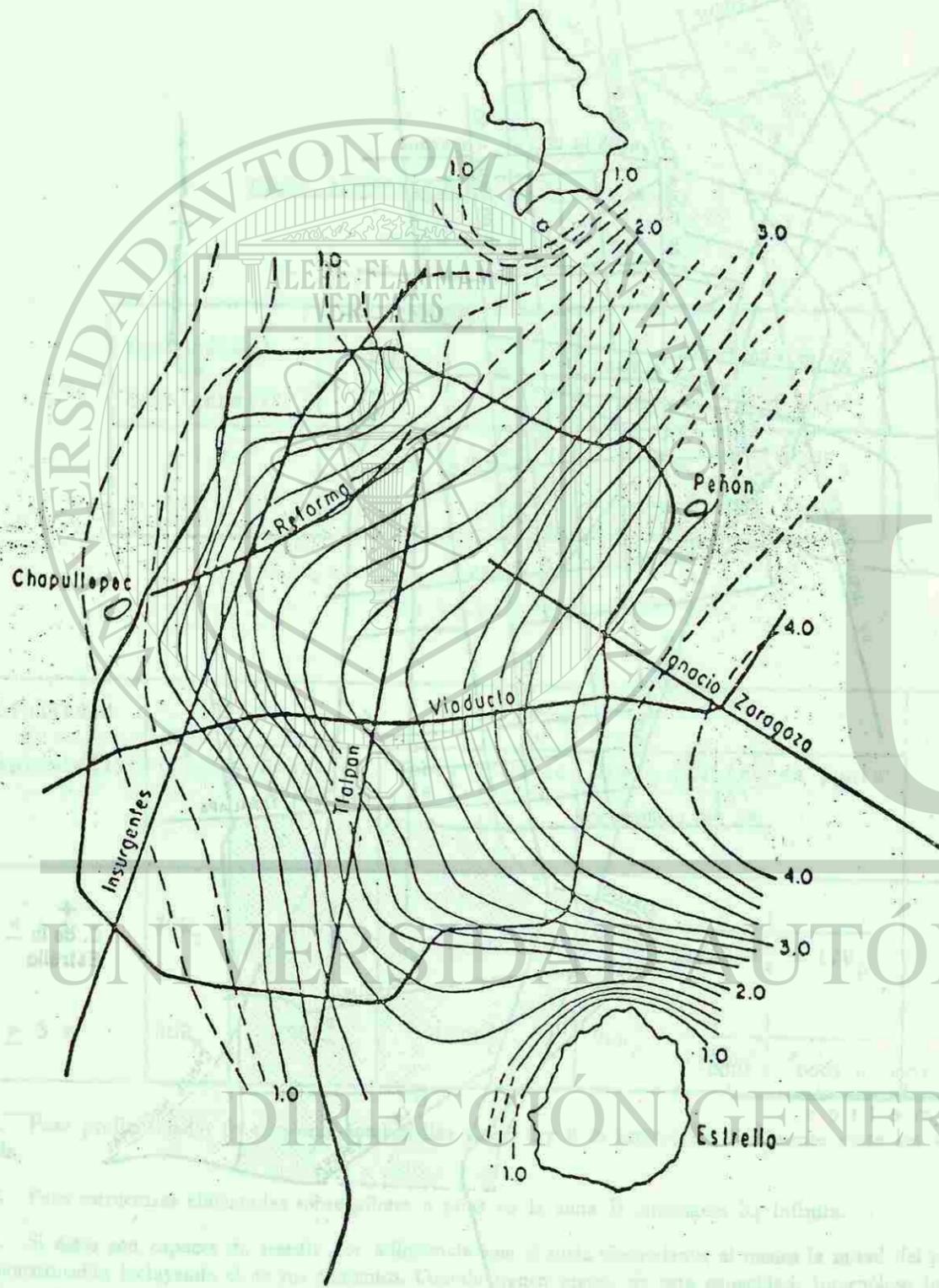


Figura A4.1 Valores de Ts en segundos.

82

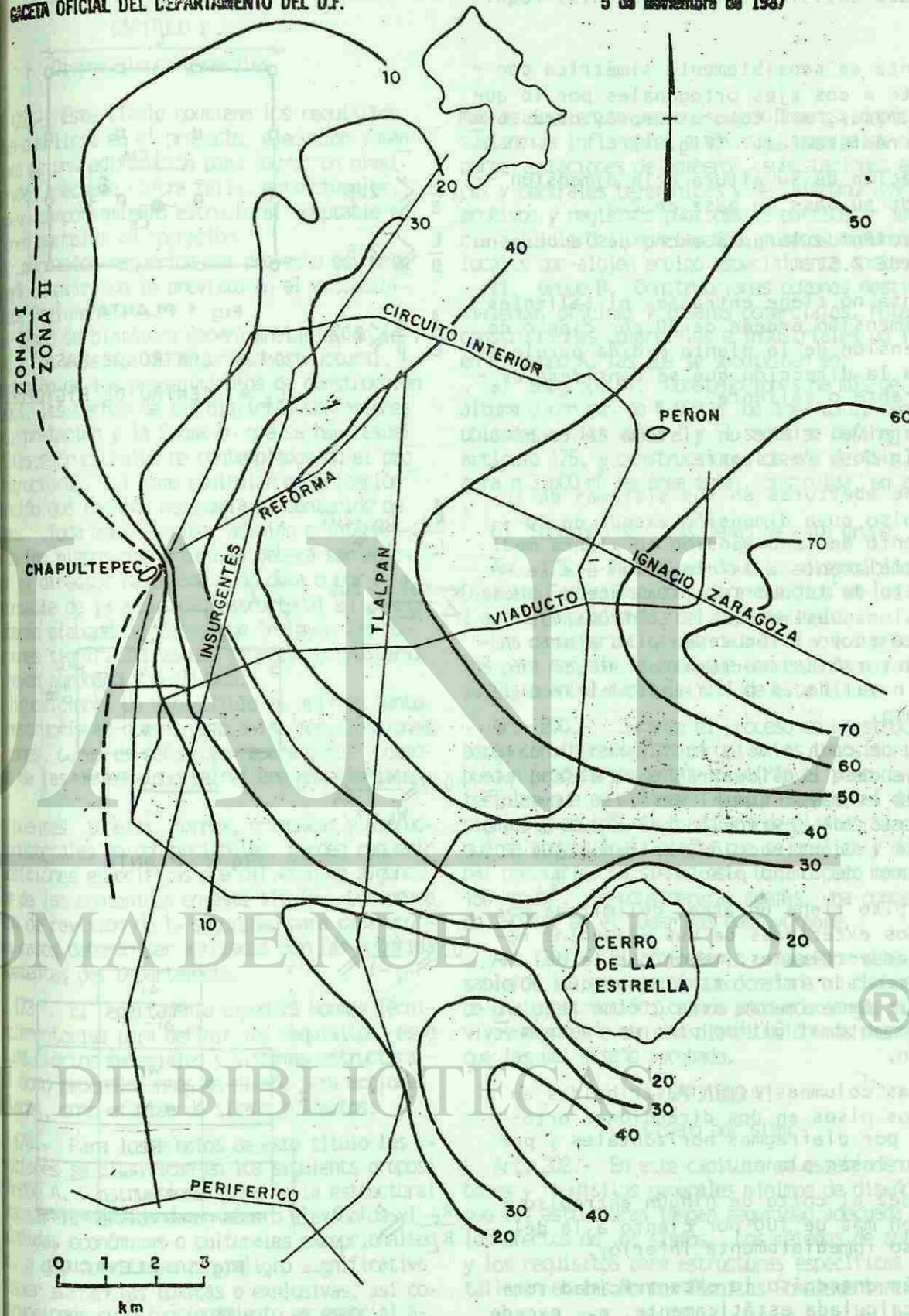


Figura A7.1 Valores de H en metros.

83

## CONDICIONES DE REGULARIDAD

Para que una estructura pueda considerarse regular debe satisfacer los siguientes requisitos:

1. Su planta es sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales por lo que toca a masas, así como a muros y otros elementos resistentes. (Fig. 1)
2. La relación de su altura a la dimensión menor de su base no pasa de 2.5.
3. La relación de largo a ancho de la base no excede de 2.5.
4. En planta no tiene entrantes ni salientes cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección que se considera de la entrante o saliente.
5. En cada nivel tiene un sistema de techo o piso rígido y resistente.
6. No tiene aberturas en sus sistemas de techo o piso cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión en planta medida paralelamente a la dimensión que se considera de la abertura, las áreas huecas no ocasionan asimetrías significativas ni difieren en posición de un piso a otro y el área total de aberturas no excede en ningún nivel de 20 por ciento del área de la planta.
7. El peso de cada nivel, incluyendo la carga viva que debe considerarse para diseño sísmico, no es mayor que el del piso inmediato inferior ni, excepción hecha del último nivel de la construcción, es menor que 70 por ciento de dicho piso.
8. Ningún piso tiene un área, delimitada por los paños exteriores de sus elementos resistentes verticales, mayor que la del piso inmediato inferior ni menor que 70% de ésta. Se exime de este último requisito únicamente al último piso de la construcción.
9. Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en dos direcciones ortogonales por diafragmas horizontales y por trabes o losas planas.
10. La rigidez al corte de ningún entrepiso excede en más de 100 por ciento a la del entrepiso inmediatamente inferior.
11. En ningún entrepiso la excentricidad torsional calculada estáticamente,  $e_s$ , excede del 10 por ciento de la dimensión en planta de ese entrepiso medida paralelamente a la excentricidad mencionada.

$$\frac{H}{B} \leq 2.5$$

$$\frac{L}{B} \leq 2.5$$

$$\frac{l}{L}; \frac{b}{B} \leq 20\%$$

$$\frac{l_o}{L}; \frac{b_o}{B} \leq 20\%$$

$$\sum \frac{b_{olo}}{A} \leq 20\%$$

$$0.7 \leq \frac{W_i}{W_{i-1}} \leq 1.0$$

$$0.7 \leq \frac{A_i}{A_{i-1}} \leq 1.0$$

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} \leq 1.0$$

$$e_s \leq 0.1 B$$

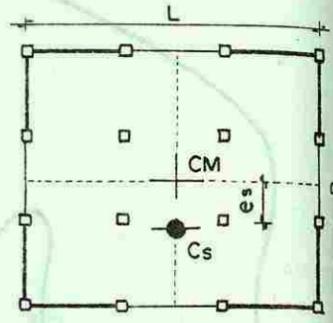


Fig. 1. PLANTA

CM = CENTRO DE MASA

Cs = CENTRO DE RIGIDEZ

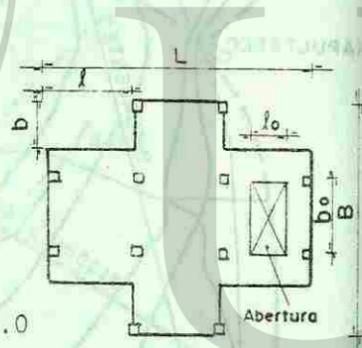


Fig. 2. PLANTA

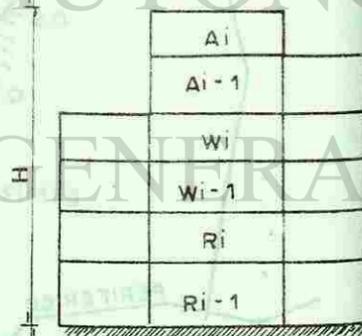


Fig. 3. ELEVACION

## TITULO SEXTO

### SEGURIDAD ESTRUCTURAL DE LAS CONSTRUCCIONES

#### CAPITULO I

##### Disposiciones generales

172.- Este título contiene los requisitos que deben cumplirse en el proyecto, ejecución y mantenimiento de una edificación para lograr un nivel de seguridad adecuado contra fallas estructurales, y un comportamiento estructural aceptable en condiciones normales de operación.

La documentación requerida del proyecto estructural deberá cumplir con lo previsto en el artículo 173 de este Reglamento.

El libro de bitácora deberá anotarse, en lo que respecta a los aspectos de seguridad estructural, la descripción de los procedimientos de construcción adoptados, las fechas de las distintas operaciones, la interpretación y la forma en que se han resuelto los problemas estructurales no contemplados en el proyecto estructural, así como cualquier modificación que resulte necesaria al contenido de los planos. Toda modificación, adición o interpretación de los planos estructurales deberá ser aprobada por el director responsable de obra o por el responsable de la seguridad estructural en su caso. Se deberán elaborar planos que incluyan las modificaciones significativas del proyecto estructural que hayan aprobado y realizado.

Las disposiciones de este título se aplican tanto a las construcciones nuevas como a las modificaciones, reparaciones y demoliciones de las obras a que se refiere este Reglamento. Los puentes, túneles, torres, chimeneas y estructuras industriales no convencionales, pueden requerir disposiciones específicas que difieran en algunos aspectos de las contenidas en este título. Los proyectos de revisión de la seguridad para cada uno de los casos deberán ser aprobados por las autoridades competentes del Departamento.

173.- El Departamento expedirá Normas Técnicas Complementarias para definir los requisitos especiales de ciertos materiales y sistemas estructurales, así como procedimientos de diseño para acciones sísmicas, como efectos de sismos y vientos.

174.- Para los efectos de este título las construcciones se clasifican en los siguientes grupos:  
Grupo A. Construcciones cuya falla estructural puede causar la pérdida de un número elevado de vidas, pérdidas económicas o culturales excepcionales, o que constituyan un peligro significativo para la salud pública, como construcciones que contengan sustancias tóxicas o explosivas, así como construcciones cuyo funcionamiento es esencial para una emergencia urbana, como hospitales y escuelas, estadios, templos, salas de espectáculos y hoteles que tengan salas de reunión que pueden alojar

más de doscientas personas; gasolineras, depósito de sustancias inflamables o tóxicas, terminales de transporte, estaciones de bomberos, subestaciones eléctricas y centrales telefónicas y de telecomunicaciones, archivos y registros públicos de particular importancia a juicio del Departamento, museos, monumentos y locales que alojen equipo especialmente costoso, y

II. Grupo B. Construcciones comunes destinadas a vivienda, oficinas y locales comerciales, hoteles y construcciones comerciales e industriales no incluidas en el Grupo A, las que se subdividen en:

a) Subgrupo B1. Construcciones de más de 30 m. de altura o con más de 6,000 m<sup>2</sup> de área total construida ubicadas en las zonas I y II según se definen en el artículo 175, y construcciones de más de 15 m. de altura o 3,000 m<sup>2</sup> de área total construida, en zona III, y

b) Subgrupo B2. Las demás de este grupo.

Art. 175.- Para fines de estas disposiciones, el Distrito Federal se considera dividido en las zonas I a III, dependiendo del tipo de suelo.

Las características de cada zona y los procedimientos para definir la zona que corresponde a cada predio se fijan en el capítulo VIII de este título.

Art. 200.- Durante el proceso de construcción de una obra se deberán considerar las cargas vivas transitorias que puedan producirse; éstas incluirán el peso de los materiales que se almacenen temporalmente, el de los vehículos y equipo, el de colado de plantas superiores que se apoyen en la planta que se analiza y del personal necesario, no siendo este último peso menor que 150 kg./m<sup>2</sup>. Se considerará, además, una concentración de 150 kg. en el lugar más desfavorable.

Art. 201.- El propietario o poseedor será responsable de los perjuicios que ocasione el cambio de uso de una construcción, cuando produzca cargas muertas o vivas mayores o con una distribución más desfavorable que las del diseño aprobado.

#### CAPITULO VI

##### Diseño por sismo

Art. 202.- En este capítulo se establecen las bases y requisitos generales mínimos de diseño para que las estructuras tengan seguridad adecuada ante los efectos de los sismos. Los métodos de análisis y los requisitos para estructuras específicas se detallarán en las Normas Técnicas Complementarias.

Art. 203.- Las estructuras se analizarán bajo la acción de dos componentes horizontales ortogonales no simultáneos del movimiento del terreno. Las deformaciones y fuerzas internas que resulten se combinarán entre sí como lo especifiquen las Normas Técnicas Complementarias, y se combinarán con los efectos de fuerzas gravitacionales y de las otras acciones que correspondan según los criterios que establece el capítulo III de este título.

Según sean las características de la estructura de que se trate, ésta podrá analizarse por sismo mediante el método simplificado, el método estático o uno de los dinámicos que describan las Normas Técnicas Complementarias, con las limitaciones que ahí se establezcan.

En el análisis se tendrá en cuenta la rigidez de todo elemento, estructural o no, que sea significativa. Con las salvedades que corresponden al método simplificado de análisis, se calcularán las fuerzas sísmicas, deformaciones y desplazamientos laterales de la estructura, incluyendo sus giros por torsión y teniendo en cuenta los efectos de flexión de sus elementos, y cuando sean significativos, los de fuerza cortante, fuerza axial y torsión de los elementos, así como los efectos de segundo orden, entendidos éstos como los de las fuerzas gravitacionales actuando en la estructura deformada ante la acción tanto de dichas fuerzas como de las laterales.

Se verificará que la estructura y su cimentación no alcancen ningún estado límite de falla o de servicio a que se refiere este Reglamento. Los criterios que deben aplicarse se especifican en este capítulo.

Para el diseño de todo elemento que contribuya en más de 35% a la capacidad total en fuerza cortante, momento torsionante o momento de volteo de un entrepiso dado, se adoptarán factores de resistencia 20% inferiores a los que le corresponderían de acuerdo con los artículos respectivos de las Normas Técnicas Complementarias.

Art. 204.- Tratándose de muros divisorios, de fachada o de colindancia, se deberán observar las siguientes reglas:

I.- Los muros que contribuyan a resistir fuerzas laterales se ligarán adecuadamente a los marcos estructurales o a castillos y dadas en todo el perímetro del muro, su rigidez se tomará en cuenta en el análisis sísmico y se verificará su resistencia de acuerdo con las normas correspondientes.

Los castillos y dadas a su vez estarán ligados a los marcos. Se verificará que las vigas o losas y columnas resistan la fuerza cortante, el momento flexionante, las fuerzas axiales y en su caso, las torsiones que en ellas induzcan los muros. Se verificará, asimismo, que las uniones entre elementos resistan dichas acciones, y

II.- Cuando los muros no contribuyan a resistir fuerzas laterales, se sujetarán a la estructura de

manera que no restrinjan su deformación en el plano del muro. Preferentemente estos muros serán de materiales muy flexibles o débiles.

Art. 205.- Para los efectos de este capítulo se considerarán zonas del Distrito Federal que fija el artículo 219 de este Reglamento.

Art. 206.- El coeficiente sísmico,  $c$ , es el coeficiente de la fuerza cortante horizontal que debe considerarse que actúa en la base de la construcción por efecto del sismo, entre el peso de ésta sobre dicho nivel.

Con este fin se tomará como base de la estructura el nivel a partir del cual sus desplazamientos con respecto al terreno circundante comienzan a ser significativos. Para calcular el peso total se tendrán en cuenta las cargas muertas y vivas que correspondan según los capítulos IV y V de este título. El coeficiente sísmico para las construcciones clasificadas como grupo B en artículo 174 se tomará igual a 0.16 en la zona I, 0.32 en la II y 0.40 en la III, a menos que emplee el método simplificado de análisis, en cuyo caso se aplicarán los coeficientes que fijan las Normas Técnicas Complementarias, y a excepción de las zonas especiales en las que dichas normas especifiquen otros valores de  $c$ . Para las estructuras del grupo A se incrementará el coeficiente sísmico en 50%.

Art. 207.- Cuando se aplique el método estático o un método dinámico para análisis sísmico, podrán reducirse con fines de diseño las fuerzas sísmicas calculadas, empleando para ellos los criterios que fijan las Normas Técnicas Complementarias, en función de las características estructurales y del terreno. Los desplazamientos calculados de acuerdo con estos métodos empleando las fuerzas sísmicas reducidas, deben multiplicarse por el factor de comportamiento sísmico que marquen dichas normas.

Los coeficientes que especifiquen las Normas Técnicas Complementarias para la aplicación del método simplificado de análisis tomarán en cuenta todas las reducciones que procedan por los conceptos mencionados. Por ello las fuerzas sísmicas calculadas por este método no deben sufrir reducciones adicionales.

Art. 208.- Se verificará que tanto la estructura como su cimentación resistan las fuerzas cortantes, momentos torsionantes de entrepiso y momentos de volteo inducidos por sismo combinados con los que correspondan a otras solicitaciones, y afectados del correspondiente factor de carga.

Art. 209.- Las diferencias entre los desplazamientos laterales de pisos consecutivos debidos a las fuerzas cortantes horizontales, calculadas con algunos de los métodos de análisis sísmico mencionado en el artículo 203 de este Reglamento, no excederán a 0.006 veces la diferencia de elevaciones correspondientes, salvo que los elementos incapaces de soportar deformaciones apreciables, como los muros de mampostería, estén separados de la estructura principal de manera que no

sean afectados por las deformaciones de ésta. En tal caso el límite en cuestión será de 0.012.

El cálculo de deformaciones laterales podrá emplearse cuando se aplique el método simplificado de análisis sísmico.

#### CAPITULO V Cargas vivas

198.- Se considerarán cargas vivas las fuerzas que se producen por el uso y ocupación de las construcciones y que no tienen carácter permanente. Cuando se justifiquen racionalmente otros valores, las cargas se tomarán iguales a las especificadas en el artículo 199.

Las cargas especificadas no incluyen el peso de los divisorios de mampostería o de otros materiales de muebles, equipos u objetos de peso común, como cajas fuertes de gran tamaño, archivos importantes, libreros pesados o cortinas en salas de espectáculos. Cuando se prevean cargas deberán cuantificarse y tomarse en cuenta en el diseño en forma independiente de la carga especificada. Los valores adoptados deberán indicarse en la memoria de cálculo e indicarse en los planos estructurales.

199.- Para la aplicación de las cargas vivas se deberá tomar en consideración las siguientes disposiciones:

La carga viva máxima  $W_m$  se deberá emplear para el diseño estructural por fuerzas gravitacionales y para el cálculo de asentamientos inmediatos en suelos, y en el diseño estructural de los cimientos por cargas gravitacionales;

La carga instantánea  $W_a$  se deberá usar para el diseño sísmico y por viento y cuando se revisen disposiciones de carga más desfavorable que la uniforme repartida sobre toda el área;

La carga media  $W$  se deberá emplear en el diseño y asentamiento diferidos y para el cálculo de las diferidas;

Cuando el efecto de la carga viva sea favorable a la estabilidad de la estructura, como en el caso de problemas de flotación, volteo y desbalanceo por viento, su intensidad se considerará nula sobre el área, a menos que pueda justificarse por el acuerdo con la definición del artículo 198 de este reglamento y

las cargas uniformes de la tabla siguiente se repartirán distribuidas sobre el área tributaria de cada elemento

#### RESERVACIONES A LA TABLA DE CARGAS VIVAS UNITARIAS

Para elementos con área tributaria mayor de  $36m^2$  podrá reducirse, tomándola igual a  $100 + 2(A)$  (A es el área tributaria en  $m^2$ ). Cuando sea más desfavorable se considerará en lugar de  $W_m$  una carga de 500Kg. aplicada sobre un área de  $50 \times 50$  cm. en la posición más crítica.

Para sistemas de piso ligero con cubierta rígida se considerará en lugar de  $W_m$ , cuando sea

más desfavorable, una carga concentrada de 250 Kg. para el diseño de los elementos de soporte de 100 kg. para el diseño de la cubierta en ambos casos ubicadas en la posición más desfavorable.

Se considerarán sistemas de piso ligero aquellos formados por tres o más miembros aproximadamente paralelos y separados entre sí no más de 80 cm. y unidos con una cubierta de madera contrachapada, de duelas de madera bien clavadas u otro material que proporcione una rigidez equivalente.

2. Para elementos con área tributaria mayor de  $36m^2$   $W_m$  podrá reducirse, tomándola igual a  $180 + 420 A - 1/2$  (A es el área tributaria en  $m^2$ ). Cuando sea más desfavorable se considerará en lugar de  $W_m$ , una carga de 1,000 kg. aplicada sobre un área de  $50 \times 50$  cm. en la posición más crítica.

Para sistemas de piso ligero con cubierta rigidizante definidos como en la nota (1), se considerará en lugar de  $W_m$  cuando sea más desfavorable, una carga concentrada de 500 kg. para el diseño de los elementos de soporte y de 150 kg. para el diseño de la cubierta, ubicadas en la posición más desfavorables.

3. En áreas de comunicación de casas de habitación y edificios de departamentos se considerará la misma carga viva que en el caso (A) de la tabla.

4. En el diseño de pretilas de cubiertas, azoteas y barandales para escaleras, rampas, pasillos y balcones, se supondrá una carga viva horizontal no menor de 100 Kg. sobre  $m^2$  actuando al nivel y en la dirección más desfavorable.

5.- En estos casos deberá prestarse particular atención a la revisión de los estados límite de servicio relativos a vibraciones

6.- Atendiendo al destino del piso se determinará con los criterios del artículo 187, la carga unitaria,  $W_m$ , que no será inferior a 350 kg. sobre  $m^2$  y deberá especificarse en los planos estructurales y en las placas metálicas colocadas en lugares fácilmente visibles de la construcción.

7.- Las cargas vivas especificadas para cubiertas y azoteas no incluyen las cargas producidas por tinacos y anuncios, ni las que se deben a equipos u objetos pesados que puedan apoyarse en o colgarse del techo estas cargas deben preverse por separado y especificarse en los planos estructurales. Adicionalmente los elementos de las cubiertas y azoteas deberán revisarse con una carga concentrada de 100 kg. en la posición más crítica.

8.- Además, en el fondo de los valles de techos inclinados se considerará una carga, debida al granizo de 30 kg. por cada  $m^2$  de proyección horizontal del techo que desague hacia el valle. Esta carga se considerará como un acción accidental para fines de revisión de la seguridad y se aplicaran los factores de carga correspondientes según el artículo 194.

9. Más una concentración de 1,500 kg. en el lugar más desfavorable del miembro estructural de que se trate.

TABLA DE CARGAS VIVAS UNITARIAS, EN kg/m<sup>2</sup>

Destino de piso o cubierta	W	Wa	Wm	Observaciones
a) Habitación (casa-habitación, departamentos, viviendas, dormitorios, cuartos de hotel, internados de escuelas, cuarteles, cárceles, correccionales, hospitales y similares).	70	90	170	(1)
b) Oficinas, despachos y laboratorios.	100	180	250	(2)
c) Comunicación para peatones (pasillos, escaleras, rampas, vestíbulos y pasajes de acceso libre al público).	40	150	350	(3) (4)
d) Estadios y lugares de reunión sin asientos individuales.	40	350	450	(5)
e) Otros lugares de reunión (templos, cines, teatros, gimnasios, salones de baile, restaurantes, bibliotecas, aulas, salas de juego y similares).	40	250	350	(5)
f) Comercios, fábricas y bodegas.	0.8Wm	0.9Wm	Wm	(6)
g) Cubiertas y azoteas con pendiente no mayor de 5%.	15	70	100	(4) (7)
h) Cubiertas y azoteas con pendiente mayor de 5%.	5	20	40	(4) (7) (8)
i) Volados en vía pública (marquesinas, balcones y similares).	15	70	300	
j) Garages y estacionamientos (para automóviles exclusivamente).	40	100	250	(9)

Art. 210.- En fachadas tanto interiores como exteriores, la colocación de los vidrios en los marcos o la liga de éstos con la estructura serán tales que las deformaciones de ésta no afecten a los vidrios. La holgura que debe dejarse entre vidrios y marcos o entre éstos y la estructura se especificará en las Normas Técnicas Complementarias.

Art. 211.- Toda construcción deberá separarse de sus linderos con los predios vecinos una distancia no menor de 5 cm. ni menor que el desplazamiento horizontal calculado se obtendrá con las fuerzas sísmicas reducidas según los criterios que fijan las Normas Técnicas Complementarias y se multiplicara por el factor de comportamiento sísmico marcado por dichas normas, aumentado en 0.001, 0.003 ó 0.006 de la altura de dicho nivel sobre el terreno en las zonas I, II o III respectivamente.

Si se emplea el método simplificado de análisis sísmico la separación mencionada no será en ningún nivel, menor de 5 cm. ni menor de la altura del nivel sobre el terreno multiplicada por 0.007, 0.009 ó 0.012 según que la construcción se halle en las zonas I, II o III, respectivamente.

La separación entre cuerpos de un mismo edificio o entre edificios adyacentes será cuando menos igual a la suma de las que de acuerdo con los párrafos precedentes corresponden a cada uno.

Se anotarán en los planos arquitectónicos y en los estructurales las separaciones que deben dejarse en los linderos y entre cuerpos de un mismo edificio.

Los espacios entre construcciones colindantes, entre cuerpos de un mismo edificio deben quedar libres de todo material. Si se usan tapajuntas, éstas deben permitir los desplazamientos relativos tanto en su plano como perpendicularmente a él.

Art. 212.- El análisis y diseño estructurales de puentes, tanques, chimeneas, silos, muros de retención y otras construcciones que no sean edificios, se harán de acuerdo con lo que marquen las Normas Técnicas Complementarias y, en los aspectos no cubiertos por ellas, se hará de manera congrua con ellas y con este capítulo, previa aprobación del Departamento.

CAPITULO VIII  
Diseño de cimentaciones

Art. 217.- En este capítulo se disponen los requisitos mínimos para el diseño y construcción de cimentaciones. Requisitos adicionales relativos a los métodos de diseño y construcción y a ciertos tipos específicos de cimentación se fijarán en las Normas Técnicas Complementarias de este Reglamento.

Art. 218.- Toda construcción se soportará por medio de una cimentación apropiada.

Las construcciones no podrán en ningún caso desplantarse sobre tierra vegetal, suelos o rellenos sueltos o desechos. Sólo será aceptable cimentar sobre terreno natural competente o rellenos artificiales que no incluyan materiales degradables

en sido adecuadamente compactados.

El suelo de cimentación deberá protegerse contra el deterioro por intemperismo, arrastre por flujo de superficies o subterráneas y secado local u operación de calderas o equipos similares.

Art. 219.- Para fines de este título, el Distrito Federal se divide en tres zonas con las siguientes características generales:

I.- Lomas, formadas por rocas o suelos generalmente firmes que fueron depositados fuera del ambiente lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente o intercalados, depósitos arenosos en suelos o cohesivos relativamente blandos. En esta zona es frecuente la presencia de oquedades en rocas, de cavernas y túneles excavados en suelos para las minas de arena;

II.- Transición, en la que los depósitos profundos se encuentran a 20 m. de profundidad, o menos, y está constituida predominantemente por estratos arenosos y limoarenosos intercalados con capas de arcilla lacustre; el espesor de éstas es variable entre unos centímetros y pocos metros, y

III.- Lacustre, integrada por potentes depósitos de arcilla altamente comprensible, separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas arenosas son de consistencia firme y dura y de espesores variables de centímetros a unos metros. Los depósitos lacustres suelen estar distribuidos superficialmente por suelos aluviales y rellenos artificiales; el espesor de este conjunto puede ser superior a 50 m.

En la zona a que corresponda un predio se determinará el tipo de las investigaciones que se realicen en el predio objeto de estudio, tal y como lo establezcan las Normas Técnicas Complementarias. En las construcciones ligeras o medianas, cuyas características se definan en dichas normas, podrá designarse la zona mediante el mapa incluido en las Normas Técnicas Complementarias. Si el predio está dentro de la porción zoniada, los predios ubicados a menos de 200 m. de las fronteras entre dos de las zonas antes descritas serán ubicados en la más desfavorable.

Art. 220.- La investigación del subsuelo del sitio deberá ser suficiente para definir de manera adecuada los parámetros de diseño de la cimentación y la variación de los mismos en la planta del edificio y los procedimientos de construcción. Además, se deberá ser tal que permita definir:

a) En la zona I a que se refiere el artículo 209 del Reglamento, si existen en ubicaciones de los materiales sueltos superficiales, grietas, fisuras naturales o galerías de minas, y en caso de existir su apropiado tratamiento, y

b) En las zonas II y III del artículo mencionado en la fracción anterior, la existencia de restos arqueológicos, cimentaciones antiguas, grietas, fisuras y otras anomalías fuertes de estratigrafía, historia de

carga del predio o cualquier otro factor que pueda originar asentamientos diferenciales de importancia, de modo que todo ello pueda tomarse en cuenta en el diseño.

Art. 221.- Deberán investigarse el tipo y las condiciones de cimentación de las construcciones colindantes en materia de estabilidad, hundimientos, emersiones, agrietamientos del suelo y desplomes y tomarse en cuenta en el diseño y construcción de la cimentación en proyecto.

Asimismo, se investigarán la localización y las características de las obras subterráneas cercanas, existentes o proyectadas, pertenecientes a la red de transporte colectivo, de drenaje y de otros servicios públicos, con objeto de verificar que la construcción no cause daños a tales instalaciones ni sea afectada por ellas.

Art. 222.- En las zonas II y III señaladas en el artículo 219 de este Reglamento, se tomará en cuenta la evolución futura del proceso de hundimiento regional que afecta a gran parte del Distrito Federal y se preverán sus efectos a corto y largo plazo sobre el comportamiento de la cimentación en proyecto.

EVOLUION LEÓN

TECAS

# 4.

## Análisis sísmico estático de edificios

### 4.1 ASPECTOS GENERALES

El reglamento permite, en su artículo 238, que el análisis sísmico de edificios con altura menor de 60 m se realice de acuerdo con el método estático, que se describe en el artículo 240.

La aplicación de este método consta esencialmente de los siguientes pasos:

- Se representa la acción del sismo por fuerzas horizontales que actúan en los centros de masas de los pisos, en dos direcciones ortogonales.
- Estas fuerzas se distribuyen entre los sistemas resistentes a carga lateral que tiene el edificio (muros y/o marcos).
- Se efectúa el análisis estructural de cada sistema resistente ante las cargas laterales que le correspondan.

En este capítulo se tratan los puntos *a* y *b*, ilustrándolos mediante ejemplos y tratando de incluir las diversas opciones que se consideran en el artículo 240. El punto *c* ha sido objeto de los capítulos 1 y 2 de este trabajo.

Como un caso particular del análisis estático, se incluye aquí lo que el Reglamento denomina método simplificado de análisis, cuya aplicabilidad y procedimiento se especifican en el artículo 239.

### 4.2 VALUACIÓN DE FUERZAS SÍSMICAS SIN ESTIMAR EL PERIODO FUNDAMENTAL DEL EDIFICIO

Según el inciso *I* del artículo 240, las fuerzas cortantes sísmicas en los diferentes niveles de una estructura pueden valuarse suponiendo un conjunto de fuerzas horizontales que actúan sobre cada uno de los

puntos donde se supongan concentradas las masas. La fuerza actuante donde se concentra una masa *i* es igual al peso de la misma,  $W_i$ , por un coeficiente proporcional a la altura  $h_i$  de la masa en cuestión sobre el desplante (o nivel a partir del cual las deformaciones estructurales pueden ser apreciables), sin incluir tanques, apéndices u otros elementos cuya estructuración difiera radicalmente del resto de la estructura. El factor de proporcionalidad se tomará de tal manera que la relación  $V/W$  en la base sea igual a  $c/Q$  pero no menor que  $a_0$ . Los valores de *c* y de  $a_0$  están dados en los artículos 234 y 236, respectivamente, y se repiten en la tabla 4.1 de esta publicación. *Q* es el factor de reducción por ductilidad que se escoge de acuerdo con el artículo 235.

Tabla 4.1 Valores de *c*,  $a_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  y *r*

Zona	<i>c</i>	$a_0$	$T_1$ (seg)	$T_2$ (seg)	<i>r</i>
I (terreno firme)	0.16	0.030	0.3	0.8	1/2
II (terreno de transición)	0.20	0.045	0.5	2.0	2/3
III (terreno compresible)	0.24	0.060	0.8	3.3	1

Notas:

- La zonificación del Distrito Federal en cuanto a tipos de terreno se hace en el art. 262. Existe también una zona IV; los sitios incluidos en esta zona se reclasificarán en alguna de las tres anteriores de acuerdo con lo estipulado en dicho artículo, salvo que para sitios que al reclasificarse resultan en la zona III el valor de  $T_2$  no se tomará menor que 5 seg a menos que se compruebe que es aplicable un valor menor. En ningún caso  $T_2$  será menor que el indicado en esta tabla para la zona correspondiente.
- Los valores de *c* corresponden a estructuras que según el art. 232 se clasifican como del grupo *B*, entre las que se encuentran edificios de habitación y oficinas. Para construcciones clasificadas en dicho artículo como del grupo *A*, como estaciones de bomberos y telefónicas, hospitales, escuelas y otras, los valores de *c* dados en esta tabla deben multiplicarse por 1.3. Lo mismo se aplica a los valores de  $a_0$ .

### 4.2.1 Edificios sin apéndices

En el caso en cuestión, la aplicación de lo estipulado en el artículo 240 conduce a que la fuerza horizontal  $P_i$  aplicada en el centro de masas del nivel *i* está dada por la fórmula

$$P_i = \frac{W_i h_i}{\sum W_j h_j} c_s \sum W_i \quad (4.1)$$

donde  $c_s$  es el mayor valor entre  $c/Q$  y  $a_0$ .

La aplicación de esta fórmula se ejemplifica en la tabla 4.2 para el edificio esquematizado en la figura 4.1. Se considera que la estructuración, los materiales y los detalles constructivos empleados son tales que el factor de ductilidad *Q* puede considerarse igual a 4 en la dirección *X*, e igual a 2 en la dirección *Y*. Obsérvese que los valores de *Q* no tienen que ser iguales en las dos direcciones, porque las estructuraciones pueden ser diferentes.

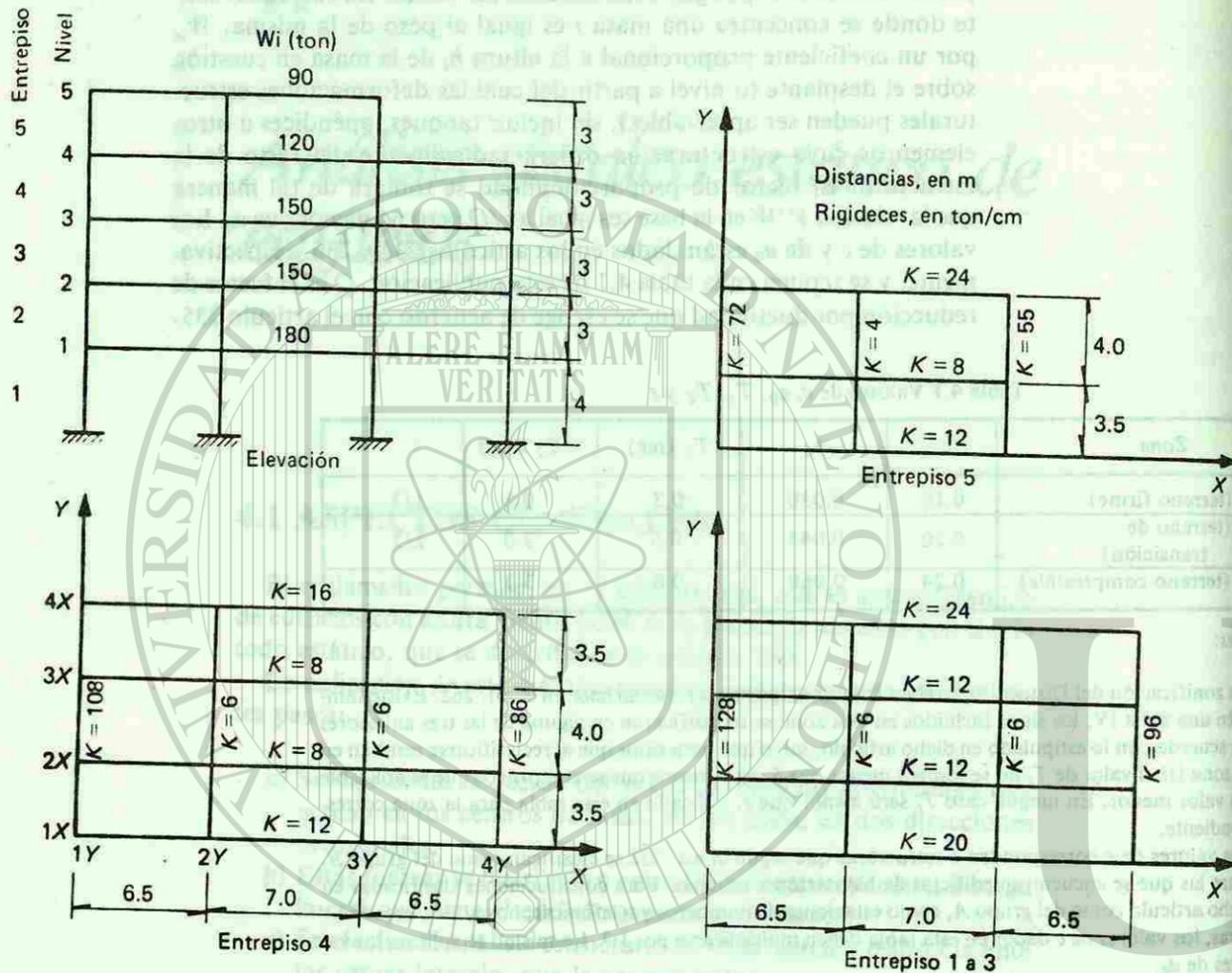


Figura 4.1 Datos para el ejemplo de análisis estático de la sección 4.2.1.

Se supondrá que la estructura está ubicada en la zona de terreno compresible (III) y que se trata de una construcción que por su importancia se clasifica como de tipo A.

Con estos datos, en la tabla 4.1 se encuentra que

$$c = 0.24 \times 1.3 = 0.312 ; a_0 = 0.06 \times 1.3 = 0.078$$

$$\text{en la dirección } X: c/Q = 0.312/4 = 0.078 = a_0$$

$$\text{en la dirección } Y: c/Q = 0.312/2 = 0.156 = a_0$$

Por tanto  $c_{sx} = 0.078$  y  $c_{sy} = 0.156$ . En la tabla 4.2 se presentan en forma sistematizada las operaciones para obtener las fuerzas cortantes en los entrepisos, así como su posición.

#### 4.2.2 Edificios con apéndices

En este caso no se aplica la fórmula 4.1 y para valuar las fuerzas en los pisos debe emplearse textualmente el párrafo I del artículo 240.

Tabla 4.2 Fuerza sísmica, cortante y posición de la cortante en cada piso del edificio de la figura 4.1

a) Dirección X									
Nivel o entrepiso	$W_i$	$h_i$	$W_i h_i$	$P_{ix}$	$V_{ix}$	$\bar{y}_i$	$P_{ix} \bar{y}_i$	$\Sigma P_{ix} \bar{y}_i$	$y_i$
5	90	16	1440	12.36	12.36	3.75	46.35	46.35	3.75
4	120	13	1560	13.39	25.75	5.50	73.65	120.00	4.66
3	150	10	1500	12.87	38.62	5.50	70.79	190.79	4.94
2	150	7	1050	9.01	47.63	5.50	49.55	140.34	5.05
1	180	4	720	6.18	53.81	6.30	38.93	279.27	5.19
Sumas	690		6270						

$$P_i = \frac{W_i h_i}{\Sigma W_i h_i} c_s \Sigma W_i ; y_i = \frac{\Sigma P_{ix} \bar{y}_i}{V_{ix}} ; c_{sx} = 0.078$$

b) Dirección Y									
Nivel o entrepiso	$W_i$	$h_i$	$W_i h_i$	$P_{iy}$	$V_{iy}$	$\bar{x}_i$	$P_{iy} \bar{x}_i$	$\Sigma P_{iy} \bar{x}_i$	$x_i$
5	90	16	1440	24.72	24.72	6.75	166.86	166.86	6.75
4	120	13	1560	26.78	51.50	9.20	246.37	413.23	8.02
3	150	10	1500	25.75	77.25	9.20	236.90	650.13	8.42
2	150	7	1050	18.02	95.27	9.20	165.78	815.91	8.56
1	180	4	720	12.36	107.63	8.50	105.06	921.08	8.56
Sumas	690		6270						

$$x_i = \frac{\Sigma P_{iy} \bar{x}_i}{V_{iy}} ; c_{sy} = 0.156$$

donde  $\bar{x}_i, \bar{y}_i$  son las coordenadas del centro de gravedad de cada piso, donde se suponen aplicadas las fuerzas  $P_i$ ; aquí se consideran datos. En esta tabla las unidades de fuerza son ton, y las de longitud son m.

Para determinar las fuerzas en un apéndice se debe aplicar el párrafo V del artículo 240, según el cual se supondrá actuando sobre dicho apéndice la misma distribución de aceleraciones que le correspondería si se apoya directamente en el suelo, multiplicada por  $(c' + a_0)/a_0$ , donde  $c'$  es el factor por el que se multiplica el peso del nivel de desplante del apéndice cuando se valúan las fuerzas sobre toda la construcción.

Para ilustrar los cálculos, considérese el edificio esquematizando en la figura 4.2; supóngase  $Q = 4$  y que se trata de una construcción del tipo B, desplantada en terreno firme. Con tales datos en la tabla 4.1 se encuentra

$$c = 0.16, a_0 = 0.03$$

El coeficiente sísmico es el mayor de  $0.16/4$  y  $0.03$ , es decir  $0.04$ . Esto quiere decir que  $V/W$  debe ser igual a  $0.04$ , estando incluidos en

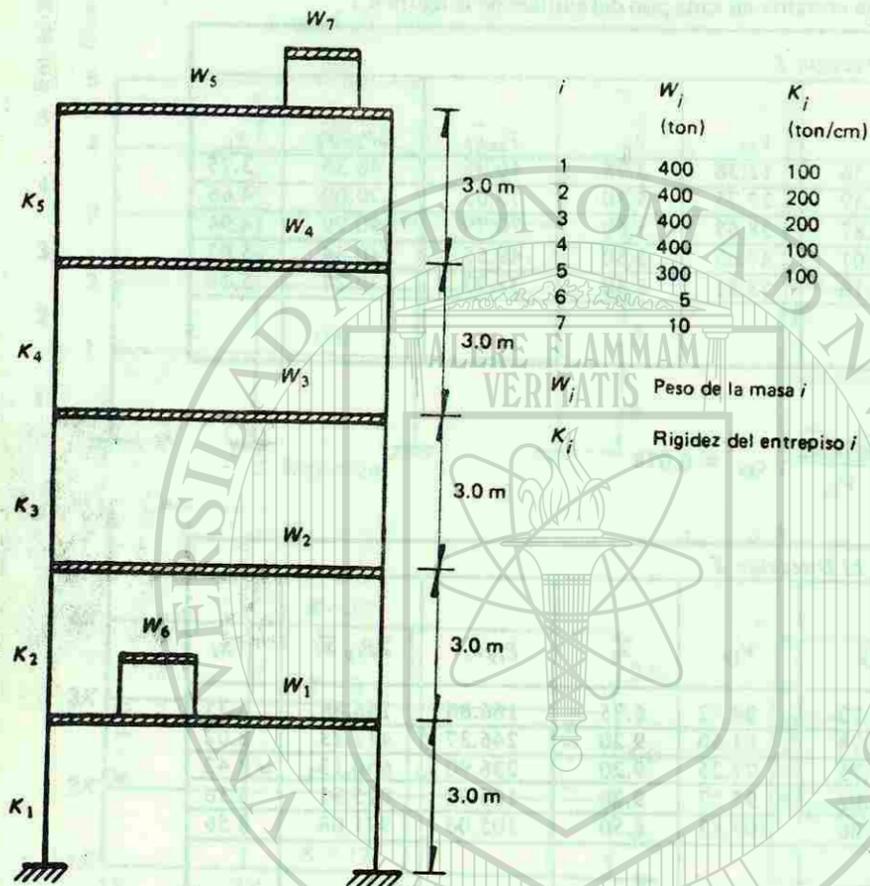


Figura 4.2 Edificio con apéndices.

V y en W las fuerzas laterales y los pesos, respectivamente, de los apéndices.

Las fuerzas sísmicas en los pisos 1 a 5 son proporcionales a los productos de los pesos  $W_i$  por las alturas  $h_i$ . Sea  $\alpha$  la constante de proporcionalidad, entonces

$$P_5 = \alpha W_5 h_5 = 300 \times 15 \alpha = 4500 \alpha$$

$$P_4 = \alpha W_4 h_4 = 400 \times 12 \alpha = 4800 \alpha$$

$$P_3 = \alpha W_3 h_3 = 400 \times 9 \alpha = 3600 \alpha$$

$$P_2 = \alpha W_2 h_2 = 400 \times 6 \alpha = 2400 \alpha \quad (4.2)$$

$$P_1 = \alpha W_1 h_1 = 400 \times 3 \alpha = 1200 \alpha$$

Si los apéndices estuviesen apoyados directamente en el suelo, tendrían unas fuerzas sísmicas iguales a

$$P'_6 = 0.04 W_6 = 0.04 \times 5 = 0.20$$

$$P'_7 = 0.04 W_7 = 0.04 \times 10 = 0.40 \quad (4.3)$$

94

Para el apéndice que pesa  $W_6$ , el valor de  $c'$  es el factor por el cual se multiplica  $W_1$  para obtener la fuerza  $P_1$ , es decir, según las expresiones 4.2,  $c'_6 = \alpha h_1 = 3\alpha$ . Análogamente, para el apéndice que pesa  $W_7$  se tiene  $c'_7 = \alpha h_5 = 15\alpha$ .

Las fuerzas de la expresión 4.3 tienen que multiplicarse por  $(c' + a_0)/a_0$ , como sigue:

$$\begin{aligned} P_6 &= 0.20 (3\alpha + 0.03)/0.03 = 20\alpha + 0.20 \\ P_7 &= 0.40 (15\alpha + 0.03)/0.03 = 200\alpha + 0.40 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para calcular  $\alpha$  se emplea la condición de que la suma de las fuerzas  $P_1$  a  $P_7$  entre la suma de los pesos  $W_1$  a  $W_7$  debe ser igual a 0.04. Usando las expresiones 4.2 y 4.4 se llega a:

$$16720\alpha + 0.6 = 0.04 (1915)$$

de donde

$$\alpha = 0.00454545$$

sustituyendo este valor en 4.2 y 4.4 se obtiene:

$$\begin{aligned} P_7 &= 1.31, & V_7 &= 1.31 \\ P_5 &= 20.45, & V_5 &= 21.76 \\ P_4 &= 21.82, & V_4 &= 43.58 \\ P_3 &= 16.36, & V_3 &= 59.94 \\ P_2 &= 10.91, & V_2 &= 70.85 \\ P_6 &= 0.29, & V_6 &= 0.29 \\ P_1 &= 5.49, & V_1 &= 76.63 \end{aligned}$$

los valores son toneladas y, como verificación  $V/W = 76.63/1915 = 0.04$ .

Cuando la masa de los apéndices es pequeña comparada con la que se concentra en los pisos, opcionalmente, se puede ignorar en primera instancia los apéndices y aplicar la expresión 4.1. Así se tiene:

$$c_s = 0.04, \quad V_{\text{total}} = 0.04 \times \Sigma W_i = 0.04 \times 1900 = 76 \text{ Ton}$$

$$\begin{aligned} W_5 h_5 &= 300 \times 15 = 4500; & P_5 &= 4500 \times 0.004606 = 20.73 \\ W_4 h_4 &= 400 \times 12 = 4800; & P_4 &= 4800 \times 0.004606 = 22.11 \\ W_3 h_3 &= 400 \times 9 = 3600; & P_3 &= 3600 \times 0.004606 = 16.58 \\ W_2 h_2 &= 400 \times 6 = 2400; & P_2 &= 2400 \times 0.004606 = 11.05 \\ W_1 h_1 &= 400 \times 3 = 1200; & P_1 &= 1200 \times 0.004606 = 5.53 \\ \Sigma &= 16500 & & 76.00 \end{aligned}$$

donde  $76/16500 = 0.004606$ .

Las fuerzas que corresponden a los apéndices como si estuviesen desplantados sobre el suelo se dan en la expresión 4.3. Para el apéndice

95

ce  $W_6$ ,  $c'$  es el factor por el que se multiplica  $W_1$  para obtener  $P_1$ , esto es  $c'_6 = P_1/W_1 = 5.53/400 = 0.0138$ . Similarmente para el apéndice  $W_7$ ,  $c'_7 = P_5/W_5 = 20.73/300 = 0.0691$ . Como  $a_0 = 0.03$ , los valores de 4.3 deben multiplicarse por  $(c' + 0.03)/0.03$ , es decir, por  $(0.0138 + 0.03)/0.03 = 1.46$  para  $W_6$ , y por  $(0.0691 + 0.03)/0.03 = 3.30$  para  $W_7$ ; se obtiene:

$$P_6 = 0.20 \times 1.46 = 0.29$$

$$P_7 = 0.40 \times 3.30 = 1.32$$

Comparando los valores  $P_1$  a  $P_7$  con los obtenidos considerando el factor de proporcionalidad,  $\alpha$ , se observa que son muy similares. Las fuerzas cortantes son ahora:

$$V_7 = 1.32$$

$$V_5 = 22.05$$

$$V_4 = 44.16$$

$$V_3 = 60.74$$

$$V_2 = 71.79$$

$$V_6 = 0.29$$

$$V_1 = 77.61$$

Se yerra ligeramente del lado de la seguridad puesto que  $77.61/1915 = 0.0405$  en vez de 0.04.

### 4.3 VALUACIÓN DE FUERZAS SÍSMICAS ESTIMANDO EL PERIODO FUNDAMENTAL DEL EDIFICIO

El párrafo II del artículo 240 permite usar fuerzas cortantes menores que las calculadas según lo descrito en la sección precedente. Para esto se requiere calcular el periodo fundamental de vibración del edificio  $T$ , en forma aproximada, con la expresión siguiente:

$$T = 6.3 \left\{ \frac{\sum W_i x_i^2}{g \sum P_i x_i} \right\}^{1/2} \quad (4.6)$$

en donde  $W_i$  es el peso de la masa  $i$ ,  $P_i$  la fuerza horizontal que actúa en ella de acuerdo con el procedimiento en que no se estima el periodo,  $x_i$  el desplazamiento correspondiente en la dirección de  $P_i$ , y  $g$  la aceleración de la gravedad.

De acuerdo con el valor resultante de  $T$ , se aplica una de las tres opciones siguientes:

- i) Si  $T_1 \leq T \leq T_2$  ( $T_1$  y  $T_2$  se dan en la tabla 4.1), no se permite reducción

- ii) Si  $T > T_2$  la fuerza lateral en la masa  $i$  es igual a

$$P_i = W_i (k_1 h_i + k_2 h_i^2) c/Q \quad (4.7)$$

siendo

$$k_1 = q \{1 - r(1 - q)\} \sum W_i / (\sum W_i h_i)$$

$$k_2 = 1.5 r q (1 - q) W_i / (\sum W_i h_i^2)$$

$$q = (T_2/T)^r$$

$Q$  factor de reducción por ductilidad

$h_i$  es nuevamente la altura de la masa  $i$  sobre el nivel de desplante, y  $r$ , el valor dado en la tabla 4.1.

- iii) Si  $T < T_1$  las fuerzas laterales son proporcionales a las obtenidas con el procedimiento en que no se estima el periodo, pero reducidas de tal manera que la relación  $V/W$  en la base sea igual a

$$c_{sr} = \{a_0 + (c - a_0) T/T_1\} / Q' \quad (4.8)$$

donde

$$Q' = 1 + (Q - 1) T/T_1$$

#### 4.3.1 Edificio tratado en la sección 4.2.1

Como ilustración se examinará si es posible reducir las fuerzas sísmicas obtenidas en el ejemplo de la sección 4.2.1, en la dirección  $Y$ . Partiendo de valores de las rigideces dados en la figura 4.1 y de los resultados obtenidos en la tabla 4.2, se presentan en la tabla 4.3 los cálculos necesarios para obtener  $T$ , según la fórmula 4.6.

El resultado es  $T = 0.51$  segundos, menor que  $T_1 = 0.8$  segundos (tabla 4.3), por lo que la relación  $V/W$  en la base se puede tomar igual a la dada por la expresión 4.8, donde hay que considerar  $a_0 = 0.06 \times 1.3 = 0.078$  y  $c = 0.24 \times 1.3 = 0.312$ .

Así se obtiene:

$$Q' = 1 + (2 - 1) \frac{0.51}{0.8} = 1.64$$

$$c_{sr} = \{0.078 + (0.312 - 0.078) 0.51/0.8\} / 1.64 = 0.139$$

Las fuerzas  $P_{iy}$  calculadas en la tabla 4.2 dan, para  $V/W$  en la base, el valor  $107.63/690 = 0.156$  (igual a  $c_{sy}$ ). Para que dicha relación valga 0.139 hay que multiplicar las  $P_{iy}$  por  $0.139/0.156 = 0.891$  y se obtienen así los valores reducidos de dichas fuerzas. Esta reducción

no modifica las posiciones de las cortantes, calculadas en la tabla 4.2, porque todas las fuerzas se multiplican por el mismo factor.

El periodo de este edificio en la dirección x resulta 0.97 segundos, y como se encuentra entre 0.8 y 3.3 segundos, no se admite reducción de las fuerzas sísmicas en esta dirección.

Tabla 4.3 Estimación del periodo fundamental de vibración del edificio de la figura 4.1 en la dirección y

Nivel o entrepiso	$W_i$ (ton)	$P_{iy}$ (ton)	$V_{iy}$ (ton)	$K_{iy}$ (ton/cm)	$V_{iy}/K_{iy}$ (cm)	$x_{iy}$ (cm)	$W_{iy} x_{iy}^2$ (ton-cm <sup>2</sup> )	$P_{iy} x_{iy}$ (ton-cm)
5	90	24.72	24.72	131	0.189	1.626	237.9	40.19
4	120	26.78	51.50	206	0.250	1.437	247.8	38.48
3	150	25.75	77.25	236	0.327	1.187	211.3	30.57
2	150	18.02	95.27	236	0.404	0.860	110.9	15.50
1	180	12.36	107.63	236	0.456	0.456	37.4	5.64
Sumas							845.3	130.38

$$T = 6.3 \left\{ \frac{\sum W_{iy} x_{iy}^2}{g \sum P_{iy} x_{iy}} \right\}^{1/2} = 0.51 \text{ seg, donde } g = 981 \text{ cm/seg}^2$$

Nota: Los valores  $V_i/K_{iy}$  son los desplazamientos de entrepiso que, acumulados, dan los desplazamientos totales  $x_{iy}$ .

#### 4.3.2 Edificio tratado en la sección 4.2.2

Para estimar el periodo de este edificio se ignoran las fuerzas y pesos de los apéndices. En la tabla 4.4 se presentan los cálculos que conducen a  $T = 1.17$  segundos, partiendo de los datos y resultados de la sección 4.2.2 y de la figura 4.2.

Como en este caso  $T_2 = 0.8$ , entonces  $T > T_2$  y se aplican las expresiones 4.7, en la forma presentada en la tabla 4.5.

Tabla 4.4 Estimación del periodo fundamental de vibración del edificio de la figura 4.2

Nivel o entrepiso	$W_i$ (ton)	$P_i$ (ton)	$V_i$ (ton)	$K_i$ (ton/cm)	$V_i/K_i$ (cm)	$x_i$ (cm)	$W_i x_i^2$ (ton-cm <sup>2</sup> )	$P_i x_i$ (ton-cm)
5	300	20.45	20.45	100	0.205	2.019	1223	41.29
4	400	21.82	42.27	100	0.423	1.814	1316	39.58
3	400	16.36	58.63	200	0.293	1.391	774	21.58
2	400	10.91	69.54	200	0.348	1.098	482	11.98
1	400	5.49	75.03	100	0.750	0.750	225	4.12
Sumas							4020	118.55

$$T = 6.3 \left\{ \frac{\sum W_i x_i^2}{g \sum P_i x_i} \right\}^{1/2} = 1.17 \text{ seg, donde } g = 981 \text{ cm/seg}^2$$

Nota: Los valores de  $V_i/K_i$  son los desplazamientos de entrepiso que acumulados dan desplazamientos totales  $x_i$ .

Tabla 4.5 Fuerzas sísmicas y cortantes en el edificio de la figura 4.1 con reducción por haber estimado su periodo fundamental

Nivel o entrepiso	$W_i$	$h_i$	$h_i^2$	$W_i h_i$	$W_i h_i^2$	$k_1 \frac{c}{Q} W_i h_i$	$k_2 \frac{c}{Q} W_i h_i^2$	$P_i$	$V_i$
5	300	15	225	4500	67500	15.66	3.13	18.79	18.79
4	400	12	144	4800	57600	16.70	2.67	19.37	38.16
3	400	9	81	3600	32400	12.53	1.50	14.03	52.19
2	400	6	36	2400	14400	8.35	0.67	9.02	61.21
1	400	3	9	1200	3600	4.18	0.17	4.35	65.56
Sumas	1900			16500	175500				

$$c = 0.16, r = 1/2, T_2 = 0.8 \text{ seg, } T = 1.17 \text{ seg, } Q = 4$$

$$q = (T_2/T)^r = 0.827$$

$$k_1 = q \{1 - r(1 - q)\} \sum W_i / (\sum W_i h_i) = 0.0870$$

$$k_2 = 1.5 r q (1 - q) \sum W_i / (\sum W_i h_i^2) = 0.00116$$

$$k_1 \frac{c}{Q} = 0.00348; k_2 \frac{c}{Q} = 0.0000464$$

Nota: Las unidades de fuerza son ton, y las de longitud son m.

#### 4.4 DISTRIBUCIÓN DE LAS FUERZAS SÍSMICAS ENTRE LOS ELEMENTOS RESISTENTES DEL EDIFICIO

En lo que sigue se describen dos procedimientos para distribuir las fuerzas sísmicas que actúan en los pisos de un edificio entre los diferentes elementos resistentes verticales (marcos y/o muros y/o contra-vientos). En ambos procedimientos se acepta la hipótesis de que los pisos son diafragmas rígidos en su plano, la que, como se comentó en la sección 3.3, puede ser inadmisibles en ciertos casos.

En este paso del análisis sísmico hay que considerar que el artículo 240 específica, en su párrafo VII, que el momento torsionante se tomará igual a la fuerza cortante de entrepiso multiplicada por la excentricidad que para cada marco resulte más desfavorable de las siguientes:  $1.5 e_s + 0.1 b$ , ó  $e_s - 0.1 b$ , donde  $e_s$  es la excentricidad torsional calculada en el entrepiso considerado y  $b$  es la máxima dimensión en planta de dicho entrepiso, medida perpendicularmente a la dirección del movimiento del terreno que se esté analizando.

También se debe tener presente que el artículo 237 estipula que las estructuras se analizarán bajo la acción de dos componentes horizontales ortogonales del movimiento del terreno, y que en cada sección crítica se debe considerar la suma vectorial de los efectos (desplazamientos y fuerzas internas) de un componente de movimiento del terreno con 0.3 de los efectos del otro, en adición a los efectos de fuerzas gravitatorias.

#### 4.4.1 Entrepisos con sistemas resistentes ortogonales

La figura 4.3 muestra, en planta, un entrepiso de un edificio en el cual se identifican con subíndices,  $x, y$ , los sistemas (marcos y/o muros) que resisten fuerzas paralelas a la dirección  $X, Y$ , respectivamente. La rigidez de entrepiso de cada elemento se designa por  $R_{jx}$  o  $R_{jy}$ . Se supone que éstas son conocidas. En general es posible usar valores aproximados para fines de una distribución preliminar y refinarlos teniendo en cuenta el sistema de fuerzas laterales obtenidas en cada elemento mediante la primera estimación de rigideces.

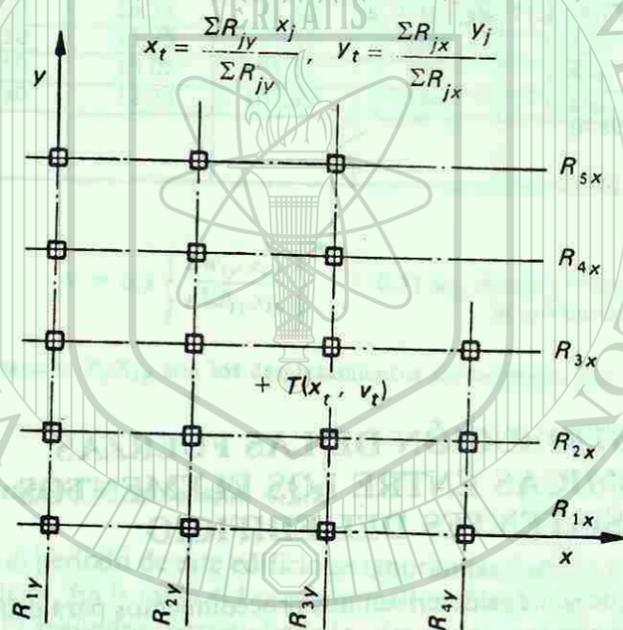


Figura 4.3 Elementos resistentes y centro de torsión.

El procedimiento de distribución de fuerzas sísmicas entre los elementos resistentes consiste en los siguientes pasos:

- La fuerza horizontal  $P_i$  aplicada en el centro de gravedad de cada nivel  $i$  se calcula como se describió en la sección 4.3.
- Se obtiene por equilibrio estático la línea de acción de la cortante sísmica en cada entrepiso para las dos direcciones ortogonales paralelas a los sistemas resistentes.
- Se calculan las rigideces de entrepiso de los elementos resistentes en ambas direcciones y en todos los entrepisos.
- Se determina la posición del centro de torsión en cada entrepiso. Este centro es el punto por el que debe pasar la línea de acción de la fuerza cortante sísmica para que el movimiento relativo de los dos niveles consecutivos que limitan el entrepiso sea exclusivamente de traslación. En caso contrario existe torsión o rotación relativa entre dichos niveles.

Las expresiones para calcular el centro de torsión son:

$$x_t = \frac{\sum (R_{jy} x_j)}{\sum R_{jy}} \quad (4.9)$$

$$y_t = \frac{\sum (R_{jx} y_j)}{\sum R_{jx}} \quad (4.10)$$

$x_j, y_j$  son las coordenadas de los elementos resistentes.

- e) La fuerza cortante que debe ser resistida por un elemento resistente cualquiera es igual a la suma de dos efectos: el debido a la fuerza cortante del piso, supuesta actuando en el centro de torsión, y el debido al momento torsionante del piso. Si la dirección analizada del sismo es paralela al eje  $x$ , se obtienen las cortantes siguientes

En los elementos resistentes 'x', por efecto de la fuerza cortante aplicada en el centro de torsión:

$$\frac{V_x R_{jx}}{\sum R_{jx}} \quad (4.11)$$

En los elementos resistentes  $x$ , por efecto de la torsión:

$$\frac{M_t R_{jx} y_{jt}}{(\sum R_{jx} y_{jt}^2 + \sum R_{jy} x_{jt}^2)} \quad (4.12)$$

En los elementos resistentes  $y$ , por efecto de la torsión:

$$\frac{M_t R_{jy} x_{jt}}{(\sum R_{jx} y_{jt}^2 + \sum R_{jy} x_{jt}^2)} \quad (4.13)$$

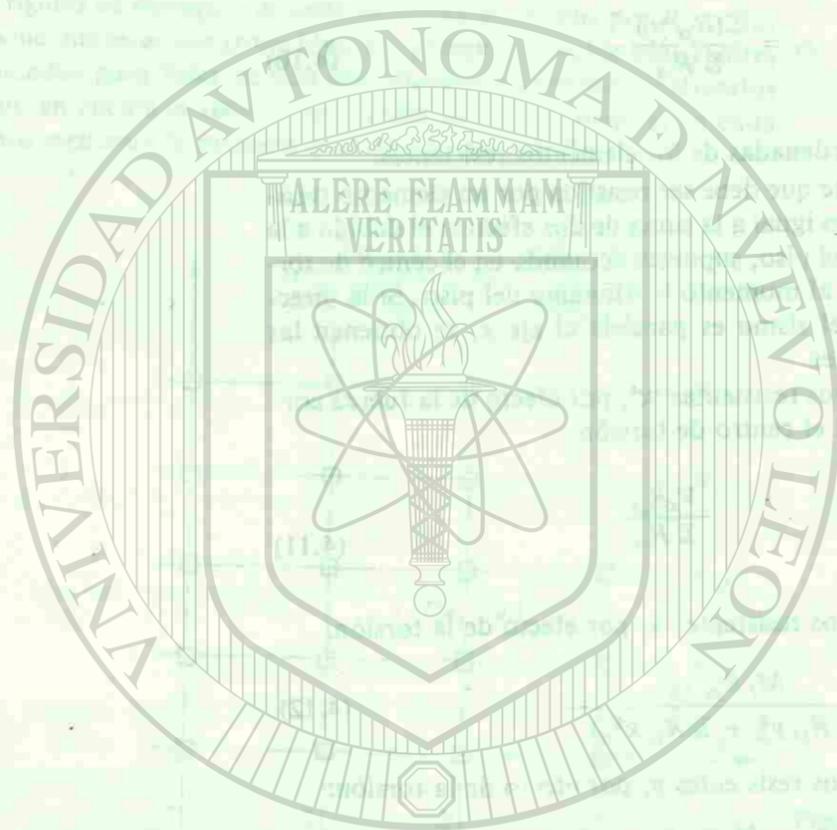
En las expresiones anteriores,

- $V_x, V_y$  fuerza cortante sísmica en el entrepiso considerado en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente.
- $x_{jt}, y_{jt}$  distancias de los elementos resistentes con respecto al centro de torsión del entrepiso en cuestión.
- $M_t$  Momento torsionante en el entrepiso considerado, que es igual al producto de la fuerza cortante en el entrepiso por la más desfavorable de las siguientes excentricidades.

$$e_1 = 1.5 e_s + 0.1 b \quad (4.14)$$

$$e_2 = e_s - 0.1 b \quad (4.15)$$

donde  $e_s$  es la excentricidad calculada como la distancia entre la línea de acción de la cortante y el centro de torsión, y  $b$  la mayor dimensión en planta del entrepiso medida perpendicularmente a la dirección del sismo. En la ecuación 4.14 a la excentri-



#### Distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos del edificio

idad calculada amplificada se le suma, en el mismo sentido, la excentricidad accidental  $0.1b$ . En la ecuación 4.15, en cambio, a la excentricidad calculada se le resta, en sentido contrario, la excentricidad accidental; puede ocurrir que en este caso la excentricidad resultante sea de signo opuesto al de la calculada. Para cada sistema plano deberá investigarse cuál de las dos excentricidades dadas por las ecuaciones 4.14 y 4.15 produce efectos más desfavorables.

- f) Para cada sistema plano deberán calcularse las fuerzas laterales debidas a la suma de 100 por ciento de los efectos debidos al sismo actuando en la dirección  $X$  con 30 por ciento de los efectos producidos por el sismo actuando en la dirección  $Y$  y viceversa. Rige el mayor de los resultados.
- g) Conocido el sistema de cargas que actúa en cada elemento resistente, éste se analiza de acuerdo con los métodos presentados en los capítulos 1 y 2, u otros similares.

#### 4.4.2 Ejemplo

Para ilustrar el procedimiento expuesto en la sección anterior, en la tabla 4.6 se presentan en forma esquematizada las operaciones para la obtención de fuerzas cortantes en los elementos resistentes de los entrepisos 4 y 3 del edificio mostrado en la figura 4.1. Nótese en la tabla 4.6 que para cada dirección del movimiento sísmico se calcularon dos excentricidades ( $e_1$  y  $e_2$ ) y dos momentos torsionantes ( $M_{11}$  y  $M_{12}$ ). En el entrepiso 4, para la dirección  $X$  se tiene  $e_1 = 3.11$  m,  $e_2 = 0.24$  m,  $M_{11} = 80.08$  ton-m y  $M_{12} = 6.18$  ton-m; como se aprecia en la figura 4.4 para los elementos  $1x$  y  $2x$ , en los cuales el efecto de torsión se suma al de traslación, se usó  $M_{11}$ ; en cambio para los sistemas  $3x$  y  $4x$ , en que ambos efectos son opuestos, se usó  $M_{12}$ . Para valuar los efectos del sismo en  $x$  en los marcos y siempre se usa el valor mayor de  $M_i$  (80.08 en este caso).

Para que las hipótesis de análisis se cumplan, es necesario que la losa sea capaz de resistir como diafragma las fuerzas que actúan sobre ella como consecuencia de su participación transmitiendo la fuerza sísmica a los sistemas resistentes. En el sistema  $1y$ , por ejemplo, las fuerzas cortantes en los entrepisos 3 y 4 son 52.14 y 36.76 ton; la fuerza que la losa transmite en el nivel 3 es por tanto  $52.14 - 36.76 = 15.38$  ton.

#### 4.4.3 Procedimiento matricial

Para aplicar al análisis sísmico de edificios los métodos de análisis tridimensional expuestos en el capítulo 3, hay que considerar las dos combinaciones de las excentricidades de las fuerzas cortantes y además la suma vectorial de los efectos de un componente del movimiento horizontal del terreno con 0.3 de los del otro. El procedimiento que a continuación se propone permite tomar en cuenta tales requisitos.

101

102

Tabla 4.6 Distribución de fuerzas cortantes en los elementos resistentes del edificio de la figura 4.1.

Entrepiso 4

Sentido		V	$e_s$	b	$e_1 = 1.5 e_s + 0.1 b$	$e_2 = e_s - 0.1 b$	$M_{r1} = Ve_1$	$M_{r2} = Ve_2$
x		25.75	1.34	11.00	3.11	0.24	80.08	6.18
y		51.50	0.91	20.00	3.37	-1.09	173.56	-56.14

$x_v = 8.02$  ;  $x_t = 8.93$  ;  $e_s = 6.00 - 4.66$   
 $y_v = 4.66$  ;  $y_t = 6.00$  ;  $e_s = 8.93 - 8.02$   
 $\Sigma R_{ix} y_{jt}^2 + \Sigma R_{iy} x_{jt}^2 = 20211.04$

Eje	$R_{jx}$	$Y_j$	$R_{jx} Y_j$	$Y_{jt}$	$R_{jx} Y_{jt}$	$R_{jy} Y_{jt}$	$R_{jx} Y_{jt}^2$	$R_{jy} Y_{jt}^2$	Directo	Torsión	Total	Efecto de $V_y$ Torsión	$V_x + 0.3 V_y$	$0.3 V_x + V_y$
1x	12	0.00	0.00	-6.00	-72.00	432.00	7.31	0.29	7.02	0.29	7.31	0.62	7.50	2.81
2x	8	3.50	28.00	-2.50	-20.00	50.00	4.76	0.08	4.68	0.08	4.76	0.17	4.81	1.60
3x	8	7.50	60.00	1.50	12.00	18.00	4.68	-0.004	4.68	-0.004	4.68	0.10	4.71	1.50
4x	16	11.00	176.00	5.00	30.00	400.00	9.36	-0.02	9.34	-0.02	9.34	0.69	9.55	3.49
Sumas	44		264.00			900.00							Rige	

$y_t = 264 = 6.00$   
 $x_t = 44 = 8.93$

Eje	$R_{jy}$	$X_j$	$R_{jy} X_j$	$X_{jt}$	$R_{jy} X_{jt}$	$R_{jx} X_{jt}$	$R_{jy} X_{jt}^2$	$R_{jx} X_{jt}^2$	Directo	Torsión	Total	Efecto de $V_x$ Torsión	$V_y + 0.3 V_x$	$0.3 V_y + V_x$
1y	108	0.00	0.00	-8.93	-964.44	8611.92	8.28	35.28	27.00	8.28	35.28	3.82	36.43	14.40
2y	6	6.50	39.00	-2.43	-14.58	35.40	1.50	1.63	1.50	0.13	1.63	0.06	1.65	0.55
3y	6	13.50	81.00	4.57	27.42	125.28	1.50	1.58	1.50	0.08	1.58	0.11	1.61	0.58
4y	86	20.00	1720.00	11.07	952.02	10538.44	21.50	24.14	21.50	2.64	24.14	3.77	25.27	11.01
Sumas	206		1840.00			19311.04							Rige	

Tabla 4.6 (Continuación)

Entrepiso 3

Sentido		V	$e_s$	b	$e_1 = 1.5 e_s + 0.1 b$	$e_2 = e_s - 0.1 b$	$M_{r1} = Ve_1$	$M_{r2} = Ve_2$
x		38.62	0.88	11.00	2.42	-0.22	93.46	-8.50
y		77.25	0.22	20.00	2.33	-1.78	179.99	-137.51

$x_v = 8.42$  ;  $x_t = 8.64$  ;  $e_s = 5.82 - 4.94$   
 $y_v = 4.94$  ;  $y_t = 5.82$  ;  $e_s = 8.64 - 8.42$   
 $\Sigma R_{ix} y_{jt}^2 + \Sigma R_{iy} x_{jt}^2 = 22468.08$

Eje	$R_{jx}$	$Y_j$	$R_{jx} Y_j$	$Y_{jt}$	$R_{jx} Y_{jt}$	$R_{jy} Y_{jt}$	$R_{jx} Y_{jt}^2$	$R_{jy} Y_{jt}^2$	Directo	Torsión	Total	Efecto de $V_y$ Torsión	$V_x + 0.3 V_y$	$0.3 V_x + V_y$
1x	20	0.00	0.00	-5.82	-116.40	677.45	11.36	0.46	11.36	0.46	11.82	1.89	12.09	4.44
2x	12	3.50	42.00	-2.32	-27.84	64.59	6.82	0.12	6.93	0.12	6.93	0.21	6.99	2.29
3x	12	7.50	90.00	1.68	20.16	33.87	6.82	0.01	6.83	0.01	6.83	0.15	6.88	2.20
4x	24	11.00	264.00	5.18	124.32	643.38	13.63	0.04	13.64	0.04	13.64	0.95	13.96	5.05
Sumas	68		396.00			1419.89							Rige	

$y_t = 99 = 5.82$   
 $x_t = 17 = 8.64$

Eje	$R_{jy}$	$X_j$	$R_{jy} X_j$	$X_{jt}$	$R_{jy} X_{jt}$	$R_{jx} X_{jt}$	$R_{jy} X_{jt}^2$	$R_{jx} X_{jt}^2$	Directo	Torsión	Total	Efecto de $V_x$ Torsión	$V_y + 0.3 V_x$	$0.3 V_y + V_x$
1y	128	0.00	0.00	-8.64	-1105.92	9555.15	8.46	50.36	41.90	8.46	50.36	4.39	51.68	19.50
2y	6	6.50	39.00	-2.14	-12.84	27.48	1.96	2.06	1.96	0.10	2.06	0.05	2.08	0.67
3y	6	13.50	81.00	4.86	29.16	141.72	1.96	2.17	1.96	0.17	2.17	0.12	2.21	0.77
4y	96	20.00	1920.00	11.36	1090.56	12388.76	31.42	37.79	31.42	6.37	37.79	4.33	39.09	15.67
Sumas	236		2040.00			22113.11							Rige	

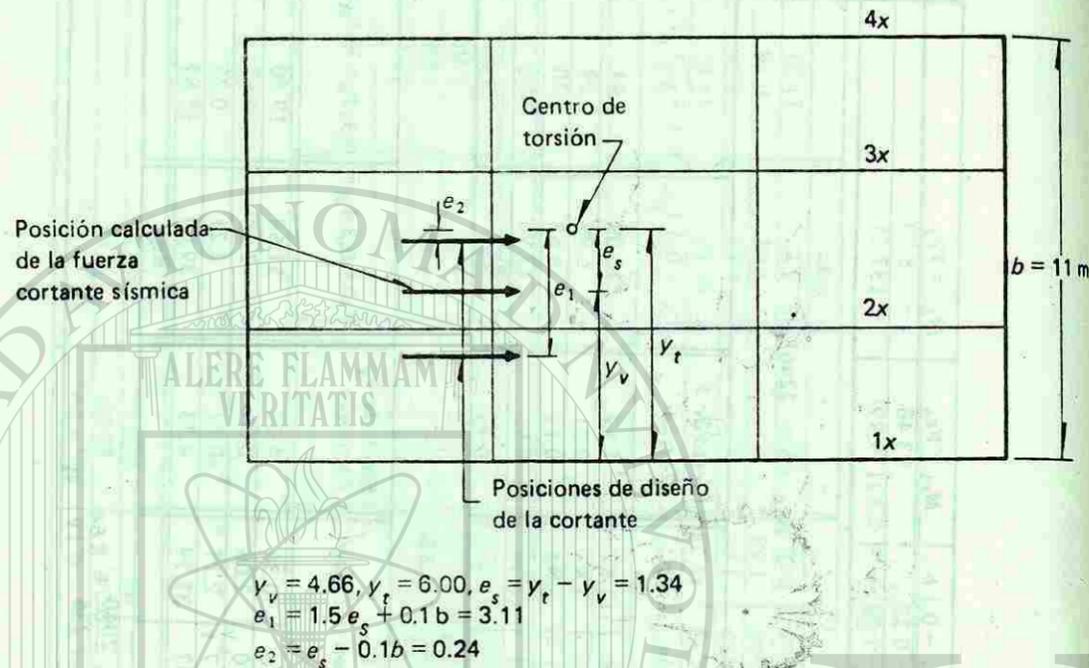


Figura 4.4 Posiciones de la fuerza cortante sísmica para calcular los momentos torsionantes de diseño (los valores numéricos corresponden al entrepiso 4 de la figura 4.1).

Considérese que la matriz de rigidez lateral del edificio  $K$  se ha partido en la forma:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L\theta} \\ \underline{K}_{L\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices  $L$  y  $\theta$  se refieren, respectivamente, a los desplazamientos laterales y a los giros de los pisos del edificio. Entonces se pueden seguir los pasos siguientes:

- a) Se escogen dos direcciones ortogonales ( $X$ ,  $Y$ ) en la planta del edificio.
- b) Para cada dirección:
  - b.1) Se determina la fuerza horizontal aplicada en el centro de masas de cada piso  $i$ , de acuerdo con lo descrito en la sección 4.3. Sea  $\underline{P}$  el vector formado por estas fuerzas.
  - b.2) Se calculan los desplazamientos laterales  $\delta_0$  del edificio, sin permitir giros horizontales en los niveles:

$$\delta_0 = \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{P}$$

- b.3) Se calculan los momentos debidos a la excentricidad directa, que valen:

$$\underline{M}_d = - \underline{K}_{L\theta}^T \delta_0$$

105

Distribución de las fuerzas sísmicas entre los elementos del edificio

y se acumulan para obtener los momentos torsionantes en los entrepisos  $M_{di}^*$ .

- b.4) Se calculan los momentos torsionantes accidentales en los entrepisos,  $M_{ai}^*$ . Para el entrepiso  $i$ , se tiene  $M_{ai}^* = 0.1 b_i V_i$ , donde  $b_i$  es la dimensión máxima de la planta  $i$  del edificio, medida perpendicularmente a la dirección en que están aplicadas las fuerzas sísmicas, y  $V_i$  la cortante en el entrepiso  $i$ .
- b.5) Para cada nivel  $i$  se calculan las siguientes combinaciones de momentos torsionantes:  $M_{1i}^* = 1.5 M_{di}^* + M_{ai}^*$  y  $M_{2i}^* = M_{di}^* - M_{ai}^*$ . Aquí  $M_{ai}^*$  tiene igual signo que  $M_{di}^*$ .
- b.6) Con los valores obtenidos en el paso anterior, se calculan los respectivos momentos en cada nivel  $\underline{M}_1$  y  $\underline{M}_2$ , de la misma manera en que se pueden calcular las fuerzas aplicadas en los niveles a partir de las fuerzas cortantes en los entrepisos; es decir, en cualquier nivel el momento aplicado es la diferencia entre el momento torsionante del entrepiso inferior y el de entrepiso superior.
- b.7) Se calculan los giros y desplazamientos que producen los momentos  $\underline{M}_1$  y  $\underline{M}_2$  resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L\theta} \\ \underline{K}_{L\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P} \\ \underline{M}_j \end{bmatrix}, j = 1, 2$$

- b.8) Las dos combinaciones de excentricidades exigidas se pueden considerar mediante las siguientes combinaciones de giros y desplazamientos:

Combinación    Desplazamientos    Giros

(1)             $\delta_0 + \delta_1$              $\theta_1$

(2)             $\delta_0 + \delta_2$              $\theta_2$

Para todos los niveles de cada sistema plano  $m$  se calculan los desplazamientos de entrepiso producidos por estas combinaciones y se escogen los que tengan mayor valor absoluto. Sea  $\underline{Z}_m^x$  el vector formado por estos valores cuando el sismo actúa en la dirección  $X$ , y  $\underline{Z}_m^y$  el correspondiente a la dirección  $Y$ .

- c) Para cada entrepiso  $i$  de cada sistema plano  $m$  se calculan

$$(\underline{Z}_{mi}^x + 0.3 \underline{Z}_{mi}^y)$$

$$(0.3 \underline{Z}_{mi}^x + \underline{Z}_{mi}^y)$$

Se considera el mayor de estos dos resultados como el desplazamiento del entrepiso  $i$ .

106

d) Acumulando los desplazamientos de entrepiso se obtienen los desplazamientos de los niveles, en cada sistema plano, y se calculan a partir de ellos los elementos mecánicos como se expuso en la sección 1.2.1.

En la referencia 29 se presenta, como apéndice, una manera eficiente para efectuar las operaciones matriciales que implican los pasos anteriores. Este procedimiento matricial requiere la ayuda de, cuando menos, una microcomputadora.

## 4.5 MÉTODO SIMPLIFICADO DE ANÁLISIS SÍSMICO

### 4.5.1 Requisitos y descripción

De acuerdo con el artículo 238 del R.D.F. es aceptable efectuar un análisis estático simplificado en estructuras que satisfagan simultáneamente los siguientes requisitos:

- I. En cada planta, al menos el 75 por ciento de las cargas verticales estarán soportadas por muros ligados entre sí mediante losas corridas. Dichos muros deberán ser de concreto, de mampostería de piezas macizas o de mampostería de piezas huecas que satisfagan las condiciones que establezca el Departamento del D.F. en las Normas Técnicas Complementarias.
- II. En cada nivel existirán al menos dos muros perimetrales de carga paralelos o que formen entre sí un ángulo no mayor de 20 grados, estando cada muro ligado por las losas antes citadas en una longitud de por lo menos 50 por ciento de la dimensión del edificio, medida en las direcciones de dichos muros.
- III. La relación entre longitud y anchura de la planta del edificio no excederá de 2.0, a menos que, para fines de análisis sísmico, se pueda suponer dividida dicha planta en tramos independientes cuya relación entre longitud y anchura satisfaga esta restricción y cada tramo resista según el criterio que marca el artículo 239 de este Reglamento.
- IV. La relación entre la altura y la dimensión mínima de la base del edificio no excederá de 1.5, y la altura del edificio no será mayor de 13 m.

Para aplicar el método simplificado, según lo prescrito en el artículo 239, se hará caso omiso de los desplazamientos horizontales, torsiones y momentos de volteo y se verificará únicamente que en cada piso la suma de las resistencias al corte de los muros de carga, proyectadas en la dirección en que se considera la aceleración, sea cuando menos igual a la fuerza cortante total que obre en dicho piso, calculada según se describió en la sección 4.1, pero empleando los coeficientes sísmicos reducidos que se indican en la tabla 4.7, y debiéndose verificar por lo menos dos direcciones ortogonales. Nótese que estos coeficientes ya incluyen el factor de reducción por ductilidad.

107

Tabla 4.7 Coeficientes sísmicos reducidos por ductilidad para el método simplificado.

Zona	Muros de piezas macizas Altura de la construcción			Muros de piezas huecas Altura de la construcción		
	Menor de 4 m	Entre 4 y 7 m	Entre 7 y 13 m	Menor de 4 m	Entre 4 y 7 m	Entre 7 y 13 m
I	0.06	0.08	0.08	0.07	0.11	0.11
II	0.07	0.08	0.10	0.08	0.11	0.13
III	0.07	0.09	0.10	0.08	0.10	0.12

Nota: Los valores se refieren a estructuras del grupo B, para estructuras del grupo A hay que multiplicar por 1.3 (ver nota de la tabla 4.1).

En el cálculo de las resistencias al corte, tratándose de muros cuya relación entre la altura de pisos consecutivos,  $h$ , y la longitud,  $L$ , exceda de 1.33, la resistencia se reducirá afectándola del coeficiente  $(1.33 L/h)^2$ .

### 4.5.2 Ejemplo

La figura 4.5 muestra esquemáticamente las plantas, alturas y pesos de un edificio al cual se tratará de aplicar el método simplificado.

Observando las plantas se aprecia que más del 75 por ciento de las cargas verticales están soportadas por muros de mampostería de piezas macizas. En la dirección  $Y$  existen dos muros perimetrales de 10 y 6 m respectivamente, que están ligados a la losa en una longitud mayor que  $0.5 \times 10 = 5$  m.

La relación entre la altura y la dimensión mínima de la planta es  $7/10 = 0.7$ , menor que 1.5, y la altura del edificio, 7 m, es menor que 13 m. Por tanto se puede aplicar el método simplificado.

Los cálculos necesarios en la dirección  $Y$  se pueden hacer como sigue:

- a) Considerando que la estructura es del grupo B, que se construirá sobre terreno correspondiente a la zona I, y que su altura es 7 m, en la tabla 4.7 se obtiene que el coeficiente sísmico, ya reducido por ductilidad, vale 0.08.
- b) Como no hay apéndices, el cálculo de fuerzas sísmicas se puede hacer con la expresión 4.1, como se muestra en la tabla 4.8. El cortante en la base es  $0.08 \times 132 = 10.56$  ton, y su valor último es  $V_u = 1.1 \times 10.56 = 11.62$  ton, donde 1.1 es el factor de carga especificado en el artículo 240.
- c) La longitud total de muros paralelos a la dirección  $Y$  es 27 m, de los cuales 24 m corresponden a muros con relación  $h/L$  menor que 1.33. En ellos el esfuerzo resistente, de acuerdo con el inciso 3.3 de la referencia 31, está dado por

$$V_R = F_R (0.7 v^*)$$

108

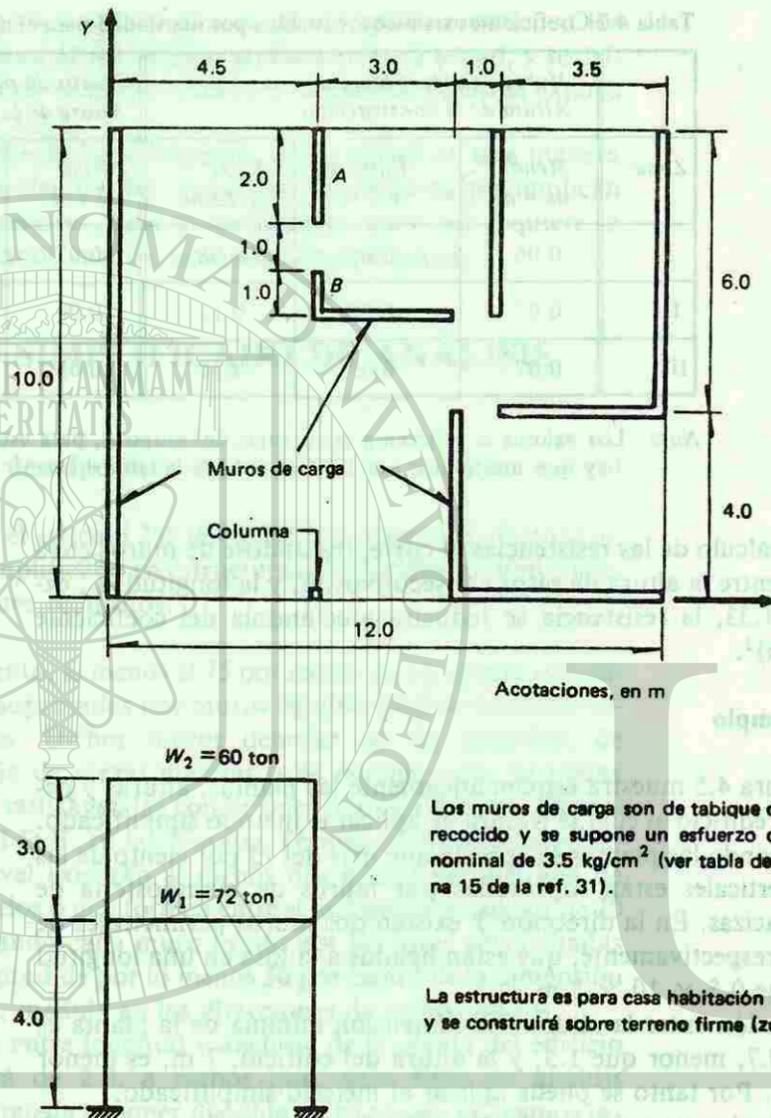


Figura 4.5 Edificio para ejemplificar el método simplificado de análisis sísmico.

donde  $F_R$  es el factor de reducción por resistencia, igual a 0.6. Para  $v^* = 3.5 \text{ kg/cm}^2$ , se obtiene  $v_R = 1.5 \text{ kg/cm}^2$ .

En el muro A (figura 4.5), en planta baja,  $h/L = 4.0/2.0 = 2.0 > 1.33$ , por tanto el esfuerzo resistente vale  $1.5 \times (1.33 \times 1/2)^2 = 0.66 \text{ kg/cm}^2$ . En el muro B,  $h/L = 4.0/1.0 = 4.00 > 1.33$  y el esfuerzo resistente es  $1.5 (1.33 \times 1/4)^2 = 0.17 \text{ kg/cm}^2$ .

La capacidad total es por tanto

$$(2400 \times 1.5 + 100 \times 0.66 + 100 \times 0.17)14 = 51490 \text{ kg} = 51.49 \text{ ton}$$

que es mayor que 11.62. Como la planta alta es igual a la baja, es innecesario revisarla puesto que la fuerza cortante actuante es menor.

109

Efectos de segundo orden y revisión de desplazamientos

Tabla 4.8 Cálculo de fuerzas sísmicas y cortantes para el ejemplo de la sección 4.5.2

Nivel o entrepiso	$W_i$ (ton)	$h_i$ (m)	$W_i h_i$ (ton-m)	$P_i$ (ton)	$V_i$ (ton)
2	60	7	420	6.26	6.26
1	72	4	288	4.30	10.56
Sumas	132		708		

De manera análoga se revisará el efecto sísmico en la dirección X, que es más crítica por la menor longitud de muros. Se encontrará que la resistencia es suficiente, también en esa dirección.

4.6 EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN Y REVISIÓN DE DESPLAZAMIENTOS

El párrafo II del artículo 237 especifica que deberán tomarse en cuenta efectos de segundo orden (también conocidos como efectos de esbeltez) cuando la deformación total de un entrepiso dividida entre su altura, medida de piso a piso, sea mayor que 0.08 veces la relación entre la fuerza cortante del entrepiso y las fuerzas verticales debidas a acciones permanentes y variables que obren encima de éste. Aunque no lo estipula el Reglamento, es recomendable proporcionar al edificio rigidez suficiente para que la relación citada sea menor que 0.08, con lo cual los efectos de segundo orden pueden desprejarse. En cualquier caso debe evitarse que dicha relación exceda de 0.20, porque en caso contrario los problemas de esbeltez serían muy serios y no es confiable determinar sus consecuencias con los procedimientos del Reglamento. Se entenderá por análisis de segundo orden el que suministre las fuerzas internas y deformaciones teniendo en cuenta la contribución de la acción de las fuerzas actuantes sobre la estructura deformada, así como la influencia de la carga axial en las rigideces. Para valuar los efectos de segundo orden, se aplicarán los procedimientos prescritos en las Normas Técnicas Complementarias.

Cuando las relaciones de esbeltez de las columnas son menores que 100, uno de los procedimientos aproximados que aceptan las Normas Técnicas Complementarias para estructuras de concreto y estructuras metálicas (referencias 32 y 33) consiste en multiplicar los momentos en las columnas y los desplazamientos debidos a carga lateral, obtenidos con un análisis convencional, por el factor de amplificación.

$$f_a = 1 + \frac{W_u/h}{R/Q - 1.2 W_u/h}$$

110

Donde  $R$  es la rigidez del entrepiso considerado (suma de rigideces de entrepiso de todos los marcos de la estructura en la dirección analizada;  $W_u$  es la suma de las cargas de diseño muertas y vivas multiplicadas por el factor de carga correspondiente, acumuladas desde el extremo superior del edificio hasta el entrepiso considerado;  $Q$  es el factor de ductilidad y  $h$  la altura del entrepiso.

Este procedimiento da resultados muy precisos cuando se considera comportamiento elástico. Para elementos muy esbeltos el Reglamento exige la aplicación de métodos más refinados, pero es preferible no caer en estas situaciones y limitar la esbeltez a valores moderados.

A continuación se revisa por este concepto el entrepiso cuarto del edificio mostrado en la figura 4.2. Ignorando los apéndices, según lo descrito en la forma opcional presentada en la sección 4.2.2 se tiene:

$$V = 20.73 + 22.11 = 42.84 \text{ ton.}$$

Obran sobre este piso  $W = 300 + 400 = 700$  ton de carga vertical. Como la rigidez de entrepiso (figura 4.2) vale 100 ton/cm, el desplazamiento lateral es  $42.84/100 = 0.43$  cm; este resultado debe multiplicarse por  $Q$ , que en este caso es 4; es decir para la revisión se utilizará  $d = 0.43 \times 4 = 1.72$  cm. Hay que comparar  $d/h = 1.72/300 = 0.00573$  con  $0.08 V/W = 0.08 \times 42.84/700 = 0.0049$ . Como 0.00573 es mayor que 0.00490, hay que considerar efectos de segundo orden.

Como  $W_u = 1.1 \times 700 = 770$  queda

$$f_a = 1 + \frac{770/300}{100/4 - 1.2 \times 770/300} = 1.12$$

Entonces los desplazamientos de cada marco de este entrepiso se tomarán iguales a 1.12 veces los valores obtenidos en el análisis sin considerar los efectos de esbeltez. Los momentos en las columnas también deberán multiplicarse por  $f_a$  y los elementos en las vigas tendrán que corregirse proporcionalmente a sus rigideces angulares para que se satisfaga el equilibrio de momentos en cada nudo.

Según el artículo 242, las deformaciones laterales de cada entrepiso debidas a fuerzas cortantes no excederán de 0.008 veces la diferencia de elevaciones correspondientes, salvo donde los elementos que no formen parte integrante de la estructura estén ligados a ella en tal forma que no sufran daños por las deformaciones de ésta. En este caso, el límite en cuestión deberá tomarse igual a 0.016. En el cálculo de los desplazamientos se tomará en cuenta la rigidez de todo elemento que forme parte integrante de la estructura.

En este ejemplo la deformación lateral relativa es  $1.72 \times 1.12/300 = 0.00642$ , que no excede ninguno de los límites mencionados en el párrafo anterior.

111

## 4.7 MOMENTOS DE VOLTEO

El párrafo VI del artículo 240 estipula que cuando se hace un análisis estático, el momento de volteo para cada marco o grupo de elementos resistentes en un nivel dado podrá reducirse, tomándolo igual al calculado multiplicado por  $0.8 + 0.2z$  (siendo  $z$  la relación entre la altura a la que se calcule el factor reductivo por momento de volteo y la altura total de la construcción), pero no menor que el producto de la fuerza cortante en el nivel en cuestión multiplicada por su distancia al centro de gravedad de la parte de la estructura que se encuentre por encima de dicho nivel. En péndulos invertidos no se permite reducción de momento de volteo.

Para ejemplificar el cálculo de momento de volteo, de acuerdo con lo anterior, considérese el marco de la figura 4.6, tomado de la referencia 34. En la tabla 4.9 se presentan los cálculos correspondientes. En esta tabla,  $M_v$  es el momento de volteo sin reducir;  $j$  el factor reductivo especificado en el párrafo VI del artículo 240;  $y_g$  es la distancia del nivel considerado al centro de gravedad de la parte de la estructura por encima de dicho nivel. En este caso, el valor de  $V y_g$  rige sobre  $j M_v$  para el diseño en todos los niveles.

## 4.8 COMENTARIOS

Aunque a la letra el Reglamento permite emplear el método estático de análisis sísmico, en cualquier edificio de 60 m, o menos, metros de altura, no es recomendable aplicarlo a edificios que tengan distribuciones irregulares en elevación ya que, en comparación con resultados de análisis dinámicos, se ha encontrado que se pueden subestimar apreciablemente las cortantes en ciertos entrepisos (referencia 81). Se recomienda en este caso recurrir al análisis dinámico (véanse los capítulos 4 y 5).

La mayor parte del esfuerzo adicional que se requiere para estimar el periodo fundamental del edificio es el cálculo de los desplazamientos laterales, que de todos modos debe hacerse para revisar si los mismos no son excesivos. Por tal motivo es aconsejable tratar de aprovechar la opción de usar fuerzas sísmicas reducidas en razón de haber evaluado el periodo natural, y pueden lograrse reducciones importantes si los periodos son relativamente cortos o largos.

En los ejemplos presentados en este capítulo la combinación de los efectos de un componente del movimiento del terreno con 30 por ciento de los efectos del otro, se ha realizado a nivel de fuerzas cortantes. Esto da los resultados adecuados para el diseño de miembros que trabajan esencialmente en el plano en el que están actuando dichas cortantes, como vigas y muros. Sin embargo para las columnas o elementos similares, que tienen flexiones importantes en dos planos verticales ortogonales, no es fácil determinar qué combinación de los efectos de los componentes del temblor es la que rige el diseño, y es en rigor necesario analizar todo el edificio para el sismo actuando en una dirección y luego, separadamente, para el sismo ac-

112

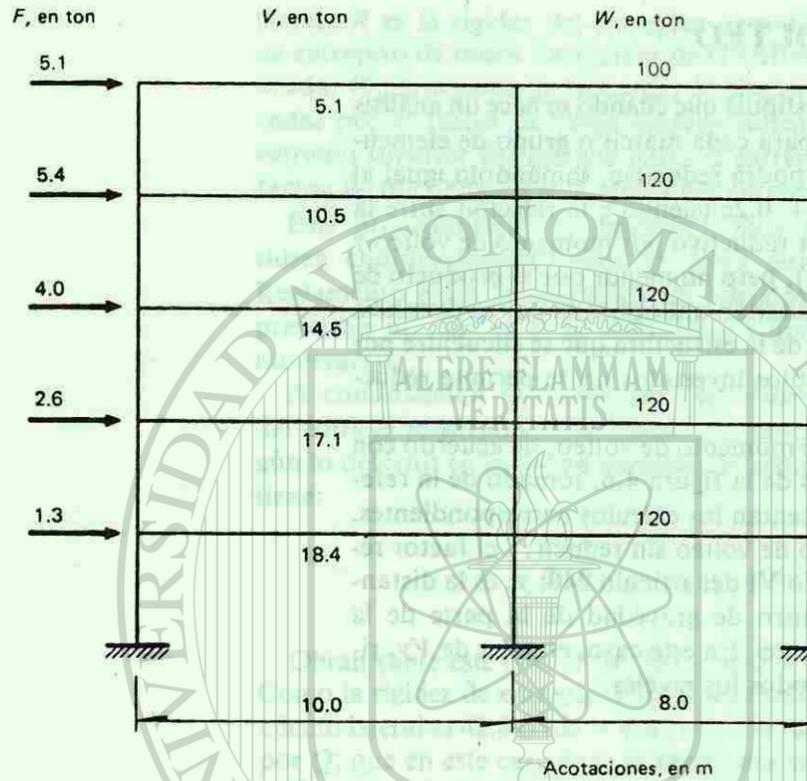


Figura 4.6 Marco para ejemplificar el cálculo de momentos de volteo.

tuando en la dirección perpendicular. La combinación de los efectos de uno y otro componente se realizará en cada elemento mecánico, cuidando de proceder coherentemente. Considérese como ejemplo el diseño de una columna a flexocompresión biaxial; se requieren la carga axial y los momentos flexionantes en dos direcciones; si para la combinación que se está considerando la carga axial proviene de 100 por ciento del sismo en X, y de 30 por ciento de sismo en Y, los momentos flexionantes corresponderán a los mismos porcentajes, y no sería apropiado tomar, con dicha carga axial, momentos que resulten de 30 por ciento del sismo en X con 100 por ciento del sismo en Y.

Tabla 4.9 Cálculos del momento de volteo para el marco de la figura 4.6

Nivel	Entrepiso	M (ton)	V (ton)	M <sub>v</sub> (ton-m)	Z	j=0.8+0.2z	jM <sub>v</sub> (ton-m)	y <sub>g</sub> (m)	Vy <sub>g</sub> (ton-m)
5		100		0	1	1	0	0	0
	5		5.1						
4		120		15.3	0.8	0.96	14.7	3.00	15.3
	4		10.5						
3		120		46.8	0.6	0.92	43.1	4.37	45.8
	3		14.5						
2		120		90.3	0.4	0.88	79.5	5.83	84.5
	2		17.1						
1		120		141.6	0.2	0.84	119.0	7.32	125.0
	1		18.4						
0				196.8	0	0.80	157.2	8.8	162.0

Para el nivel 3:

$$y_g = \frac{100 \times 6 + 120 \times 3}{100 + 120} = 4.37 \text{ m}$$

Para el nivel 4:

$$y_g = \frac{100 \times 9 + 120 \times 6 + 120 \times 3}{100 + 120 + 120} = 5.83 \text{ m}$$

# 5.

## Conceptos fundamentales de dinámica estructural

### 5.1 GRADOS DE LIBERTAD

Desde el punto de vista dinámico, los grados de libertad que interesan son aquellos en los que se consideran fuerzas generalizadas de inercia; es decir, fuerzas iguales a masa por aceleración y momentos iguales al momento de inercia de masa por aceleración angular. Por ejemplo, en la figura 5.1 se muestra un marco que, de acuerdo con la definición de grados de libertad dada en la sección 1.2.1 de este manual, tiene 10 grados de libertad si se ignoran las deformaciones

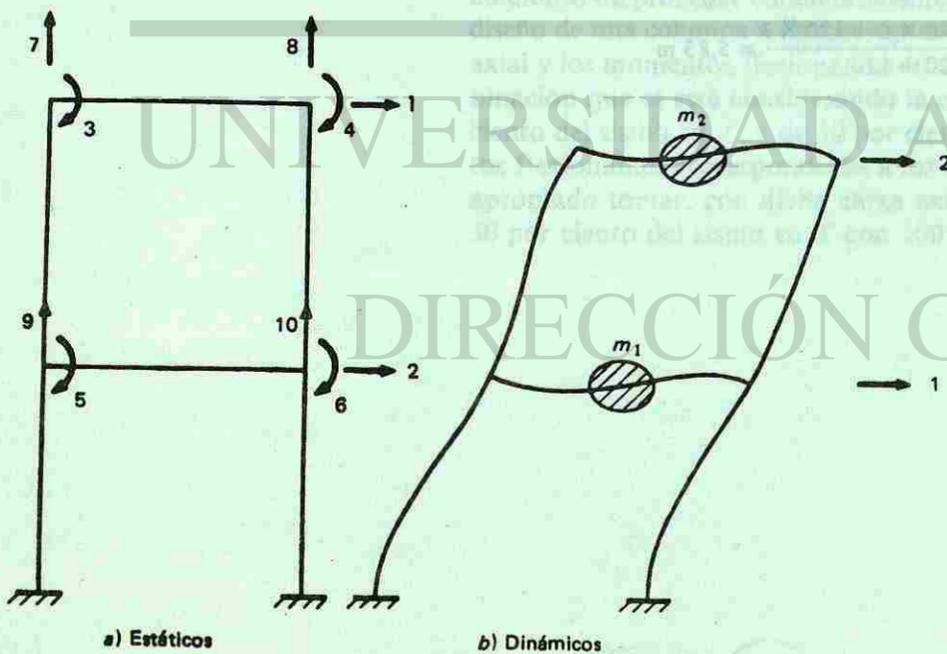


Figura 5.1 Grados de libertad estáticos y dinámicos.

axiales en las vigas; sin embargo, si las fuerzas de inercia importantes son solamente las que generan las masas  $m_1$  y  $m_2$  al moverse lateralmente, entonces en dinámica se habla de un sistema de dos grados de libertad, que son precisamente los desplazamientos laterales 1 y 2. Esto no implica que en los restantes grados de libertad los giros y desplazamientos correspondientes se anulen; además, la matriz de rigideces de la estructura, que sería de  $10 \times 10$ , se pueden transformar a una de  $2 \times 2$  (expresada en función de los grados de libertad 1 y 2), denominada matriz de rigideces lateral, mediante el proceso de condensación estática descrito también en la sección 1.2.1, véase la expresión 1.19.

En lo que sigue de este capítulo al hablar de cierto número de grados de libertad, se alude sólo a aquellos en que existen fuerzas generalizadas de inercia.

Como el título del capítulo lo señala, aquí se tratan sólo las ideas fundamentales. Existen presentaciones mucho más completas de la dinámica estructural, por ejemplo, las hechas en las referencias 35 a 39.

### 5.2 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

#### 5.2.1 Descripción y ecuación de equilibrio dinámico

Considérese el sistema mostrado en la figura 5.2, el cual está constituido por una masa concentrada que puede tener un desplazamiento horizontal  $u$ , ligada a la base (que puede tener un movimiento horizontal,  $s_0$ ) mediante un elemento elástico y un amortiguador. El sistema tiene, por tanto, un solo grado de libertad.

En cierto instante en que la masa y su base están moviéndose, en la ecuación de equilibrio dinámico intervienen la fuerza de inercia, igual a la masa por su aceleración absoluta  $\ddot{x}$ , la fuerza de rigidez y la fuerza de amortiguamiento. El caso más sencillo es aquel en el cual las

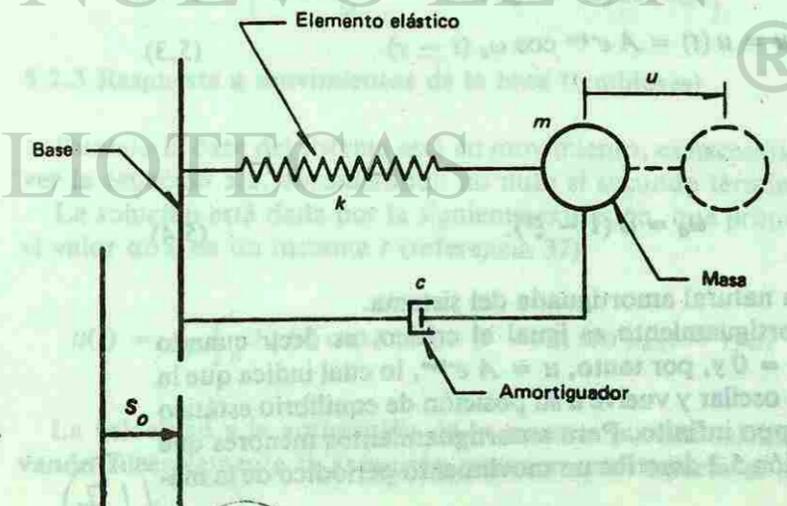


Figura 5.2 Sistema simple con amortiguamiento viscoso.

CAPILLA ALFONSO

109 115

116

fuerzas de rigidez y de amortiguamiento son, respectivamente, proporcionales al desplazamiento  $u$  y a la velocidad  $\dot{u}$  de la masa con respecto a su base. Sean  $k$  y  $c$  las correspondientes constantes de proporcionalidad, que se supone que no cambian con el tiempo. Este conjunto constituye un sistema lineal de un grado de libertad, con amortiguamiento viscoso o lineal.

En estas circunstancias, usando el principio de D'Alembert, la ecuación de equilibrio dinámico es

$$m \ddot{x} + c \dot{u} + k u = 0$$

Considerando que  $x = s_0 + u$ , la ecuación anterior se puede escribir

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{s}_0 \quad (5.1)$$

El punto sobre una cantidad significa derivación con respecto al tiempo; dividiendo la ecuación 5.1 entre  $m$  y definiendo  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,  $c_{cr} = 2\sqrt{k m}$  y  $\xi = c/c_{cr}$  se llega a:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{s}_0 \quad (5.2)$$

$\omega$  se denomina frecuencia circular natural del sistema;  $c_{cr}$  se conoce como amortiguamiento crítico y  $\xi$  es la fracción que  $c$  representa del amortiguamiento crítico y se llama coeficiente o relación de amortiguamiento. El periodo de vibración natural del sistema se calcula como  $2\pi/\omega$ .

### 5.2.2 Vibraciones libres

El sistema descrito en la sección precedente tiene vibraciones libres cuando la masa  $m$  se mueve pero la base permanece inmóvil y no actúan fuerzas exteriores. En este caso el segundo miembro de la ecuación 5.2 se anula y su solución se puede describir (referencia 2).

$$u = u(t) = A e^{-\xi\omega t} \cos \omega_a (t - \tau) \quad (5.3)$$

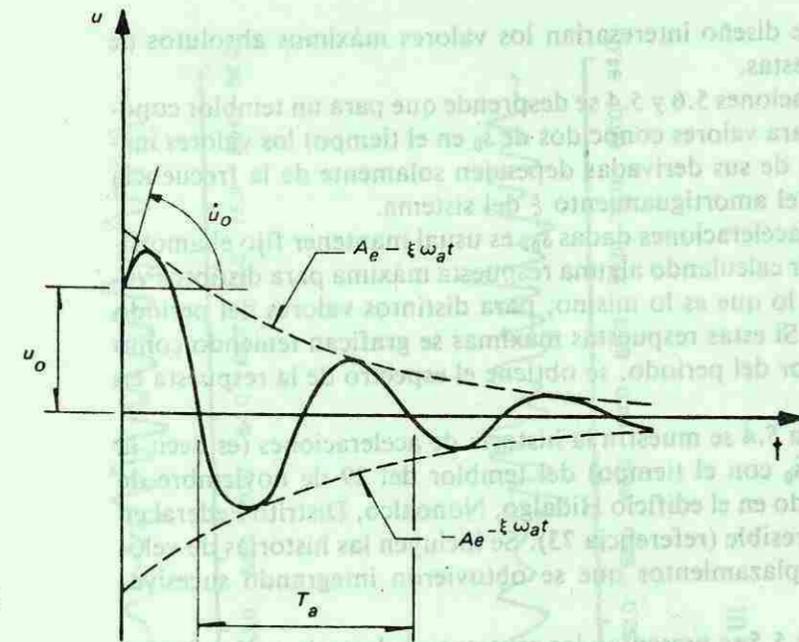
donde

$$\omega_a = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.4)$$

$\omega_a$  es la frecuencia natural amortiguada del sistema.

Cuando el amortiguamiento es igual al crítico, es decir cuando  $\xi = 1$ , se tiene  $\omega_a = 0$  y, por tanto,  $u = A e^{-\xi\omega t}$ , lo cual indica que la masa se mueve sin oscilar y vuelve a su posición de equilibrio estático después de un tiempo infinito. Para amortiguamientos menores que el crítico, la ecuación 5.3 describe un movimiento periódico de la ma-

117



5.3 Vibraciones libres de un sistema de la figura 5.2.

sa  $m$ , con frecuencia  $\omega_a$  y con amplitud decreciente  $A e^{-\xi\omega_a t}$ , como se ilustra en la figura 5.3.

Para estructuras usuales, el valor del amortiguamiento no excede de 10 por ciento del crítico ( $\xi = 0.1$ ), en cuyo caso  $\omega_a = 0.995\omega$ . Esto muestra que en casos prácticos la influencia del amortiguamiento en la frecuencia de vibración es pequeña. El efecto más importante del amortiguamiento es disminuir la amplitud de dicha vibración conforme avanza el tiempo, según lo expresa el término  $e^{-\xi\omega_a t}$  de la ecuación 5.3 y se aprecia en la figura 5.3.

Los valores que asumen  $A$  y  $\omega$  en la ecuación 5.3 se determinan a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad del sistema. Si para  $t = 0$  se tiene  $u = u_0$  y  $\dot{u} = \dot{u}_0$ , se puede demostrar que dicha ecuación se convierte en:

$$u = e^{-\xi\omega t} \left\{ \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_a} \sin \omega_a t + u_0 \cos \omega_a t \right\} \quad (5.5)$$

### 5.2.3 Respuesta a movimientos de la base (temblores)

Cuando la base del sistema está en movimiento, es necesario resolver la ecuación 5.2, considerando no nulo el segundo término.

La solución está dada por la siguiente expresión, que proporciona el valor de  $u$  en un instante  $t$  (referencia 37).

$$u(t) = \frac{1}{\omega_a} \int_0^t \ddot{s}_0(\tau) \exp\{-\xi\omega(t-\tau)\} \sin \omega_a(t-\tau) d\tau \quad (5.6)$$

La velocidad y la aceleración de la masa se pueden calcular derivando sucesivamente la expresión anterior con respecto al tiempo.

118

Para fines de diseño interesarían los valores máximos absolutos de dichas respuestas.

De las ecuaciones 5.6 y 5.4 se desprende que para un temblor conocido (o sea para valores conocidos de  $\ddot{s}_0$  en el tiempo) los valores máximos de  $u$  y de sus derivadas dependen solamente de la frecuencia natural  $\omega$  y del amortiguamiento  $\xi$  del sistema.

Para unas aceleraciones dadas  $\ddot{s}_0$ , es usual mantener fijo el amortiguamiento e ir calculando alguna respuesta máxima para distintos valores de  $\omega$  (o lo que es lo mismo, para distintos valores del periodo  $T = 2\pi/\omega$ ). Si estas respuestas máximas se grafican teniendo como abscisa el valor del periodo, se obtiene el espectro de la respuesta en cuestión.

En la figura 5.4 se muestra la historia de aceleraciones (es decir la variación de  $\ddot{s}_0$  con el tiempo) del temblor del 29 de noviembre de 1978, registrado en el edificio Hidalgo, Nonoalco, Distrito Federal en terreno compresible (referencia 73). Se incluyen las historias de velocidades y desplazamientos que se obtuvieron integrando sucesivamente  $\ddot{s}_0$ .

En la figura 5.5 se presentan los espectros de la aceleración absoluta ( $\ddot{s}_0 + \ddot{u}$ ) y de la velocidad relativa  $\dot{u}$  del temblor mencionado.

Es frecuente obtener el espectro de desplazamiento  $D$  y en lugar de las velocidades y aceleraciones dibujar las cantidades  $V = \omega D$  y  $A = \omega^2 D$ , que se denominan espectros de pseudovelocidades y de pseudoaceleraciones, respectivamente. De acuerdo con su definición es posible trazar estos tres últimos espectros ( $D$ ,  $V$  y  $A$ ) en una sola gráfica, con rayado logarítmico en cuatro direcciones, según se hace en la figura 5.5. Este tipo de gráfica se debe a Newmann y ha sido empleado en muchas publicaciones (referencias 40, 41 y 42). Es interesante notar que la fuerza máxima en el elemento elástico  $k$  es igual a

$$kD = \frac{k}{m} mD = m\omega^2 D = mA$$

Cualquiera de los espectros de un temblor proporciona los datos necesarios para el diseño de estructuras con un grado de libertad, con sólo conocer el periodo natural y el amortiguamiento de la misma.

### 5.3 SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

#### 5.3.1 Alcance

En edificios es usualmente aceptable suponer que las masas están concentradas en los niveles de los pisos y que las fuerzas de inercia importantes son sólo las laterales; por ello, lo que sigue se limita a tratar este caso, aunque los conceptos son aplicables a otros sistemas

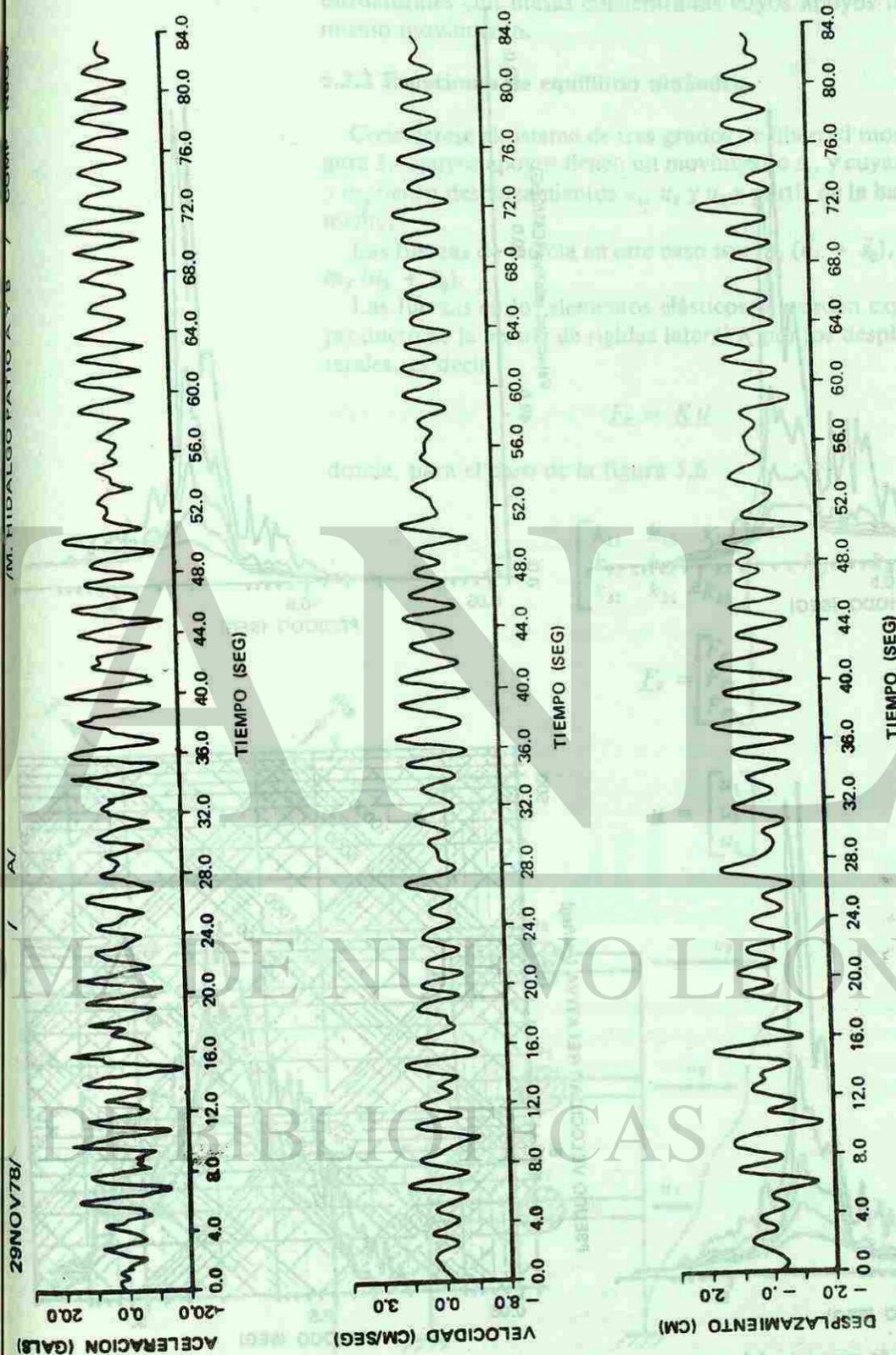


Figura 5.4 Aceleraciones, velocidades y desplazamientos de un temblor registrado en la zona III.

119

120

121

CAPILLA ALFONSO

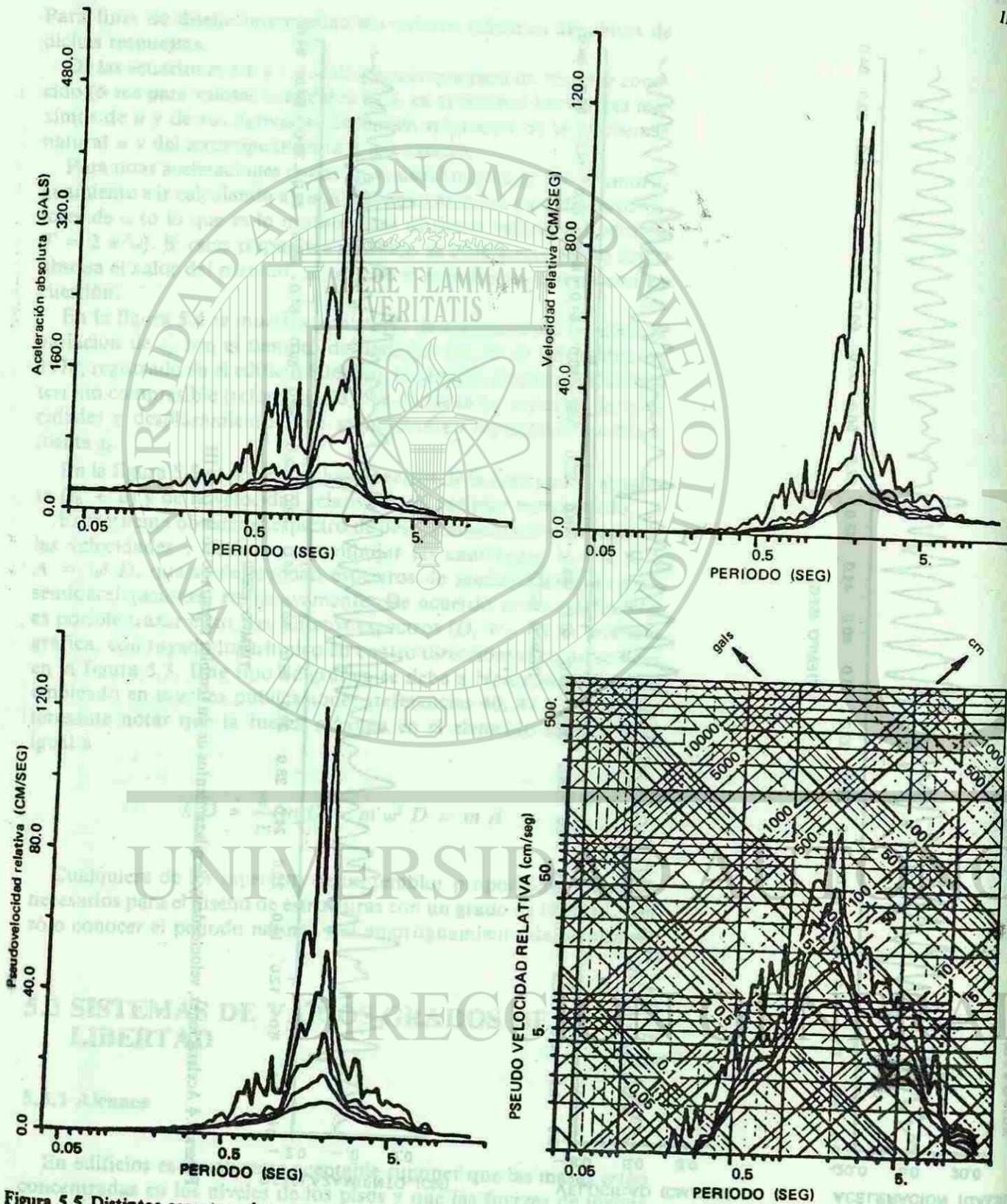


Figura 5.5 Distintos espectros de respuesta del temblor de la figura 5.4 (amortiguamientos 0, 2, 5, 10 y 20 por ciento del crítico).

121

estructurales con masas concentradas cuyos apoyos tienen todos el mismo movimiento.

5.3.2 Ecuaciones de equilibrio dinámico

Considérese el sistema de tres grados de libertad mostrado en la figura 5.6, cuyos apoyos tienen un movimiento  $s_0$ , y cuyas masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  tienen desplazamientos  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  a partir de la base, respectivamente.

Las fuerzas de inercia en este caso son  $m_1(\ddot{u}_1 + \ddot{s}_0)$ ,  $m_2(\ddot{u}_2 + \ddot{s}_0)$  y  $m_3(\ddot{u}_3 + \ddot{s}_0)$ .

Las fuerzas en los elementos elásticos se pueden expresar como el producto de la matriz de rigidez lateral  $\underline{K}$  por los desplazamientos laterales, es decir

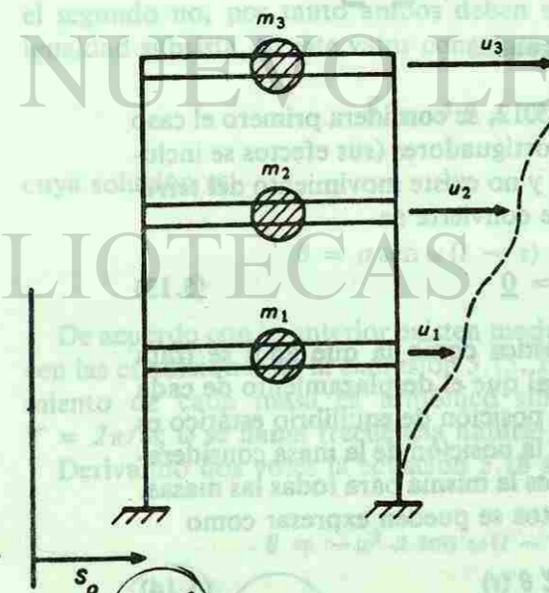
$$\underline{F}_e = \underline{K} \underline{u} \quad (5.7)$$

donde, para el caso de la figura 5.6

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad k_{ij} = k_{ji} \quad (5.8)$$

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$



5.6 Sistema de varios grados de li-

122

De análoga manera las fuerzas de amortiguamiento viscoso se pueden expresar como el producto de una matriz de amortiguamiento por las velocidades, o sea como

$$F_a = C\dot{u} \quad (5.11)$$

donde el punto denota derivación con respecto al tiempo. Se verá más adelante que en general no es necesario calcular  $C$  y que el efecto del amortiguamiento se toma en cuenta en los espectros de diseño.

Para cada masa la suma de todas las fuerzas debe ser cero. Así se llega a que las ecuaciones de equilibrio dinámico se pueden escribir.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = M\ddot{s}_0 \quad (5.12)$$

$M$  se denomina matriz de masas y, para la estructura de la figura 5.6, es igual a:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

En la expresión 5.12 se ha definido también:

$$\ddot{u} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{s}_0 = \begin{bmatrix} \ddot{s}_0 \\ \ddot{s}_0 \\ \ddot{s}_0 \end{bmatrix}$$

### 5.3.3 Vibraciones libres no amortiguadas

En lugar de resolver la ecuación 5.12, se considera primero el caso más simple en el que no existen amortiguadores (sus efectos se incluyen después en forma aproximada) y no existe movimiento del terreno, con lo cual la expresión 5.12 se convierte en

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (5.13)$$

Ahora bien, toda estructura elástica como la que aquí se trata puede vibrar libremente en forma tal que el desplazamiento de cada una de sus masas con respecto a su posición de equilibrio estático es igual al producto de una función de la posición de la masa considerada por una función del tiempo, que es la misma para todas las masas. En otras palabras los desplazamientos se pueden expresar como

$$u(t) = Z\theta(t) \quad (5.14)$$

123

donde para el caso de la figura 5.6

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

haciendo notar que las  $z$  no dependen de  $t$ . A esta forma de vibrar se le llama modos naturales. Al conjunto de valores  $z_i$  se denomina forma del modo, y al periodo de  $\theta(t)$ , en caso de que exista, se llama periodo natural.

Derivando la ecuación 5.14 se obtiene

$$\ddot{u}(t) = Z\ddot{\theta}(t) \quad (5.15)$$

y sustituyendo 5.14 y 5.15 en 5.13 se llega a:

$$MZ\ddot{\theta} + KZ\theta = 0 \quad (5.16)$$

por sencillez se han omitido los  $(t)$ .

Para la masa  $i$ , el desarrollo de la expresión 5.16 da

$$m_i z_i \ddot{\theta} + (\sum_j k_{ij} z_j) \theta = 0$$

de donde

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = -\frac{\sum_j k_{ij} z_j}{m_i z_i} \quad (5.17)$$

El primer miembro de esta ecuación es función de  $t$ , mientras que el segundo no; por tanto ambos deben ser constantes para que la igualdad subsista. Si este valor constante se llama  $-\omega^2$ , se obtiene

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

cuya solución es

$$\theta = a \sin \omega(t - \tau) \quad (5.18)$$

De acuerdo con lo anterior existen modos de vibración que satisfacen las condiciones de la expresión 5.15. Estos son tales que el movimiento de cada masa es armónico simple con periodo natural  $T = 2\pi/\omega$ ;  $\omega$  se llama frecuencia natural circular.

Derivando dos veces la ecuación 5.18 se tiene

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 a \sin \omega(t - \tau) = -\omega^2 \theta$$

124

y sustituyendo en 5.16, y considerando que  $\theta \neq 0$ , queda

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M})\underline{Z} = \underline{0} \quad (5.19)$$

que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo; para que existan valores de  $\underline{Z}$  distintos de cero es necesario que el determinante del sistema se anule, esto es, que

$$|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0 \quad (5.20)$$

### 5.3.4 Frecuencias y modos de vibración

La expresión 5.20 representa un problema de valores característicos. Desarrollando el determinante se obtiene una ecuación algebraica de grado  $n$  cuya incógnita es  $\omega^2$ , siendo  $n$  el número de grados de libertad (tres en el caso de la figura 5.6) cuya solución conduce a  $n$  valores de  $\omega^2$ , es decir a  $n$  frecuencias de vibración  $\omega$ , que corresponden a otros tantos periodos naturales  $2\pi/\omega$ .

Los valores de  $\omega^2$  son reales y positivos, y sus raíces cuadradas son las frecuencias naturales. Se acostumbra numerar a las  $\omega$  en orden creciente, es decir la primera frecuencia  $\omega$  (llamada frecuencia fundamental) es el menor valor, y la última  $\omega_n$ , el mayor.

Si cada valor de la frecuencia  $\omega_j$  se reemplaza en 5.19 es posible obtener valores  $\underline{Z}_j$  diferentes de cero (cada uno de estos vectores se llama modo de vibración). Para cada modo no se obtienen soluciones únicas sino solamente valores relativos entre las  $z_{ij}$ , es decir que no están definidas las amplitudes de las vibraciones de las masas, sino las relaciones entre todas ellas.

Se demuestra que los modos de vibración tienen las siguientes propiedades:

- a) Ortogonalidad con respecto a la matriz de masas,

$$\underline{Z}_j^T \underline{M} \underline{Z}_r = 0 \text{ si } j \neq r \quad (5.21)$$

- b) Ortogonalidad con respecto a la matriz de rigideces

$$\underline{Z}_j^T \underline{K} \underline{Z}_r = 0 \text{ si } j \neq r \quad (5.22)$$

- c) Los modos naturales constituyen un conjunto completo, lo que significa que cualquier configuración de desplazamientos  $\underline{u}$  puede expresarse como una combinación lineal de las  $\underline{Z}_j$ , es decir como:

$$\underline{u} = \sum_j a_j \underline{Z}_j \quad (5.23)$$

El producto  $\underline{Z}_j^T \underline{M} \underline{Z}_j$  es igual a una constante arbitraria cuyo valor depende de la escala a la que se tome cada modo. Si dicha constante

125

es obligada a tomar el valor de la unidad, modificando la escala del modo, se dice que éste se hace normalizado con respecto a las masas.

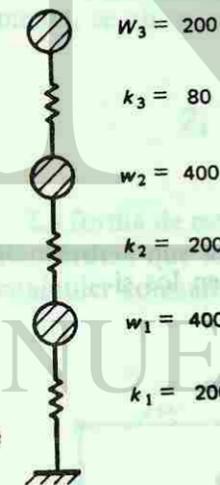
En todo lo que antecede se ha supuesto que el terreno sobre el que se apoya la estructura es indeformable. Tratándose de estructuras reales, los modos naturales se ven afectados por la deformabilidad del terreno y por la masa de éste que está sujeta a aceleraciones. En tales casos el problema se complica por la existencia de amortiguamiento de cierta importancia.

### 5.3.5 Ejemplo

Considérese la estructura mostrada en la figura 5.7, tomada de la referencia 74. Las matrices de masas y de rigideces de esta estructura son:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$



$k_i$  = rigidez del entrepiso  $i$ , en ton/cm

$w_i$  = Peso del piso  $i$ , en ton

Figura 5.7 Estructura con tres grados de libertad.

el valor de cada masa  $m_i$  es igual a  $\frac{W_i}{g}$ ;  $g$  es la aceleración de la gravedad. Esto da

$$m_1 = m_2 = \frac{400}{981} = 0.407750 \text{ ton-seg}^2/\text{cm},$$

$$m_3 = \frac{200}{981} = 0.203875 \text{ ton-seg}^2/\text{cm}$$

126

Reemplazando los valores de  $k_i$  de la figura 5.7 se tiene

$$K = 80 \begin{bmatrix} 5.0 & -2.5 & 0.0 \\ -2.5 & 3.5 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

la ecuación 5.20, es decir  $|K - \omega^2 M| = 0$ , se escribe entonces como

$$80 \begin{bmatrix} 5.0 - 0.407750 \frac{\omega^2}{80} & -2.5 & 0.0 \\ -2.5 & 3.5 - 0.40775 \frac{\omega^2}{80} & -1.0 \\ -0.0 & -1.0 & 1.0 - 0.203875 \frac{\omega^2}{80} \end{bmatrix} = 0$$

haciendo  $y = \frac{\omega^2}{80}$ , el desarrollo de este determinante conduce a la ecuación siguiente:

$$y^3 - 25.751 y^2 + 157.885 y - 184.386 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$y_1 = 1.525$$

$$y_2 = 7.030$$

$$y_3 = 17.190$$

como  $\omega^2 = 80y$ , y recordando que  $T = 2\pi/\omega$ , se obtienen los siguientes resultados:

$$\omega_1^2 = 122.0, \quad \omega_1 = 11.05 \text{ seg}^{-1}, \quad T_1 = 0.5686 \text{ seg}$$

$$\omega_2^2 = 562.4, \quad \omega_2 = 23.71 \text{ seg}^{-1}, \quad T_2 = 0.2650 \text{ seg}$$

$$\omega_3^2 = 1375.2, \quad \omega_3 = 37.08 \text{ seg}^{-1}, \quad T_3 = 0.1694 \text{ seg}$$

Para calcular los modos de vibración, se reemplazan los valores de  $\omega^2$  en la expresión 5.19, es decir en:

$$(K - \omega^2 M)Z = 0$$

Procediendo así con  $\omega_1^2$ , se tiene el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones:

127

$$\begin{bmatrix} (400 - 122 \times 0.40775) & -200 & -0 \\ -200 & (280 - 122 \times 0.40775) & -80 \\ 0 & -80 & (80 - 122 \times 0.203875) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En  $z_{ij}$  el índice  $i$  se refiere al nivel y el índice  $j$  identifica al modo en cuestión.

Efectuando operaciones se tiene

$$\begin{array}{rclclcl} 350.2545 & z_{11} & -200 & z_{21} & & = 0 \\ -200 & z_{11} & +230.2545 & z_{21} & -80 & z_{31} = 0 \\ & & -80 & z_{21} & +55.1273 & z_{31} = 0 \end{array}$$

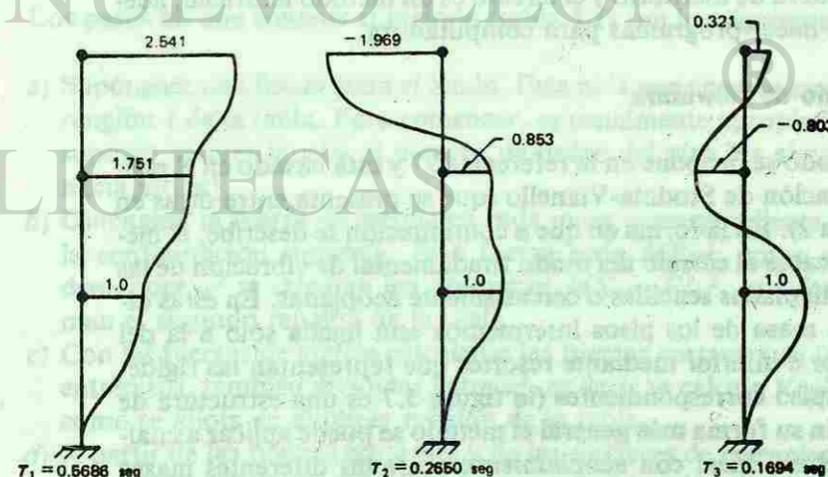
Se puede escoger arbitrariamente el valor de alguna de las  $z_{ij}$ ; por ejemplo, si  $z_{11} = 1$ , entonces de la primera ecuación se obtiene  $z_{21} = 1.751$  y de la segunda o tercera ecuación se encuentra que  $z_{31} = 2.541$ ; es decir que

$$Z_1 = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.751 \\ 2.541 \end{bmatrix}$$

Análogamente, empleando los valores de  $\omega_2^2$  y de  $\omega_3^2$ , respectivamente, se obtienen:

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.853 \\ -1.969 \end{bmatrix}, \quad Z_3 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.804 \\ 0.321 \end{bmatrix}$$

La forma de estos tres modos de vibrar se aprecia en la figura 5.8. Recuerdese que los valores de cada modo pueden multiplicarse por cualquier constante arbitraria.



5.8 Modos de vibrar de la estructura para 5.7.

128

Se puede verificar la ortogonalidad de los modos con respecto a las matrices de masas y de rigideces. Por ejemplo, con el primer y tercer modos se tiene:

$$\begin{aligned} Z_1^T M Z_3 &= \{ 1.00 \ 1.751 \ 2.541 \} \begin{bmatrix} 0.40775 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.203875 \end{bmatrix} \\ &= \{ 0.40775 \ 0.71397 \ 0.51805 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1^T M Z_3 &= 1.0 \times 0.40775 - 0.804 \times 0.71397 + 0.321 \times 0.51805 \\ &= 0.00001 \approx 0 \end{aligned}$$

Análogamente con la matriz de rigideces se obtiene

$$Z_1^T K Z_3 = \{ 1.000 \ 1.751 \ 2.541 \} \begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{bmatrix}$$

$$Z_1^T K Z_3 = 1.00 \times 49.8 - 0.804 \times 87.0 + 0.321 \times 63.2 = 0.139$$

Los resultados no son exactamente cero por errores de redondeo.

### 5.4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA OBTENER MODOS Y FRECUENCIAS DE VIBRAR

El procedimiento seguido en la sección precedente para obtener modos y frecuencias de vibrar, es laborioso e impráctico en sistemas de más grados de libertad. Por ello se han desarrollado métodos numéricos de aproximaciones sucesivas, tres de los cuales se presentan a continuación. Los dos primeros son apropiados para emplearse con una calculadora de escritorio y el tercero es un método matricial, adecuado para hacer programas para computadora.

#### 5.4.1 Método de Newmark

Este método se propone en la referencia 77 y está basado en el proceso de iteración de Stodola-Vianello (que se presenta entre otras en la referencia 2). En la forma en que a continuación se describe, el método es aplicable al cálculo del modo fundamental de vibración de las estructuras llamadas sencillas o cercanamente acopladas. En estas estructuras la masa de los pisos intermedios está ligada sólo a la del piso superior e inferior mediante resortes que representan las rigideces de entrepiso correspondientes (la figura 5.7 es una estructura de este tipo). En su forma más general el método se puede aplicar a cualquier estructura lineal con acoplamiento entre las diferentes masas (referencia 37).

Tabla 5.1 Método de Newmark.

Renglón	K (ton/cm)	200	200	200
	M (ton-seg <sup>2</sup> /cm)	0.408	0.408	0.204
1	X		1.000	2.000
2	F/ω <sup>2</sup>		0.408	0.816
3	V/ω <sup>2</sup>	1.836		0.612
4	ΔY/ω <sup>2</sup>	0.00918	0.00714	0.00765
5	Y/ω <sup>2</sup>		0.00918	0.01632
6	ω <sup>2</sup>		109	123
1	X		1.000	1.780
2	F/ω <sup>2</sup>		0.408	0.726
3	V/ω <sup>2</sup>	1.664		0.532
4	ΔY/ω <sup>2</sup>	0.00837	0.00629	0.00665
5	Y/ω <sup>2</sup>		0.00837	0.01466
6	ω <sup>2</sup>		119	121
1	X		1.000	1.750
2	F/ω <sup>2</sup>		0.408	0.714
3	V/ω <sup>2</sup>	1.642		0.520
4	ΔY/ω <sup>2</sup>	0.00821	0.00617	0.0065
5	Y/ω <sup>2</sup>		0.00821	0.01438
6	ω <sup>2</sup>		121.8	121.7
			1.000	1.752
				2.543

$$\omega^2 = \frac{\sum FX}{\sum MX} = \frac{0.024475}{0.000201} = 121.9 \text{ seg}^{-2}$$

$$T = 2\pi/\omega = 0.5686 \text{ seg}$$

Los pasos en que consiste el método (tabla 5.1) son los siguientes:

- Supóngase una forma para el modo. Esta es la que aparece en el renglón 1 de la tabla. Para comenzar, es usualmente apropiado suponer valores iguales al número de orden del piso (de abajo hacia arriba).
- Obtégase la fuerza de inercia en cada masa correspondiente a la configuración supuesta. Esta fuerza sería  $M\omega^2$ ; como se desconoce  $\omega^2$  se calculan los productos  $MX = F/\omega^2$ , que forman el segundo renglón de la tabla.
- Con las fuerzas de inercia calcúlense las fuerzas cortantes en los entrepisos, también divididas entre  $\omega^2$ , es decir se calcula  $V/\omega^2$ , como se anota en el tercer renglón de la tabla.
- A partir de las fuerzas cortantes y de las rigideces de entrepiso, obténganse las deformaciones de entrepiso también divididas

entre  $\omega^2$ . Esto se presenta en el cuarto renglón de la tabla como  $\Delta Y/\omega^2$ .

e) Acumulando deformaciones de entrepiso, determinese una nueva configuración de los desplazamientos de las masas  $Y/\omega^2$  (quinto renglón de la tabla).

f) Obténgase  $\omega^2$  para cada masa, como los cocientes  $X/(Y/\omega^2)$ . Esto se hace en el sexto renglón de la tabla. Si la configuración  $X$  supuesta es la correcta, se obtendrá el mismo valor para todas las masas. En caso contrario es necesario repetir todos los pasos empezando con una forma de modo proporcional a  $Y/\omega^2$ , hasta que se obtengan valores de  $\omega^2$  suficientemente parecidos en todas las masas. Así se obtiene una convergencia en general bastante rápida. En la tabla 5.1 se muestran tres iteraciones del método aplicado al edificio de la figura 5.7, con las cuales se obtuvo una aproximación suficiente. Los valores de  $X$  en cada iteración se normalizaron de manera que la masa del primer piso tuviese un desplazamiento unitario, lo cual permite apreciar cómo se va modificando de una iteración a otra la forma del modo.

Para calcular la frecuencia se pueden promediar los valores del último ciclo o mejor aún, determinarla con el cociente de Schwartz (que es una forma particular del cociente de Rayleigh), es decir como:

$$\omega^2 = \frac{\Sigma(F/\omega^2)(Y/\omega^2)}{\Sigma M(Y/\omega^2)^2}$$

empleando para  $F$  y  $X$  los valores del último ciclo. En el ejemplo propuesto ambos criterios conducen a  $\omega^2 = 121.9 \text{ seg}^{-2}$ , y la forma del modo es (1.000, 1.752, 2.543). Los valores difieren de los obtenidos en la sección 5.3.5 solamente en la cuarta cifra significativa.

#### 5.4.2 Método de Holzer

Quando se trata de obtener modos superiores al primero, es conveniente emplear el procedimiento debido a Holzer (referencia 44). Este método es solamente aplicable a estructuras sencillamente acopladas (véase la introducción al método de Newmark, en la sección precedente). Los pasos a dar son:

- Supóngase arbitrariamente un valor de  $\omega^2$  mayor que el del modo fundamental, previamente obtenido por cualquier método.
- Supóngase la amplitud del movimiento  $X_1$  de la primera masa a partir del apoyo (es decir el valor de  $X$  correspondiente a la primera masa). Conviene suponer un valor unitario. Esta amplitud supuesta es también igual al desplazamiento  $\Delta X_1$  del primer entrepiso.

- Calcúlense la fuerza cortante en el primer resorte,  $V_1 = K_1 \Delta X_1$  ( $K_1$  es la rigidez de entrepiso), y la fuerza de inercia en la primera masa, igual a

$$F_1 = M_1 \omega^2 X_1.$$

- Satisfaciendo equilibrio calcúlese la fuerza cortante en el segundo resorte

$$V_2 = V_1 - F_1.$$

- Obténgase la deformación de este último

$$\Delta_2 = F_2/K_2.$$

- Calcúlese la amplitud del desplazamiento de la segunda masa,  $X_2 = X_1 + \Delta X_2$  y la fuerza de inercia en la misma,

$$F_2 = M_2 \omega^2 X_2.$$

- Repítanse los pasos (d) a (f) con el tercer resorte y la tercera masa.
- Continúese el proceso hasta llegar a la última masa. Si se satisface el equilibrio entre la fuerza cortante del último resorte y la fuerza de inercia de la última masa, la frecuencia escogida y las amplitudes calculadas corresponden a un modo natural de vibración. Por lo general se obtendrá un residuo.

Representando en una gráfica los residuos obtenidos contra los distintos valores de  $\omega^2$  supuestos, se obtendrá una curva cuyos ceros corresponden a las frecuencias naturales.

Nótese que un cambio de signo en los residuos correspondientes a dos valores de  $\omega^2$  indica que hay una frecuencia comprendida entre dichos valores y se puede interpolar, por ejemplo linealmente, para obtener una mejor aproximación de la frecuencia buscada.

Quando se está probando un valor de  $\omega^2$  suficientemente próximo al correspondiente a un modo de vibrar (cuando el residuo es pequeño), se encuentra que una aproximación más precisa de dicha frecuencia es (referencia 44)

$$\bar{\omega}^2 = \omega^2 \frac{\Sigma V \Delta X}{\Sigma F X} \quad (5.24)$$

Lo anterior se aprecia en la tabla 5.2, para los cálculos hechos para el segundo modo del edificio de la figura 5.7. Nótese que las operaciones se han hecho con más precisión en el último ciclo. Los resultados,  $\omega_2^2 = 562.5/\text{seg}^2$  y  $Z_2 = (1.000, 0.851, -1.964)$ , difieren muy poco de los obtenidos en la sección 5.3.5.

La gráfica de los residuos versus  $\omega^2$  se muestra en la figura 5.9. En ella se incluyen también resultados obtenidos para calcular la frecuen-

Tabla 5.2 Método de Holzer

$\omega^2$	$K$ (ton/cm)	$M$ (ton-cm <sup>2</sup> /cm)	$\Delta X$	$V$	$F$	Residuo
Supuesta	200	0.408				
500	200	0.408	1.0000	0.98	1.570	-44
			1.000	0.020	2.550	
			200.0	4.00	204.0	
						-160
600	200	0.408	1.000	0.780	2.170	30
			1.000	-0.220	2.950	
			200.0	45.00	236.0	
						-266.0
560	200	0.408	1.000	0.860	1.950	2.0
			1.000	0.140	2.810	
			200.0	28.50	225	
						-223
563	200	0.408	1.000	0.851	1.964	0.4
			1.000	-0.149	2.815	
			200.0	29.70	225.2	
						225.6

$(500 \times 30 + 600 \times 44) / 74 = 560$  (interpolación lineal)

$\bar{\omega}^2 = 560 \times \frac{200 \times 1 + 28.5 \times 0.140 + 225.0 \times 2.810}{228.5 \times 1 + 195.5 \times 0.860 + 223.0 \times 1.950} = 563.0$  (ec. 5.24)

$\bar{\omega}^2 = 563 \times \frac{200 \times 1 + 29.7 \times 0.149 + 225.2 \times 2.815}{229.7 \times 1 + 195.5 \times 0.851 + 225.6 \times 1.964} = 562.5$  (ec. 5.24)

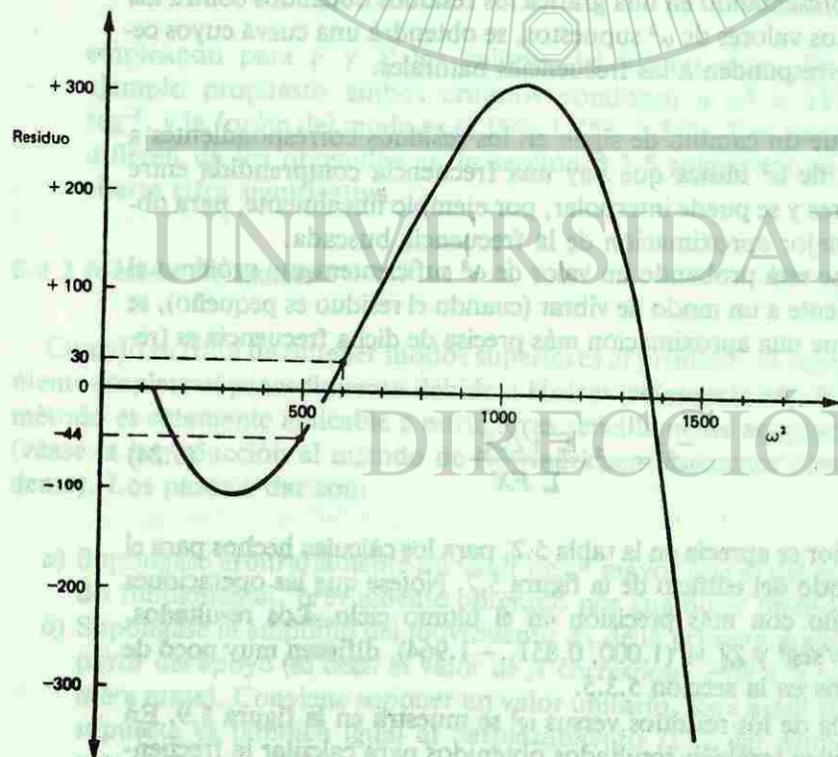


Figura 5.9 Método de Holzer.

cia del tercer modo de vibrar. El valor calculado para  $\omega_3^2$  es 1372/seg<sup>2</sup>, que difiere del obtenido en 5.3.5 en menos de 0.3 por ciento.

5.4.3 Método de iteración inversa

Este procedimiento es apropiado para resolver problemas de valores característicos mediante operaciones matriciales. Se parte de que la ecuación 5.19 puede escribirse

$$KZ = \omega^2 MZ \quad (5.25)$$

Los pasos a seguir son:

- Supóngase un valor arbitrario  $X$  de  $Z$  (lo que es lo mismo que suponer un valor arbitrario de  $\omega^2 Z$ )
- Calcúlese el valor  $X' = MX$ .
- Calcúlese el vector  $Y$  resolviendo el sistema de ecuaciones siguientes (que proviene de la expresión 5.25).
- Si el vector  $Y$  es igual al vector  $X$  multiplicado por una constante, entonces se tiene una forma modal y la constante es igual a  $1/\omega^2$ . En la práctica se busca que  $Y$  sea aproximadamente igual a una constante por  $X$  y se calcula  $\omega^2$  con la relación siguiente (que es una manera de escribir el cociente de Rayleigh)

$$KY = X' \quad (5.26)$$

$$\omega^2 = \frac{Y^T X'}{Y^T M Y} \quad (5.27)$$

Si se considera que  $Y$  no es lo suficientemente parecida a  $X$ , se empieza otra vez en el paso a) con un vector  $X$  que sea proporcional a  $Y$ . Se demuestra (referencia 45) que así el proceso converge rápidamente al primer modo.

El método sirve también para determinar modos superiores de vibración si es que los pasos anteriores se aplican empleando en vez de  $K$  la matriz  $K'$  con un corrimiento de origen, es decir

$$K' = K - \mu M \quad (5.28)$$

En este caso los valores de  $Y$  convergen a la forma del modo cuyo valor de  $\omega^2$  esté más cercano a  $\mu$ ; y el cociente de Rayleigh (ecuación

133

134

5.27) proporciona el valor de  $(\omega^2 - \mu)$  por lo que para calcular  $\omega^2$  se debe usar la expresión:

$$\omega^2 = \mu + \frac{Y^T X'}{Y^T M Y} \quad (5.29)$$

Como ejemplo se aplica este método otra vez a la estructura de la figura 5.7, recordando que las matrices de masas y de rigideces son:

$$M = \begin{bmatrix} 0.40775 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.20388 \end{bmatrix} \quad (\text{en ton-seg}^2/\text{cm})$$

$$K = \begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{bmatrix} \quad (\text{en ton/cm})$$

Tabla 5.3 Método de iteración inversa (primer modo).

Grado de libertad	1	2	3
$\underline{X}$	1.000	2.000	3.000
$\underline{X}'$	0.40775	0.81550	0.61163
$\underline{Y}$	0.009174	0.01631	0.02396
$\underline{X}$	1.000	1.778	2.612
$\underline{X}'$	0.40775	0.72498	0.53253
$\underline{Y}$	0.008326	0.01461	0.02127
$\underline{X}$	1.000	1.775	2.555
$\underline{X}'$	0.40775	0.71560	0.52091
$\underline{Y}$	0.008221	0.01440	0.02092
$\underline{X}$	1.000	1.752	2.545

Notas: Los valores de  $\underline{X}$ , salvo para la primera iteración, son proporcionales a los de  $\underline{Y}$  de la iteración anterior.

$$\underline{X}' = M \underline{X}$$

$$\underline{X} = K^{-1} \underline{X}'$$

$$\omega^2 = \frac{Y^T X'}{Y^T M Y} \quad (\text{ecuación 5.27})$$

$$\omega^2 = \frac{0.008221 \times 0.40775 + 0.0144 \times 0.7156 \times 0.02092 \times 0.52091}{0.008221^2 \times 0.40775 + 0.0144^2 \times 0.40775 + 0.02092^2 \times 0.20388}$$

$$\omega^2 = 122 \text{ seg}^{-2}$$

135

Los cálculos de varias iteraciones hechas para obtener el primer modo, se presentan en la tabla 5.3. Como valores iniciales de  $\underline{X}$  conviene, como en el método de Newmark, suponer cantidades proporcionales al número de orden del grado de libertad.

En el paso c) se necesita resolver el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

La solución se puede escribir

$$y_1 = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3}{200}$$

$$y_2 = 2 y_1 - \frac{x'_1}{200}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{x'_3}{80}$$

En la tabla 5.4 se muestran los cálculos para obtener el segundo modo. Para esto se adoptó en la expresión 5.28 el valor  $\mu = 490.5$

Tabla 5.4 Método de iteración inversa con corrimiento ( $\mu = 490.5$ , converge al segundo modo).

Grado de libertad	1	2	3
$\underline{X}$	1.000	1.000	1.000
$\underline{X}'$	0.40775	0.40775	0.20388
$\underline{Y}$	0.01198	0.009939	0.02574
$\underline{X}$	1.000	0.830	-2.149
$\underline{X}'$	0.40775	0.33843	-0.43813
$\underline{Y}$	0.01453	0.01249	-0.02805
$\underline{X}$	1.000	0.860	-1.931
$\underline{X}'$	0.40775	0.35067	-0.39368
$\underline{Y}$	0.01370	0.01167	-0.02698
$\underline{X}$	1.000	0.851	-1.969

Nota: Los valores de  $\underline{X}$ , salvo para la primera iteración, son proporcionales a los de  $\underline{Y}$  de la iteración anterior

$$\underline{X}' = M \underline{X}$$

$$\underline{Y} = K^{-1} \underline{X}'$$

$$\rho = \frac{Y^T X'}{Y^T M Y}, \quad \omega^2 = \rho + \mu \quad (\text{ecuación 5.59})$$

$$\rho = \frac{0.01370 \times 0.40775 + 0.01167 \times 0.35067 + 0.02698 \times 0.39368}{0.01370^2 \times 0.40775 + 0.01167^2 \times 0.40775 + 0.02698^2 \times 0.20388}$$

$$\rho = 72.4, \quad \omega^2 = 490.5 + 72.4 = 562.9 \text{ seg}^{-2}$$

136

(= 981/2), entonces la convergencia será el valor de  $\omega^2$  más cercano a 490.5

En modos superiores al primero (y aun en este) conviene suponer que los valores iniciales de  $X$  son todos iguales a la unidad.

La matriz  $K'$  resulta entonces:

$$K' = K - \mu M = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 80 & -80 \\ 0 & -80 & -20 \end{bmatrix}$$

Esta vez, en el paso c) se tiene que resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 80 & -80 \\ 0 & -80 & -20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix}$$

La solución es:

$$y_1 = \frac{2x'_1 + x'_2 - 4x'_3}{200}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{x'_1}{200}$$

$$y_3 = -4y_2 - \frac{x'_3}{20}$$

Puede notarse que el método de iteración inversa da, para el primer modo, los mismos resultados que el método de Newmark. De hecho ambos métodos son equivalentes, en este caso, al procedimiento conocido como de Stodola-Vianello, que consiste básicamente en iterar empleando la expresión siguiente (véase por ejemplo la referencia 2).

$$\frac{1}{\omega^2} Z = K^{-1} M Z \quad (5.30)$$

que es otra forma de escribir la ecuación 5.19, y que equivale a resolver el sistema de ecuaciones 5.26.

Sin embargo, el método de iteración inversa se puede aplicar cualesquiera que sean las matrices de masas y rigideces, y no sólo a sistemas sencillamente acoplados; además, como se ha visto, empleado con corrimientos, sirve para calcular cualquier modo de vibrar.

Por tales motivos el método de iteración inversa constituye la base de varios algoritmos (como el de iteración de subespacios y el de búsqueda del determinante) apropiados para computadoras. En la referencia 45, se trata con más amplitud este método y sus variantes, y se presentan inclusive los correspondientes programas para computadoras.

137

#### 1.1.4 Fórmulas de Wilbur

La rigidez de entepiso es la relación entre la fuerza cortante absorbida por un marco, muro o contraviento en un entepiso y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles que lo limitan. La rigidez así definida no es independiente del sistema de fuerzas laterales. Por tanto, para calcularla con rigor debe conocerse tal sistema con anterioridad, lo cual en general no es posible.

En marcos ordinarios de edificios el empleo de sistemas de cargas que no son estrictamente proporcionales al definitivo de análisis introduce errores de poca importancia, y usualmente es aceptable calcular las rigideces a partir de hipótesis simplificadoras sobre la forma del sistema de fuerzas laterales. En muros, contravientos y ciertos marcos es indispensable tener en cuenta la variación de la carga lateral.

Las fórmulas de Wilbur son aplicables a marcos regulares formados por piezas de momentos de inercia constante. La versión que aquí se presenta se basa en las siguientes hipótesis:

1. Los giros en todos los nudos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales, excepto en el nivel de desplante, en donde puede suponerse empotramiento o articulación según el caso.
2. Las fuerzas cortantes en los dos entepisos adyacentes al que interesa son iguales a la de éste.

De aquí resultan las siguientes expresiones.

- Para el primer entepiso:

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación

$$R_1 = \frac{48E}{h_1 \left[ \frac{4h_1}{\Sigma K_{c1}} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{l1} + \frac{\Sigma K_{c1}}{12}} \right]} \quad (1.5)$$

138

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación

$$R_1 = \frac{24E}{h_1 \left[ \frac{8h_1}{\Sigma K_{c1}} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma K_{l1}} \right]} \quad (1.6)$$

- Para el segundo entrepiso:

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{\Sigma K_{c2}} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{l1} + \frac{\Sigma K_{c1}}{12}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{l2}} \right]} \quad (1.7)$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{\Sigma K_{c2}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{l2}} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma K_{l1}} \right]} \quad (1.8)$$

- Para entrepisos intermedios:

$$R_n = \frac{48E}{h_n \left[ \frac{4h_n}{\Sigma K_{cn}} + \frac{h_m + h_n}{\Sigma K_{lm}} + \frac{h_n + h_o}{\Sigma K_{ln}} \right]} \quad (1.9)$$

En estas ecuaciones

- $R_n$  rigidez del entrepiso en cuestión.
- $K_{ln}$  rigidez (I/L) de las vigas del nivel sobre el entrepiso  $n$ .
- $K_{cn}$  rigidez (I/L) de las columnas del entrepiso  $n$ .
- $m, n, o$  índices que identifican tres niveles consecutivos de abajo hacia arriba.
- $h_n$  altura del entrepiso  $n$ .

Para el entrepiso superior, si se acepta que la cortante del penúltimo piso es el doble que la del último, se encuentra que es aplicable la fórmula para entrepisos intermedios, poniendo  $2h_m$  en vez de  $h_m$  y haciendo  $h_o = 0$ .

# UANL

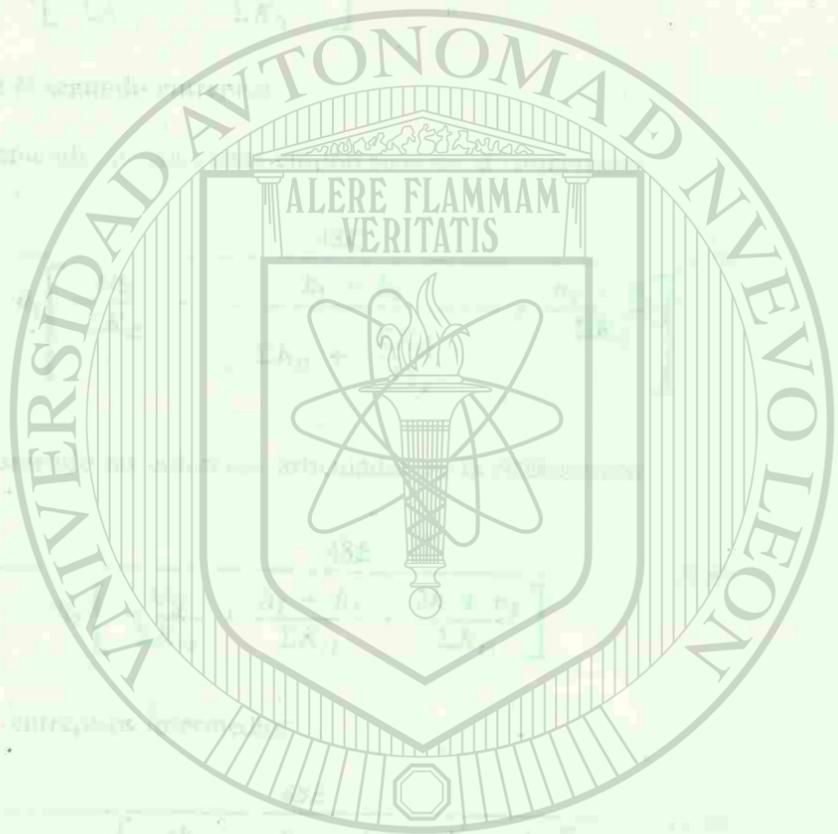
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Fecha: \_\_\_\_\_

12-NOV-07  
Soco



# UANL

## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

### DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



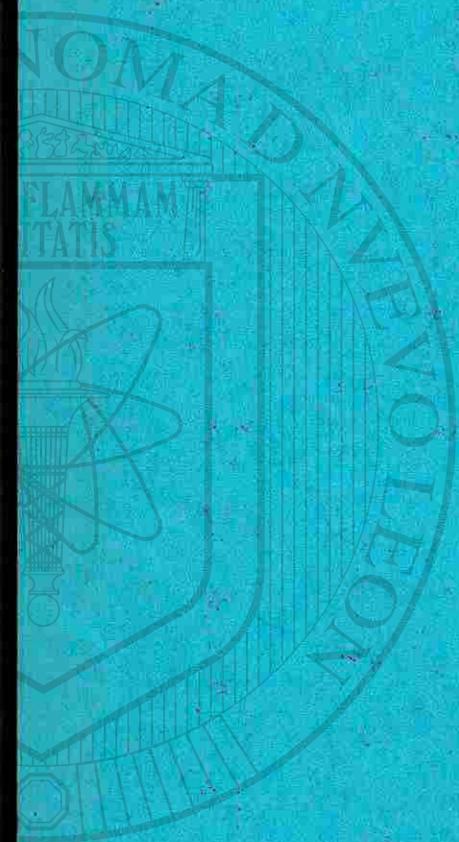
Donado por:

*Univ. Aut. Metrop.*

*Univ. Aztlapalpa*

Fecha: *06. Nov. 2006.*

CAPILLA ALFONSO



U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECA