CAPITULO 1

CINEMATICA DE LAS VIBRACIONES

1.1. Definiciones. Una vibración es, en su sentido más general, un movimiento periódico, es decir, un movimiento que se repite con todas sus características después de un cierto intervalo de tiempo llamado *periodo* de la vibración, designado generalmente por el símbolo T. Una gráfica de desplazamiento x contra el tiempo, puede resultar una curva sumamente complicada. Como un ejemplo, la Fig. 1.1*a* muestra la curva del movimiento observado en el pedestal de las chumaceras de una turbina de vapor.

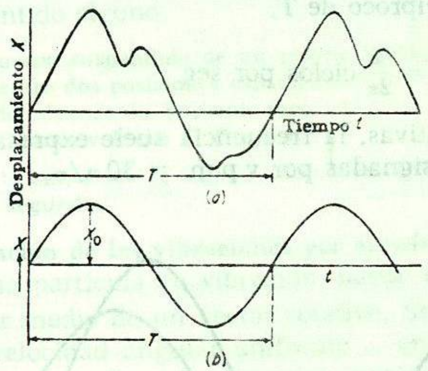

Fig. 1.1. Función periódica y armónica, mostrando el periodo T y la amplitud x_0

El tipo más sencillo de movimiento periódico es el *movimiento armónico*; en él, la relación entre x y t puede expresarse por

$$x = x_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{1.1}$$

como se muestra en la Fig. 1.1*b*, que representa las pequeñas oscilaciones de un péndulo simple. El valor máximo del desplazamiento es x_0 llamado *amplitud* de la vibración.

El periodo T generalmente se mide en segundos, y su recíproco $f = 1/T$ es la *frecuencia* de la vibración, medida en *ciclos por segundo*. En algunas publicaciones esto suele abreviarse por *cips*, pronunciándose tal como está escrito. En la literatura alemana a los ciclos por segundo se les suele llamar *Hertz*, en honor del primer investigador en ondas de radio (que son vibraciones eléctricas).

En la Ec. (1.1) aparece el símbolo ω, conocido como *frecuencia circular* y medido en radianes por segundo. Este más bien desafortunado nombre, se ha hecho familiar debido a las propiedades de la representación vectorial, misma que se discutirá en el próximo artículo. Las relaciones entre ω, f y T son las siguientes. En la Ec. (1.1) y la Fig. 1.1*b*, puede verse claramente que un ciclo completo de la vibración tiene lugar cuando ωt ha pasado al través de 360° o sea 2π radianes. Entonces sus valores previos, estarán resumidos en la función seno. Así, cuando $\omega t = 2\pi$, el intervalo de tiempo t será igual al periodo T, o sea,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ seg} \tag{1.2}$$

Puesto que f es el recíproco de T,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ ciclos por seg} \tag{1.3}$$

En las máquinas rotativas, la frecuencia suele expresarse en vibraciones por minuto, designadas por v.p.m. $= 30\,\omega/\pi$.

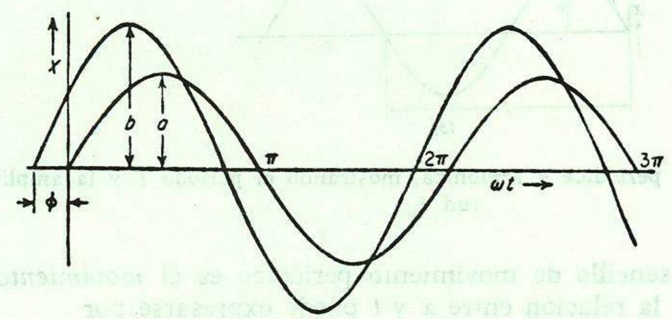

Fig. 1.2. Dos movimientos armónicos incluyendo el ángulo de fase φ

En un movimiento armónico en el cual el desplazamiento esté dado por $x = x_0$ sen ωt, la velocidad se encuentra, obteniendo la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x_0\omega \cos \omega t \tag{1.4}$$

de tal suerte que la velocidad resulta también armónica con un valor máximo.

La aceleración será

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -x_0\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{1.5}$$

también armónica y con valor máximo $\omega^2 x_0$.

Consideremos dos vibraciones dadas por las expresiones $x_1 = a$ sen ωt y $x_2 = b$ sen $(\omega t + \varphi)$, que se muestran en la Fig. 1.2, graficadas contra ωt como abscisa. Debido a la presencia de la magnitud φ, las dos vibraciones no lograrán su desplazamiento en el mismo instante, ya que una de ellas estará φ/ω seg detrás de la otra. La magnitud φ se conoce como el *ángulo de fase* o *diferencia de fase* entre las dos vibraciones. Puede verse que los dos movimientos tienen la misma ω y, como consecuencia, igual frecuencia f. El ángulo de fase tiene significado solamente, tratándose de dos movimientos con la misma frecuencia, pues si las frecuencias son diferentes, el ángulo de fase no tiene sentido alguno.

Ejemplo: Un cuerpo suspendido de un resorte vibra verticalmente hacia arriba y hacia abajo entre dos posiciones espaciadas 1 y 1½ cm sobre el suelo. Durante cada segundo alcanza la posición tope (1½ cm sobre el suelo) 20 veces consecutivas. ¿Cuánto valdrán T, f, ω y x_0?

Solución: $x_0 = 1/4$ cm, $T = 1/20$ seg, $f = 20$ ciclos por segundos y $\omega = 2\pi f = 126$ radianes por segundo.

1.2. Representación de las vibraciones por el método vectorial. El movimiento de una partícula en vibración, puede representarse convenientemente por medio de un vector rotativo. Sea el vector $\bar{a}$ Fig. 1.3 girando con velocidad angular uniforme ω, en sentido contrario a las manecillas del reloj. Cuando el tiempo se mide desde la posición horizontal del vector como punto de partida, la proyección horizontal del vector puede escribirse como

$$a \cos \omega t$$

y la proyección vertical como

$$a \operatorname{sen} \omega t$$

Cualquiera de las dos proyecciones puede tomarse como representativa de un movimiento recíproco; en la siguiente argumentación, sin embargo, consideraremos la proyección *horizontal*.

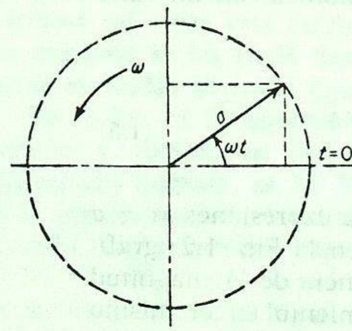

Fig. 1.3. Vibración armónica representada por la proyección horizontal de un vector rotativo

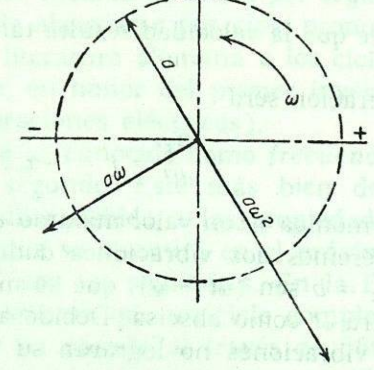

Fig. 1.4. El desplazamiento, la velocidad y la aceleración son vectores perpendiculares

Esta representación ha dado origen al nombre de *frecuencia circular* para ω. La magnitud ω representará la velocidad angular del vector medida en *radianes por segundo;* y la frecuencia f, en este caso, se medirá en *revoluciones por segundo*. Así, podrá verse inmediatamente que

$$\omega = 2\pi f.$$

La *velocidad* del movimiento $x = a \cos \omega t$ será

$$\dot{x} = -a\omega \operatorname{sen} \omega t$$

la cual podrá representarse por (la proyección horizontal de) un vector de longitud $a\omega$, girando con la misma velocidad angular ω que el vector del desplazamiento, pero situada siempre 90° adelante de ese vector. La *aceleración* será $-a\omega^2 \cos \omega t$ y estará representada por (la proyección horizontal de) un vector de longitud $a\omega^2$ girando con la misma velocidad angular ω y 180° adelante con respecto a la posición del vector de desplazamiento, o bien 90° adelante del vector velocidad (Fig. 1.4). La veracidad de estos argumentos puede comprobarse fácilmente, siguiendo los diferentes vectores al través de una revolución completa.

Este método vectorial de visualizar movimientos recíprocos resulta sumamente conveniente. Por ejemplo, si un punto está simultáneamente sujeto a dos movimientos con la misma frecuencia, pero que difieren en el ángulo de fase φ, sean $a \cos \omega t$, y $b \cos(\omega t - \varphi)$, la suma de estas dos expresiones por métodos trigonométricos resul-

4

taría tedioso. Empero, los dos vectores pueden fácilmente dibujarse, y el movimiento total quedará representado por la suma geométrica de los dos vectores, como se muestra en la parte superior de la Fig. 1.5. Una vez más el paralelogramo completo $\bar{a}$, $\bar{b}$, se considera

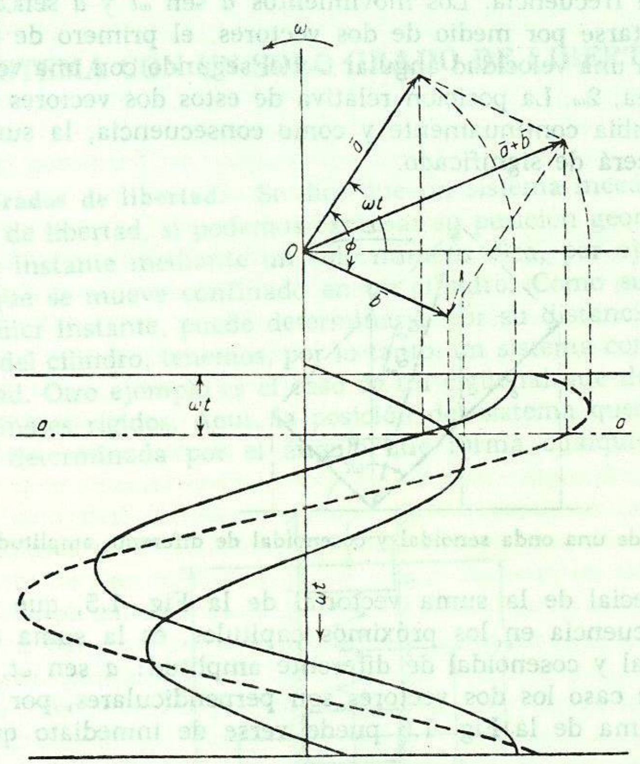

Fig. 1.5. Dos vibraciones se suman sumando sus vectores geométricamente

girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, con la velocidad angular uniforme ω, y la proyección horizontal de los diferentes vectores representará el desplazamiento en función del tiempo. Esto se muestra en la parte inferior de la Fig. 1.5. La línea *a-a* representa el instante de tiempo particular para el cual se ha dibujado el diagrama. Puede verse de inmediato, que el desplazamiento de la suma (línea punteada) es de hecho la suma de las ordenadas de $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Es evidente que con la suma de estos vectores se obtiene el resultado correcto, porque $a \cos \omega t$ es la proyección horizontal del vector $\bar{a}$ y, $b \cos(\omega t - \varphi)$ es la proyección horizontal del vector $\bar{b}$. La proyección horizontal de la suma geométrica de estos dos vectores

5

es evidentemente igual a la suma de las proyecciones horizontales de sus dos componentes vectoriales, que es justamente lo que se requería.

La suma de dos vectores será lícita, solamente si las vibraciones son de la misma frecuencia. Los movimientos a sen ωt y a sen $2\omega t$ pueden representarse por medio de dos vectores, el primero de los cuales girará con una velocidad angular ω y el segundo con una velocidad doble, o sea, 2ω. La posición relativa de estos dos vectores en el diagrama cambia continuamente y como consecuencia, la suma geométrica carecerá de significado.

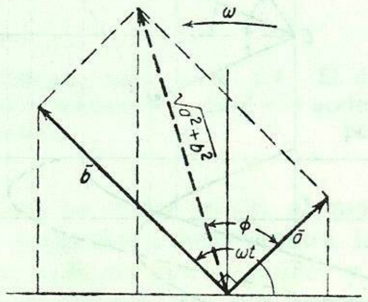

Fig. 1.6. Suma de una onda senoidal y cosenoidal de diferente amplitud

Un caso especial de la suma vectorial de la Fig. 1.5, que se presenta con frecuencia en los próximos capítulos, es la suma de una onda senoidal y cosenoidal de diferente amplitud: a sen ωt, y b cos ωt. En este caso los dos vectores son perpendiculares, por lo que en el diagrama de la Fig. 1.6 puede verse de inmediato que

$$a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) \qquad (1.6)$$

donde

$$\tan \varphi = b/a.$$

Ejemplo: ¿Cuál será la máxima amplitud de la suma de los dos movimientos

$$x_1 = 5 \operatorname{sen} 25t \text{ cm} \quad \text{y} \quad x_2 = 10 \operatorname{sen} (25t + 1) \text{ cm?}$$

Solución: El primer movimiento estará representado por un vector de 5 cm de longitud, el cual puede dibujarse verticalmente apuntando hacia abajo. Puesto que en esta posición el vector carece de proyección horizontal, representa entonces el primer movimiento en el instante $t = 0$. En ese instante, el segundo movimiento es $x_2 = 10$ sen 1, el cual está representado por un vector de 10 cm de longitud, girado 1 radián (50°) con respecto al primer vector, en el sentido de las manecillas de un reloj. La suma vectorial gráfica muestra el vector suma de 13.4 cm de longitud.

CAPITULO 2

SISTEMA CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

2.1. Grados de libertad. Se dice que un sistema mecánico tiene un grado de libertad, si podemos expresar su posición geométrica en cualquier instante mediante un solo número. Sea, por ejemplo, un émbolo que se mueve confinado en un cilindro. Como su posición, en cualquier instante, puede determinarse por su distancia desde el extremo del cilindro, tenemos, por lo tanto, un sistema con un grado de libertad. Otro ejemplo es el caso de un cigüeñal que descansa en unos cojinetes rígidos. Aquí, la posición del sistema queda completamente determinada por el ángulo que forma cualquiera de sus

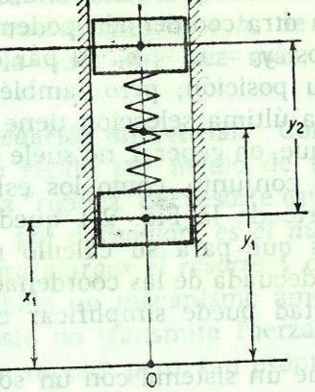

Fig. 2.1. Dos grados de libertad

codos con el plano vertical. Un peso suspendido de un resorte, de tal suerte que se vea restringido por guías que le permitan desplazarse solamente en dirección vertical, es un sistema típico de vibraciones con un solo grado de libertad (Fig. 2.3).

En general, podemos decir que si para especificar la posición de un sistema mecánico se requieren n números, el sistema tiene n