es evidentemente igual a la suma de las proyecciones horizontales de sus dos componentes vectoriales, que es justamente lo que se requería.

La suma de dos vectores será lícita, solamente si las vibraciones son de la misma frecuencia. Los movimientos a sen ωt y a sen $2\omega t$ pueden representarse por medio de dos vectores, el primero de los cuales girará con una velocidad angular ω y el segundo con una velocidad doble, o sea, 2ω. La posición relativa de estos dos vectores en el diagrama cambia continuamente y como consecuencia, la suma geométrica carecerá de significado.

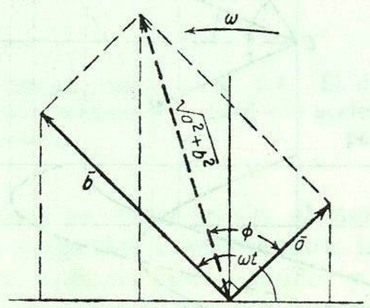

FIG. 1.6. Suma de una onda senoidal y cosenoidal de diferente amplitud

Un caso especial de la suma vectorial de la Fig. 1.5, que se presenta con frecuencia en los próximos capítulos, es la suma de una onda senoidal y cosenoidal de diferente amplitud: a sen ωt, b cos ωt. En este caso los dos vectores son perpendiculares, por lo que en el diagrama de la Fig. 1.6 puede verse de inmediato que

$$a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) \qquad (1.6)$$

donde

$$\tan \varphi = b/a.$$

EJEMPLO: **¿Cuál será la máxima amplitud de la suma de los dos movimientos**

$$x_1 = 5 \operatorname{sen} 25t \text{ cm} \quad \text{y} \quad x_2 = 10 \operatorname{sen} (25t + 1) \text{ cm?}$$

Solución: **El primer movimiento estará representado por un vector de 5 cm de longitud, el cual puede dibujarse verticalmente apuntando hacia abajo. Puesto que en esta posición el vector carece de proyección horizontal, representa entonces el primer movimiento en el instante $t = 0$. En ese instante, el segundo movimiento es $x_2 = 10$ sen 1, el cual está representado por un vector de 10 cm de longitud, girado 1 radián (50°) con respecto al primer vector, en el sentido de las manecillas de un reloj. La suma vectorial gráfica muestra el vector suma de 13.4 cm de longitud.**

CAPITULO 2

SISTEMA CON UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

2.1. Grados de libertad. Se dice que un sistema mecánico tiene un grado de libertad, si podemos expresar su posición geométrica en cualquier instante mediante un solo número. Sea, por ejemplo, un émbolo que se mueve confinado en un cilindro. Como su posición, en cualquier instante, puede determinarse por su distancia desde el extremo del cilindro, tenemos, por lo tanto, un sistema con un grado de libertad. Otro ejemplo es el caso de un cigüeñal que descansa en unos cojinetes rígidos. Aquí, la posición del sistema queda completamente determinada por el ángulo que forma cualquiera de sus

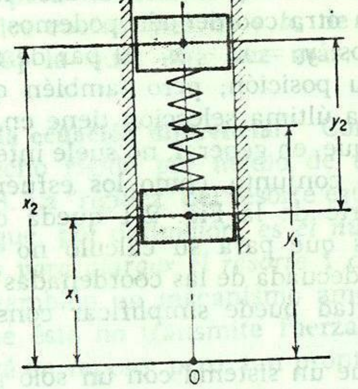

FIG. 2.1. Dos grados de libertad

codos con el plano vertical. Un peso suspendido de un resorte, de tal suerte que se vea restringido por guías que le permitan desplazarse solamente en dirección vertical, es un sistema típico de vibraciones con un solo grado de libertad (Fig. 2.3).

En general, podemos decir que si para especificar la posición de un sistema mecánico se requieren n números, el sistema tiene n

grados de libertad. Un disco que se mueve en un plano sin restricción alguna tiene tres grados de libertad que son: los desplazamientos x y y del centro de gravedad y el ángulo de rotación con respecto a su centroide. Un cilindro que rueda por un plano inclinado tiene un grado de libertad. Si, por otro lado, su descenso consiste tanto en rodamiento como en deslizamiento, tendrá dos grados de libertad: uno debido a la traslación y el otro a la rotación.

Un cuerpo rígido que se mueve libremente en el espacio, tiene seis grados de libertad: tres por las traslaciones y tres por las rotaciones. En consecuencia, para definir su posición se requieren tres números o "coordenadas". Estas coordenadas se denominan, generalmente x, y, z, φ, ψ, χ. Un sistema de dos cuerpos rígidos unidos por medio de un resorte o cualquier otra sujeción, de tal suerte que cualquier cuerpo pueda moverse solamente en una línea recta sin poder girar, tiene dos grados de libertad (Fig. 2.1). El par de magnitudes que determina la posición de este sistema puede escogerse de manera más o menos arbitraria. Por ejemplo, podemos llamar x_1 a la distancia desde un punto fijo O al primer cuerpo y x_2 a la distancia desde el punto O al segundo cuerpo. Luego x_1 y x_2 serán las coordenadas. Empero, podríamos también escoger la distancia desde O al centro de gravedad de los dos cuerpos como una de las coordenadas y denominarlas y_1. Para la otra coordenada podemos escoger la distancia entre los dos cuerpos, $y_2 = x_2 - x_1$. El par de números x_1, x_2 describe completamente su posición; pero también queda determinada con el par y_1, y_2. Esta última selección tiene en este caso una cierta ventaja práctica, ya que, en general, no suele interesarnos tanto la posición del sistema en conjunto, como los esfuerzos dentro de él. El esfuerzo en el resorte de la Fig. 2.1 queda completamente determinado por y_2, así es que para su cálculo no se requiere el valor de y_1. Una selección adecuada de las coordenadas de un sistema con varios grados de libertad puede simplificar considerablemente los cálculos.

No debemos suponer que un sistema con un solo grado de libertad sea siempre muy sencillo. Por ejemplo, un motor de gasolina de 12 cilindros con un cigüeñal rígido y un bloque de cilindros rígidamente montado, tiene un solo grado de libertad con todos sus émbolos movibles, vástagos, válvulas, árbol de levas, etc. Esto resulta así porque un solo número (por ejemplo, el ángulo que ha girado el cigüeñal) determina completamente la posición de cada una de las partes móviles del motor. Sin embargo, si el bloque de cilindros está montado en resortes flexibles que le permitan moverse en cualquier dirección (como es el caso en la mayoría de los auto-

móviles modernos), el sistema tiene siete grados de libertad, que son los seis pertenecientes al bloque como un cuerpo rígido libre en el espacio y el ángulo del cigüeñal como la séptima coordenada.

Un sistema completamente flexible tiene un número infinito de grados de libertad. Considere, por ejemplo, una viga flexible con dos apoyos. Mediante una solicitación de carga adecuada, es posible pandear la viga haciéndola tomar una curva de cualquier configuración (Fig. 2.2). La descripción de esta curva requiere función $y = f(x)$.

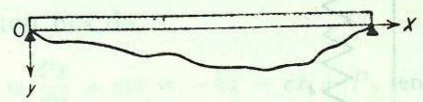

FIG. 2.2. Una viga tiene un número infinito de grados de libertad

que es equivalente a un número infinito de pares de valores En cada punto x de la viga, se puede obtener la flecha y independientemente de las otras partículas de la viga (dentro de los límites de elasticidad de la viga). Así pues, la determinación completa de su posición requiere tantos valores de y como puntos tiene el eje de la viga. En el caso de la Fig. 2.1, la función $y = f(x)$ no es único conjunto de números de que se puede disponer para definir su posición. Otro camino para determinar su elástica sería especificar todos los valores de los coeficientes a_n y b_n de su serie de Fourier [Ec. (1.11), Pág. 36] la que, una vez más, es numéricamente infinita.

2.2 Obtención de la ecuación diferencial. Considere una masa m suspendida de un techo rígido por medio de un resorte, como se muestra en la Fig. 2.3. La "rigidez" del resorte está dada por su "constante de resorte" k, que, por definición, es *el número de kilogramos de tensión necesarios para alargar el resorte* 1 *cm*. Entre la masa y la pared rígida hay también un mecanismo amortiguador de aire o aceite. Se supone que éste no transmite fuerza alguna a la masa, siempre y cuando esté en reposo; pero, tan pronto como se mueva la masa, la "fuerza de amortiguamiento" del mecanismo es cx o cdx/dt, es decir, proporcional a la velocidad y en dirección opuesta. La magnitud c se conoce como *constante de amortiguamiento* o, sin abreviación, como *coeficiente de amortiguamiento viscoso.*

El amortiguamiento que tiene efecto en los sistemas mecánicos reales no siempre sigue una ley tan sencilla como la relación cx. Casos mucho más complicados se presentan con frecuencia. Pero entonces, la teoría matemática resulta muy complicada (véase Cap.

8, Pág. 477 y 494), mientras que con amortiguamiento "viscoso" el análisis resulta relativamente sencillo.

Sea una fuerza exterior alterna P_0 sen ωt actuando sobre una masa, originada por algún mecanismo que no necesitamos especificar en detalle. Para una visualización mental suponga que esta fuerza se ha obtenido por alguien que empuja y tira de la masa artificialmente.

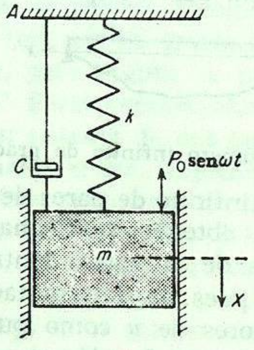

FIG. 2.3. El sistema fundamental de un solo grado de libertad

El problema consiste en calcular el movimiento de la masa m debido a esta fuerza exterior. O, en otras palabras, si x es la distancia entre cualquier posición instantánea de la masa durante su movimiento y su posición de equilibrio, tendremos que obtener x en función del tiempo. La "ecuación del movimiento" que vamos a derivar no es otra que la expresión matemática de la segunda ley de Newton.

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}$$

Todas las fuerzas que actúan sobre la masa se consideran positivas cuando se ejercen hacia abajo y negativas cuando se ejercen hacia arriba.

La fuerza del resorte es de *magnitud kx*, puesto que es cero cuando no hay alargamiento x. Cuando $x = 1$ cm, la fuerza del resorte es, por definición, de k kg y, como consecuencia, la fuerza del resorte para cualquier otro valor de x (en centímetros) será kx (en kilogramos), dado que el resorte sigue la ley de proporcionalidad de Hooke entre la fuerza y deformación.

El *signo* de la fuerza del resorte es negativo, puesto que el resorte tira *hacia arriba* de la masa, cuando el desplazamiento es *hacia abajo*, o bien la fuerza del resorte es negativa, cuando x es positiva. Así pues, la fuerza del resorte está expresada por $-kx$.

La fuerza de amortiguamiento que actúa sobre la masa también es negativa, siendo su valor $-c\dot{x}$, ya que está dirigida *contra* la velocidad $\dot{x}$; actúa hacia *arriba* (negativa), mientras que $\dot{x}$ está dirigida *hacia abajo* (positiva). Las tres fuerzas que actúan sobre la masa hacia abajo son

$$-kx - c\dot{x} + P_0 \operatorname{sen} \omega t$$

La ley de Newton nos da

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + P_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

o

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad (2.1)$$

Esta ecuación tan importante* se conoce como la *ecuación diferencial del movimiento de un sistema con un solo grado de libertad*. Los cuatro términos de la Ec. (2.1) son la fuerza de inercia, la fuerza de amortiguamiento, la fuerza del resorte y la fuerza exterior.

Antes de proceder a calcular x de la Ec. (2.1), es decir, a la solución de la ecuación diferencial, es conveniente considerar algunos otros problemas que nos lleven a la misma ecuación.

2.3. Otros casos. La Fig. 2.4 representa un disco con momento de inercia I sujeto a una flecha con una rigidez torsional k, definida como *el momento en kilogramos-centímetros necesario para lograr un giro de torsión del disco de* 1 *radián*. Considere el movimiento de torsión del disco bajo la influencia de un par de torsión T_0 sen ωt, aplicado externamente. Una vez más este es un problema con un solo grado de libertad, ya que el desplazamiento torsional del disco desde su posición de equilibrio puede expresarse con una sola magnitud: el ángulo φ. La ley de Newton, aplicada a un cuerpo que gira, establece que

$$\text{Par de torsión} = \text{momento de inercia} \times \text{aceleración angular}$$

$$= I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I\ddot{\varphi}$$

* En esta derivación se ha omitido el efecto de la gravedad. La amplitud x se midió desde la "posición de equilibrio", es decir, desde la posición donde la fuerza mg, que actúa hacia abajo, se mantiene en equilibrio con la fuerza del resorte $k\delta$, que actúa hacia arriba (donde δ es la deformación del resorte debida a la gravedad). Hubiera sido posible medir x_1 desde la posición del resorte sin *deformar*, de tal suerte que $x_1 = x + \delta$. En la Ec. (2.1), x deberá sustituirse por x_1, debiendo añadirse en el segundo miembro de la fuerza mg. Esto nos conduce al mismo resultado (2.1).

Sustituyendo estos valores en la Ec. (2.5), tenemos:

$$m\ddot{y} - ma_0\omega^2 \operatorname{sen} \omega t + c\dot{y} + ca_0\omega \cos \omega t + ky + ka_0 \operatorname{sen} \omega t = ka_0 \operatorname{sen} \omega t + ca_0\omega \cos \omega t$$

o

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = ma_0\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \qquad (2.6)$$

Así, el movimiento relativo entre la masa y el techo en movimiento actúa de igual manera que el movimiento absoluto de una masa con el techo en reposo y con una fuerza de amplitud $ma_0\omega^2$ actuando en la masa. El segundo miembro de la (2.6) es la fuerza de inercia de la masa, si se moviera con amplitud a_0, y, por ende, puede considerarse como la fuerza que tendría que aplicarse en la parte superior del resorte si éste fuese rígido, es decir, si se impide el movimiento y.

2.4. Vibraciones libres sin amortiguamiento. Antes de desarrollar la solución de la ecuación general (2.1), es útil considerar primero los casos más sencillos. Si no hay ninguna fuerza exterior aplicada $P_0 \operatorname{sen} \omega t$ ni amortiguamiento ($c = 0$), la expresión (2.1) se reduce a

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (2.7)$$

o

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

o, en lenguaje común: *La deformación x es una función del tiempo tal que al obtener su segunda derivada, se obtiene una vez más la misma función, multiplicada por una constante negativa.* Aun desconociendo las ecuaciones diferenciales, podemos recordar que existen funciones de este tipo, a saber, senos y cosenos, y una tentativa nos muestra que sen $t\sqrt{k/m}$ y cos $t\sqrt{k/m}$ son, de hecho, soluciones de la (2.7). La forma más general en que se puede escribir la solución de la (2.7) es

$$x = C_1 \operatorname{sen} t\sqrt{\frac{k}{m}} + C_2 \cos t\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2.8)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Puede comprobarse fácilmente que la (2.8) es una solución de la (2.7), simplemente obteniendo la segunda derivada de la (2.8) y sustituyendo este valor en la (2.7). No existe ninguna solución de la (2.7) que no sea la (2.8). Esto no se necesita demostrar aquí; es cierto y se dará por supuesto.

Interpretemos ahora físicamente la (2.8). Primeramente se ve que el resultado, tal como aparece, es bastante indefinido. Las constantes C_1 y C_2 pueden tener cualquier valor que queramos asignarles. Pero el problema en sí no se ha planteado por completo. El resultado (2.8) describe *todos* los movimientos que son capaces de lograr el sistema de masa y resorte. Entre otros, está el caso para el cual $C_1 = C_2 = 0$, dando $x = 0$, lo que significa que la masa permanece perennemente en reposo.

(12)

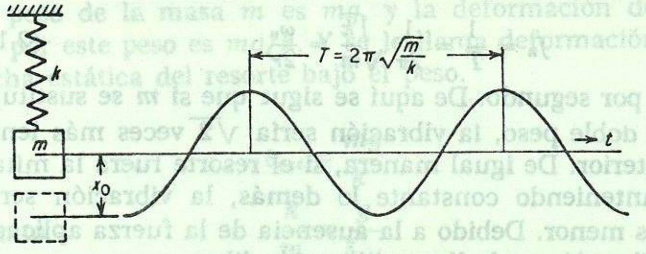

FIG. 2.8. Vibración libre sin amortiguamiento, partiendo de un desplazamiento inicial

Especificaremos ahora en forma definitiva que la masa se ha desplazado de su posición de equilibrio a $x = x_0$, y después se ha liberado sin velocidad inicial. Midiendo el tiempo, desde el instante en que se libera, las dos condiciones son

en $t = 0$, $\quad x = x_0 \quad$ y $\quad \dot{x} = 0$

Sustituyendo la primera condición en la (2.8), obtenemos

$$x_0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \quad \text{o} \quad C_2 = x_0$$

Para la segunda condición deberemos derivar primero la Ec. (2.8), obteniendo después

$$0 = C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 1 - C_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 \quad \text{o} \quad C_1 = 0$$

Sustituyendo estos resultados en la (2.8), lograremos la solución específica

$$x = x_0 \cos t\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2.8a)$$

Esto representa una *vibración sin amortiguamiento*, un ciclo de la cual ocurre cuando $t\sqrt{k/m}$ varía al través de 360° o 2π radianes (Fig. 2.8). Denominando T al tiempo por ciclo o *periodo*, tendremos

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot T = 2\pi \quad \text{o} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (2.9)$$

(13)

Es usual denominar a $\sqrt{k/m}$ por ω_n llamada "frecuencia circular natural". El valor $\sqrt{k/m} = \omega_n$ es la velocidad angular del vector rotativo que representa el movimiento vibratorio (véase Pág. 17).

El recíproco de T o *frecuencia natural* f_n es

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad (2.10)$$

medida en ciclos por segundo. De aquí se sigue que si m se sustituye por una masa de doble peso, la vibración sería $\sqrt{2}$ veces más lenta que en el caso anterior. De igual manera, si el resorte fuera la mitad de resistente, manteniendo constante lo demás, la vibración sería también $\sqrt{2}$ veces menor. Debido a la ausencia de la fuerza aplicada P_0 sen ωt a esta vibración se le llama *vibración libre*.

Si partimos de la suposición de que el movimiento es armónico, la frecuencia puede calcularse en forma muy sencilla de la *consideración de la energía*. En el centro de una oscilación la masa tiene una energía cinética considerable, mientras que en las posiciones extremas permanece instantáneamente en reposo, careciendo entonces de energía cinética. En este instante el resorte está en estado de tensión (o compresión) y, por ende, con energía elástica almacenada en él. En cualquier posición entre el punto medio y el extremo, tiene simultáneamente energía cinética y elástica, la suma de las cuales es constante, puesto que las fuerzas exteriores no efectúan trabajo alguno en el sistema. En consecuencia, la energía cinética en el punto medio de su recorrido deberá ser igual a la energía elástica almacenada en su posición extrema.

Procederemos a calcular estas energías. La fuerza del resorte es kx, y el trabajo efectuado al aumentar el desplazamiento en dx es $kx \cdot dx$. La energía potencial o elástica del resorte, cuando se comprime una longitud x, es $\int_0^x kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2$. La energía cinética en cualquier instante es $\frac{1}{2}mv^2$. Supongamos que el movimiento es $x = x_0$ sen ωt, entonces $v = x_0\omega$ cos ωt. La energía potencial en la posición extrema es $\frac{1}{2}kx_0^2$, y la energía cinética en la posición neutral, donde la velocidad es máxima, es $\frac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2$.

Por lo tanto, $\qquad \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2$

en la cual $\omega^2 = k/m$, independientemente de la amplitud x_0. Este "método energético" para calcular la frecuencia es de suma importancia. En los Caps. 4 y 6 se verá, al tratar con sistemas más complejos, que la determinación de la frecuencia, partiendo de la ecua-

14

ción diferencial, resulta, a veces, tan complicada que se hace prácticamente imposible. En tales casos, la generalización del método de la energía, conocida como método de *Rayleigh*, nos proporcionará los resultados (véanse Págs. de la 191 a la 209).

La fórmula $\omega_n = \sqrt{k/m}$ puede escribirse de manera algo diferente. El peso de la masa m es mg, y la deformación del resorte originada por este peso es mg/k. Y se le llama deformación estática δ_{est} o flecha estática del resorte bajo el peso.

$$\delta_{est} = \frac{mg}{k}$$

Por lo tanto, $$\frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_{est}}$$

o $$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}} \qquad (2.11)$$

Si δ_{est} se expresa en cm, $g = 981$ cm/seg^2 y la frecuencia es

$$f_n = \frac{\sqrt{981}}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{\delta_{est}}} = 5\sqrt{\frac{1}{\delta_{est}}} \text{ ciclos por segundo}$$

$$f_n = 300\sqrt{\frac{1}{\delta_{est}}} \text{ ciclos por minuto} \qquad (2.11a)$$

Esta relación, que es bastante útil para estimar en forma rápida las frecuencias naturales o velocidades críticas, se muestra gráficamente en la Fig. 2.9. En papel logarítmico aparece como una línea recta.

2.5. Ejemplos. Considere algunos ejemplos numéricos aplicando la fórmula fundamental (2.10).

1. Una barra de acero de 1 por ½ cm de sección transversal está sólidamente sujeta a un banco de sus extremos y soportando un peso de 20 kg en el otro (Fig. 2.10). (a) ¿Cuál será su frecuencia de vibración, si la distancia entre la carga y el empotre es de 30 cm? (b) ¿Cuál será el porcentaje de variación de la frecuencia, si acortamos la barra ¼ cm?

a. El peso propio de la barra es ½ por 1 por 30 cm³ y por 0.00774 kg por centímetro cúbico, o sea aproximadamente, 0.12 kg. Las moléculas de la barra cercanas a la pesa de 20 kg vibran en su extremo prácticamente con la misma amplitud que la pesa, mientras que las moléculas cercanas al extremo del empotre casi no vibran. Esto se

15

toma en cuenta sumando parte del peso de la barra al peso en su extremo. En la Pág. 209 se muestra que hay que sumar, aproximadamente, la cuarta parte del peso de la barra. Por lo tanto, la masa m de la Ec. (2.10) es $20.03/g = 20.03/981$ kg cm^{-1} seg^{2}.

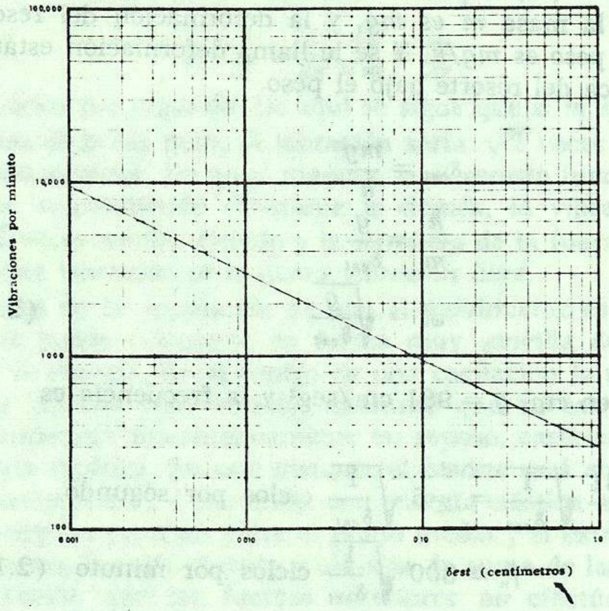

Fig. 2.9. Curva representativa de la Ec. (2.11*a*) para la frecuencia natural de un sistema sin amortiguamiento con un solo grado de libertad

Una fuerza P en el extremo de un volado origina una deformación $\delta = Pl^3/3EI$. La constante del resorte es por definición

$$k = P/\delta = 3EI/l^3$$

El momento de inercia de la sección es $I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{24}$ (o $\frac{1}{96}$, dependiendo esto si la vibración tiene lugar en su parte más rígida o en el plano más flexible. La frecuencia circular es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3\,(2)\,10^6\,(981)}{24\,(30^3)\,20.03}} = 13 \text{ radianes por segundo}$$

La frecuencia $f_n = \omega_n/2\pi = 2.38$ ciclos por segundo.

En caso de que la barra vibre en la dirección de la parte más débil de la sección $I = \frac{1}{96}$, y f_n resulta la mitad de su valor original, o sea 1.19 ciclos por segundo.

16

b. La pregunta respecto al cambio de frecuencia debido al cambio de longitud puede contestarse como sigue. La constante de resorte k es proporcional a $1/l^3$ y la frecuencia, por consiguientes, es proporcional a $\sqrt{1/l^3} = l^{-3/2}$. El acortar la barra 1 por ciento, incrementará la frecuencia en $1\frac{1}{2}$ por ciento. Así pues, el acortamiento de $\frac{1}{4}$ de cm aumentará la frecuencia en $1\frac{1}{4}$ por ciento.

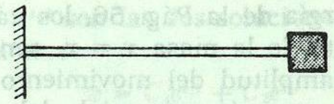

Fig. 2.10

2. Como un segundo ejemplo, considere un tubo en forma de U, lleno de agua (Fig. 2.11). Sea la longitud total de la columna l, la sección transversal del tubo A y la masa de agua por centímetro cúbico m_1. Si el agua oscila hacia atrás y hacia adelante, la masa en movimiento es $m_1 \cdot A \cdot l$. En este problema no hay un resorte específico, pero, aun así, la fuerza gravitacional tiende a mantener el agua

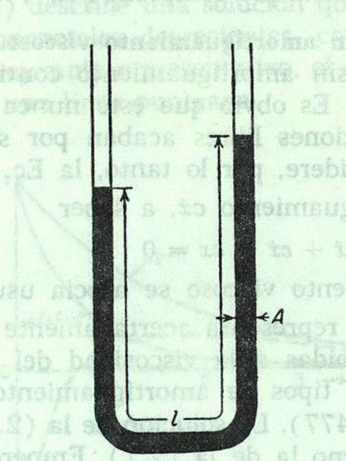

Fig. 2.11. Oscilación de una columna líquida en un tubo en forma de U

en su posición de equilibrio. Así pues, tendremos un "resorte-gravitacional", en el cual la constante del resorte es, por definición, la fuerza por unidad de deformación. Si elevamos 1 cm el nivel en uno de los brazos del tubo, descenderá entonces 1 cm en el otro. Esto proporciona un peso desequilibrado de 2 cm de columna de agua, originando una fuerza de $(2m_1A) \cdot g$, que es la constante del resorte.

17