

Por lo tanto, la constante efectiva de resorte en la masa es $k \cdot (a/l)^2$. El efecto de la rigidez del resorte puede verse que disminuye rápidamente a medida que se desplaza hacia la izquierda.

La frecuencia es

$$\omega_n = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Con el método de la energía de la Pág. 56, los cálculos son los siguientes: Sea el movimiento de la masa $x = x_0 \sin \omega_n t$, donde ω_n es todavía desconocida. La amplitud del movimiento en el resorte será entonces $x_0 a/l$ y la energía potencial del resorte será $\frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} k (x_0 a/l)^2$. La energía cinética de la masa es $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_n^2 x_0^2$. Igualando estas dos, la amplitud x_0 decrece y

$$\omega_n^2 = \frac{k a^2}{m l^2}$$

Algunos de los problemas del final de este capítulo pueden resolverse más fácilmente con el método de la energía que por la aplicación directa de la fórmula que comprende la $\sqrt{k/m}$.

2.6. Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso. Hemos visto que una vibración libre sin amortiguamiento continúa perennemente [Ec. (2.8) o (2.8a)]. Es obvio que esto nunca ocurre en la naturaleza; todas las vibraciones libres acaban por sucumbir después de cierto tiempo. Considere, por lo tanto, la Ec. (2.1), incluyendo el término de amortiguamiento $c\dot{x}$, a saber

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.12)$$

El término del amortiguamiento viscoso se asocia usualmente con la expresión $c\dot{x}$, puesto que representa acertadamente las condiciones de amortiguamiento debidas a la viscosidad del aceite en un amortiguador. Existen otros tipos de amortiguamiento que se discutirán más adelante (Pág. 477). La solución de la (2.12) no puede obtenerse tan fácilmente como la de la (2.7). Empero, si consideramos la función $x = e^{st}$, donde t es el tiempo y s una constante desconocida, se ve que, al obtener la derivada, resulta la misma función, pero multiplicada por una constante. Sustituyendo esta función en la (2.12), nos permite dividir por e^{st} lo que nos lleva a una ecuación algebraica, en lugar de una ecuación diferencial, lo cual es una gran simplificación. Así pues, suponemos que la solución es e^{st} . Con este supuesto, la Ec. (2.12) resulta

$$(ms^2 + cs + k)e^{st} = 0 \quad (2.13)$$

Si la (2.13) se satisface, nuestra suposición $x = e^{st}$ como solución es correcta. Puesto que la Ec. (2.13) es de segundo grado, en s hay dos valores s_1 y s_2 , que hacen que el primer miembro de la (2.13) sea igual a cero

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.14)$$

de manera que $e^{s_1 t}$ y $e^{s_2 t}$ son las dos soluciones de la Ec. (2.12). La solución más general es

$$x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (2.15)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias

Al dilucidar el significado físico de esta ecuación, debemos distinguir dos casos, que dependen de que las expresiones de s en la Ec. (2.14) sean reales o complejas. Puede verse claramente que cuando $(c/2m)^2 > k/m$, la expresión dentro del radical es positiva, siendo, por lo tanto, reales los dos valores de s . Más aún, ambos son negativos, puesto que la raíz cuadrada es menor que el primer término $c/2m$. Así, la (2.15) describe una solución que consiste en la suma de dos curvas exponenciales decrecientes, como se muestra en la Fig. 2.14. Como un ejemplo representativo, el caso $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ se ha dibujado con una línea punteada.

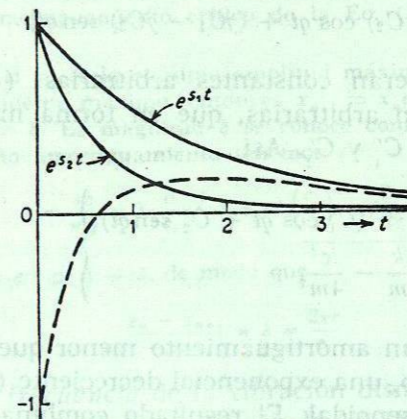


FIG. 2.14. Movimiento de un sistema con un solo grado de libertad con amortiguamiento mayor que el amortiguamiento crítico c_c .

Sin analizar ningún caso especial, determinando los valores de C_1 y C_2 , la figura muestra que el movimiento no es una "vibración"

sino más bien un lento regreso a la posición de equilibrio. Esto se debe al hecho de que cuando $(c/2m)^2 > k/m$, amortiguamiento c es sumamente grande. Para valores menores de c que conciernen más a los casos prácticos, la (2.14) da valores complejos para s , y la solución de la (2.15), tal como está escrita, resulta sin significado alguno. Al amortiguamiento c , en el que ocurre esta transición, se le llama amortiguamiento crítico c_c :

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \sqrt{mk} = 2m\omega_n \quad (2.16)$$

En el caso de que el amortiguamiento sea menor que éste, la (2.14) puede escribirse mejor como

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm j \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\frac{c}{2m} \pm j q \quad (2.17)$$

donde $j = \sqrt{-1}$. Aunque el radical resulta ahora un número real, los dos valores de s contienen a j y, como consecuencia, la solución de la (2.15) contiene términos de la forma e^{jqt} , que debe interpretarse por medio de la Ec. (1.8), de la Pág. 29.

Con la (2.17) y la (1.8) la solución de la (2.15) resulta

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{c}{2m}t} [C_1(\cos qt + j \operatorname{sen} qt) + C_2(\cos qt - j \operatorname{sen} qt)] \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} [(C_1 + C_2) \cos qt + (jC_1 - jC_2) \operatorname{sen} qt] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Puesto que C_1 y C_2 eran constantes arbitrarias, $(C_1 + C_2)$ y $(jC_1 - jC_2)$ serán también arbitrarias, que en forma más sencilla, podemos escribirlas como C'_1 y C'_2 . Así,

$$\text{donde } \left. \begin{aligned} x &= e^{-\frac{c}{2m}t} (C'_1 \cos qt + C'_2 \operatorname{sen} qt) \\ q &= \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.19a, b)$$

Esta es la solución para un amortiguamiento menor que c_c . Consta de dos factores: el primero, una exponencial decreciente (Fig. 2.14), y el segundo, una onda senoidal. El resultado combinado es "una onda senoidal amortiguada" descansando en el espacio entre la curva exponencial y su imagen reflejada (Fig. 2.15). Cuanto más pequeña sea la constante de amortiguamiento c , más aplastada resultará la curva exponencial y más ciclos se requerirán para que se desvanezcan las vibraciones.

20 91

La relación de este desvanecimiento es interesante y puede calcularse en forma sencilla considerando dos máximos consecutivos cualesquiera de la curva: A-B, B-C, etc. Durante el intervalo de tiempo entre dos de estos máximos, es decir, durante $2\pi/q$ seg, la amplitud de la vibración (que en este máximo prácticamente coincide con $e^{-\frac{c}{2m}t}$) disminuye de $e^{-\frac{c}{2m}t}$ a $e^{-\frac{c}{2m}(t+\frac{2\pi}{q})}$. Vemos que la última de estas dos expresiones es igual a la primera multiplicada por un factor constante $e^{-\frac{\pi c}{mq}}$, factor que, naturalmente, es menor que la unidad. Puede verse que este factor es el mismo para dos máximos sucesivos cualesquiera, independientemente de la amplitud de vibración o del tiempo. La relación entre dos máximos sucesivos es constante. Las amplitudes decrecen en progresión geométrica.

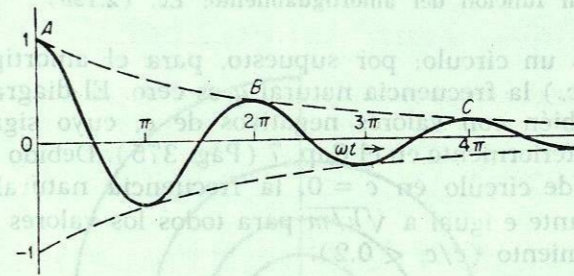


FIG. 2.15. Vibración libre de un sistema con amortiguamiento menor que el amortiguamiento crítico de la Ec. (2.16)

Hemos visto que si x_n es la n ésima amplitud máxima durante una vibración y x_{n+1} es el siguiente máximo, entonces $x_{n+1} = x_n e^{-\pi c/mq}$ o también $\log_e(x_n/x_{n+1}) = \pi c/mq = \delta$. La magnitud δ se conoce como el decremento logarítmico. Para pequeño amortiguamiento tenemos

$$\delta = \frac{\pi c}{mq} = 2\pi \frac{c}{c_c} / \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \approx \frac{2\pi c}{c_c}$$

y también $x_{n+1}/x_n = e^{-\delta} \approx 1 - \delta$, de modo que

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_n} = \delta = \frac{2\pi c}{c_c} \quad (2.20)$$

Vemos que la frecuencia de la vibración disminuye al incrementar el amortiguamiento de acuerdo con la (2.19b), que, escrita en forma no dimensional con la ayuda de la (2.16), resulta

$$\frac{q}{\omega_n} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2}$$

21 55

CAPILLA ALFONSO

Esta relación se encuentra representada gráficamente en la Fig. 2.16, donde la ordenada q/ω_n es la relación de la frecuencia natural amortiguada con respecto a la no amortiguada, mientras que la abscisa es la razón de la constante real a la constante de amortiguamiento

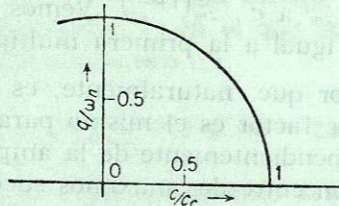


FIG. 2.16. Frecuencia natural de un sistema con un solo grado de libertad amortiguado, en función del amortiguamiento; Ec. (2.19b)

crítico. La figura es un círculo; por supuesto, para el amortiguamiento crítico ($c = c_c$) la frecuencia natural q es cero. El diagrama se ha dibujado también con valores negativos de c , cuyo significado se explicará posteriormente en el Cap. 7 (Pág. 375). Debido a la tangente horizontal de círculo en $c = 0$, la frecuencia natural es prácticamente constante e igual a $\sqrt{k/m}$ para todos los valores técnicos del amortiguamiento ($c/c_c < 0.2$).

La vibración libre sin amortiguamiento puede representarse por un vector rotativo, ya que es un movimiento armónico, cuyo punto extremo describe un círculo. En el presente caso de movimiento *amortiguado*, esta representación gráfica sigue siendo válida, a excepción de que la amplitud decrece con el tiempo. Así pues, al girar, el vector se encoge con rapidez proporcional a su longitud, dando así una disminución en progresión geométrica. El punto extremo de este vector describe una "espiral logarítmica" (Fig. 2.17). La amplitud de un diagrama como el de la Fig. 2.15 puede obtenerse de la Fig. 2.17, tomando la proyección horizontal del vector cuyo extremo descansa en la espiral y que gira con una velocidad angular uniforme q [Ec. (2.19)].

Un caso especial como el precedente acontece cuando la masa o inercia del sistema es pequeña y puede desprejarse, de manera que sólo quede un resorte y un amortiguador. Deseamos conocer el movimiento del émbolo (sin masa) del amortiguador cuando se le libera de una deformación original x_0 . Su ecuación diferencial es

$$c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

la cual puede resolverse directamente escribiendo

$$\frac{c}{k} \frac{dx}{x} = - dt$$

$$t = - \frac{c}{k} \int \frac{dx}{x} = - \frac{c}{k} (\log x + \text{const.})$$

Cuando $t = 0$ la deformación es $x = x_0$, de manera que la constante es $-\log x_0$. Y por ende

$$t = - \frac{c}{k} \log \frac{x}{x_0} \quad \text{y} \quad x = x_0 e^{-\frac{k}{c}t}, \quad (2.21)$$

esta relación está representada por una de las curvas compactas de la Fig. 2.14. Evidentemente el exponente de la función e es una

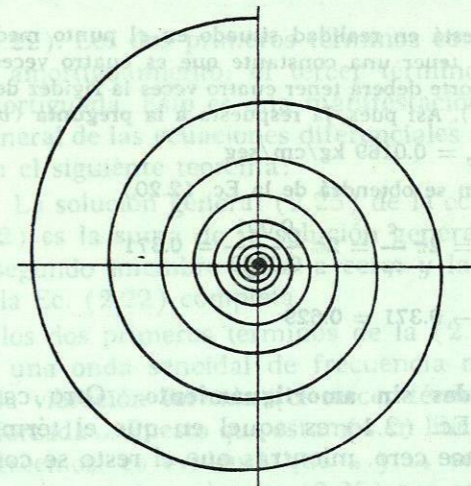


FIG. 2.17. Diagrama vectorial de una vibración libre amortiguada

magnitud, sin dimensión, de manera que c/k deberá tener por dimensión unidades de tiempo. Esta se conoce como *tiempo de relajamiento*, que, por definición, es el tiempo en el que la deformación del sistema x_0 se "relaja" en $1/e$ veces su valor original. En la Pág. 185 tendremos oportunidad de utilizar este concepto.

EJEMPLO: En el sistema mostrado en la Fig. 2.13, Pág. 61, la masa pesa 1 onza* y el resorte tiene una rigidez de 10 kg por cm; $l = 4$ cm; $a = b = 2$ cm.

* N. del T. 1 onza = 28.35 g

Más aún, se ha acoplado un mecanismo amortiguador en el punto medio de la viga, es decir, el mismo punto en el que se ha sujetado el resorte. El amortiguador produce una fuerza de 0.001 kg con una velocidad de 1 cm por segundo.

- ¿Cuál es la razón de la declinación de las vibraciones libres?
- ¿Cuál será el amortiguamiento crítico en el amortiguador?

Solución: Responderemos primero a la pregunta (b) por medio de la Ec. (2.16). La frecuencia natural sin amortiguamiento es $\omega_n = \sqrt{k/m}$. En la Pág. 62 encontramos que la constante equivalente del resorte de la Fig. 2.13 es ka^2/l^2 o $k/4 = 2.5$ kg por cm. Así,

$$\omega_n = \frac{\sqrt{2.5 \times 981}}{0.02835} = 292.6 \text{ radianes/segundo}$$

La constante crítica de amortiguamiento del sistema (es decir, el amortiguamiento crítico en la masa de un amortiguador imaginario) es, Ec. (2.16),

$$2 \times \frac{0.02835}{981} \times 292.6 = 0.0169 \text{ kg/cm/seg}$$

Puesto que el amortiguador está en realidad situado en el punto medio de la viga, el amortiguador deberá tener una constante que es cuatro veces mayor, por la misma razón que el resorte deberá tener cuatro veces la rigidez del resorte equivalente (véase la Pág. 62). Así pues, la respuesta a la pregunta (b)

$$c_c = 0.0169 \text{ kg/cm/seg}$$

- La razón de declinación se obtendrá de la Ec. (2.20)

$$\frac{\Delta x}{x} = \delta = 2\pi \frac{c}{c_c} = 2\pi \frac{0.001}{0.0169} = 0.371$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - 0.371 = 0.629$$

2.7. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento. Otro caso particular importante de la Ec. (2.1) es aquel en que el término del amortiguamiento $c\dot{x}$ se hace cero, mientras que el resto se conserva:

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \sin \omega t \quad (2.22)$$

Es razonable suponer que la función $x = x_0 \sin \omega t$ pueda satisfacer esta ecuación. En efecto, al sustituir esta función la Ec. (2.22) resulta

$$-m\omega^2 x_0 \sin \omega t + kx_0 \sin \omega t = P_0 \sin \omega t$$

dividiendo cada término entre $\sin \omega t$, obtendremos

$$x_0(k - m\omega^2) = P_0$$

$$x_0 = \frac{P_0}{k - m\omega^2} = \frac{P_0/k}{1 - m\omega^2/k} = \frac{P_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

$$x = \frac{P_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (2.23)$$

que es una solución de la (2.22). La expresión P_0/k del numerador tiene un significado físico sencillo: es la deformación estática del resorte bajo la carga (constante) P_0 . Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{P_0}{k} = x_{est}$$

y así la solución resulta

$$\frac{x}{x_{est}} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (2.24)$$

Aunque es válido establecer que esta expresión es "una" solución de la (2.22), no puede ser la solución más general, la cual debe contener dos constantes de integración. Puede verificarse fácilmente por sustitución que

$$x = C_1 \sin \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + \frac{x_{est}}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (2.25)$$

satisface la (2.22). Los dos primeros términos constituyen la vibración libre sin amortiguamiento; el tercer término es la vibración forzada no amortiguada. Esto es una manifestación de la propiedad matemática general de las ecuaciones diferenciales de este tipo, como se establece en el siguiente teorema:

Teorema: La solución general (2.25) de la ecuación diferencial completa (2.22) es la suma de la solución general (2.8) de la Ec. (2.7) con el segundo miembro igual a cero, y la solución particular (2.23) de la Ec. (2.22) completa.

Se ve que los dos primeros términos de la (2.25) (la vibración libre) forman una onda senoidal de frecuencia natural o libre ω_n , mientras que la vibración forzada (el tercer término) es una onda de frecuencia forzada ω . Puesto que estamos en libertad de dar a ω los valores que deseemos, es evidente que ω y ω_n son completamente independientes entre sí. La solución (2.25) por ser la suma de dos ondas senoidales de diferentes frecuencias, no es en sí un movimiento armónico (véase la Fig. 2.25c, Pág. 83).

Es interesante examinar ahora más de cerca las implicaciones del resultado (2.24). Es evidente que x/x_{est} es una onda senoidal de amplitud $1/[1 - (\omega/\omega_n)^2]$, dependiendo de la razón de frecuencias ω/ω_n . La Fig. 2.18 representa esta relación.

De la fórmula (2.24) se sigue de inmediato que para $\omega/\omega_n < 1$ las amplitudes u ordenadas son positivas, mientras que para $\omega/\omega_n > 1$ son negativas. Con objeto de comprender el significado de estas amplitudes negativas, volvemos a la Ec. (2.22) y a la

suposición de que $x_0 \text{ sen } \omega t$ sea la solución hecha inmediatamente a continuación. Parece ser que en la región $\omega/\omega_n > 1$ los resultados de x_0 son negativos. Pero podemos escribir.

$$-x_0 \text{ sen } \omega t = +x_0 \text{ sen } (\omega t + 180^\circ)$$

lo que muestra que una "amplitud negativa" es equivalente a la amplitud positiva de una onda que esté simplemente defasada 180° con (en oposición a) la onda original. Físicamente esto significa que mientras que $\omega/\omega_n < 1$ la fuerza y el movimiento están en fase, estarán en oposición cuando $\omega/\omega_n > 1$. Mientras que cuando $\omega/\omega_n < 1$ la masa está debajo de la posición de equilibrio cuando la fuerza empuja hacia abajo; encontramos que cuando $\omega/\omega_n > 1$ la masa está por encima de la posición de equilibrio mientras la fuerza empuja hacia abajo.

En general esta relación de fases se considera de poca importancia, mientras que la amplitud es de una importancia vital; por lo tanto, puede ignorarse el signo negativo apareciendo la línea punteada de la Fig. 2.18.

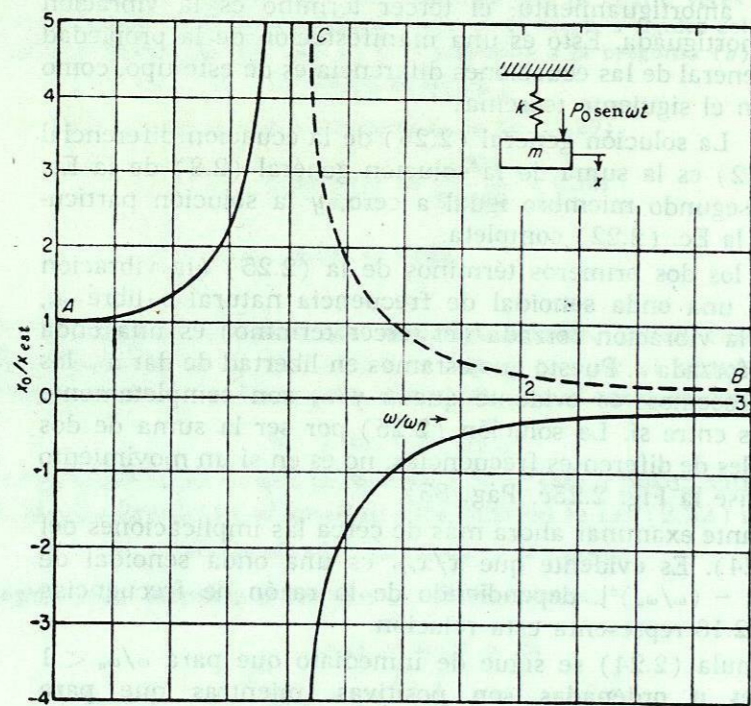


FIG. 2.18. Diagrama de resonancia para el movimiento absoluto de un sistema cuya masa está sujeta a una fuerza de amplitud constante y frecuencia variable; Ec. 2.23. Este diagrama es diferente al de la Fig. 2.20

26

Existen tres puntos importantes, A, B y C en la Fig. 2.18 en los cuales es posible inferir el valor de la ordenada basándonos en razonamientos puramente físicos. Considere primero el punto A muy cercano a $\omega = 0$; la frecuencia de la fuerza es sumamente lenta y la masa se habrá deformado por la fuerza, solamente en la magnitud de su deformación estática. Esto resulta físicamente claro, y, por lo tanto, las amplitudes de la curva cercanas al punto A deberán ser aproximadamente iguales a la unidad. Por otro lado, para frecuencias muy altas $\omega/\omega_n \gg 1$ la fuerza se mueve hacia arriba y hacia abajo tan de prisa que la masa simplemente no tiene tiempo para seguirla y la amplitud resulta muy pequeña (punto B).

Pero el caso más interesante ocurre en el punto C, donde la amplitud se hace infinitamente grande. Esto puede también entenderse físicamente. Cuando $\omega/\omega_n = 1$, la frecuencia forzada coincide exactamente con la frecuencia natural. La fuerza entonces puede siempre empujar a la masa en el momento oportuno en la dirección adecuada y la amplitud puede aumentar indefinidamente. Es el caso de un péndulo al que se le empuja ligeramente en la dirección de su movimiento cada vez que se balancea: Una fuerza relativamente pequeña puede hacer la amplitud sumamente grande. Este fenómeno tan importante se conoce como "resonancia", y a la frecuencia natural se la suele llamar también "frecuencia de resonancia".

Hasta ahora la teoría se ha circunscrito a una fuerza imprimida en la que la amplitud P_0 es independiente de la frecuencia ω . Otro caso de importancia técnica resulta cuando P_0 es proporcional a ω^2 . Por ejemplo, la Fig. 2.19 representa una viga sustentada en dos apoyos soportando un motor desbalanceado en su centro. Al andar el

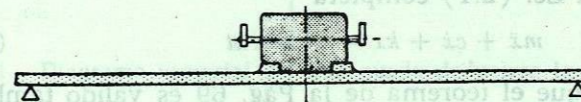


FIG. 2.19. Motor desbalanceado proporcionando una fuerza $m_1 \omega^2 r$, que origina el diagrama de resonancia de la Fig. 2.20

eje del motor experimenta una fuerza centrífuga rotativa $m_1 \omega^2 r$, donde m_1 es la masa no balanceada y r su distancia desde el centro de la flecha. Esta fuerza rotativa puede descomponerse en una componente vertical $m_1 \omega^2 r \text{ sen } \omega t$ y una componente horizontal $m_1 \omega^2 r \text{ cos } \omega t$. Supongamos que la viga representa una gran rigidez contra los desplazamientos horizontales y una menor rigidez para los verticales. Tendremos entonces un sistema con un solo grado de libertad

27

85

CAPILLA ALFONSO