

En apariencia el sistema se ha excitado con  $314/290 = 1.08$  veces la resonancia. Así es que por la Fig. 2.18 o la Ec. (2.24), el efecto del par motor se ha aumentado por el factor

$$1 - (1.08)^2 = 6.0$$

De la Ec. (2.4) vemos que el par motor en cuestión es  $600/750 T_0$  o sea, cuatro quintos de la amplitud de la componente alternante del par motor. Como establecimos, el par motor consiste de una parte constante  $T_0$  y una parte alternante con igual amplitud  $T_0$ . El par motor máximo en la flecha es

$$T_0 + 6.0 \times 4/5 T_0 = 5.80 T_0$$

El par motor estable  $T_0$  puede obtenerse de la velocidad y del cabalaje así:

$$T_0 = \frac{cv}{\omega} = \frac{200 \times 4500}{725 \times 2\pi} = 197 \text{ kg m} = 19700 \text{ kg-cm}$$

El esfuerzo cortante en la flecha debido a este par motor estable es

$$S_s = \frac{T_{or}}{I_p} = \frac{T_{or}d/2}{\pi d^4/32} = 5 \frac{T_0}{d^3} = \frac{5 \times 19700}{(6.45)^3} = 368 \text{ kg/cm}^2$$

Debido a la proximidad de la resonancia, este esfuerzo está multiplicado por 5.8, de manera que el máximo esfuerzo de corte total es  $2134 \text{ kg/cm}^2$ . La "resistencia a la fatiga" del acero mencionada se ha derivado de unas pruebas de tensiones, donde el esfuerzo de tensión es el doble del esfuerzo cortante. El límite usual de fatigas en flechas de acero es menor de  $2000 \text{ kg/cm}^2$  por lo que la flecha deberá fallar. El diseño puede mejorarse reduciendo el diámetro de la flecha a 3 cm. Así, la frecuencia natural resulta 62 radianes por segundo, y el factor de amplificación del nuevo esfuerzo máximo de tensión resulta 2.04 que está dentro de los límites de seguridad.

**2.8. Vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso.** Finalmente consideraremos la Ec. (2.1) completa

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin \omega t \quad (2.1)$$

Puede comprobarse que el teorema de la Pág. 69 es válido también aquí. De acuerdo con ese teorema, la solución completa de la (2.1) consta de la suma de la solución completa de la Ec. (2.12), que es la (2.1) con el segundo miembro igual a cero, y la solución particular de toda la Ec. (2.1). Pero la solución de la ecuación con el segundo miembro igual a cero ha sido ya obtenida (Ec. 2.19), de manera que

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1 \sin qt + C_2 \cos qt) + \text{solución particular} \quad (2.27)$$

Basta por lo tanto obtener simplemente la solución particular. Análogamente al caso del Art. 2.7, podemos suponer  $x = x_0 \sin \omega t$ , pero

entonces el término  $cx$  nos dará  $\cos \omega t$ , de manera que este supuesto es evidentemente incorrecto. Es posible suponer

$$\text{sen } x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

y sustituir este valor en la (2.1). En este caso se presentan solamente los términos que contengan  $\sin \omega t$  y  $\cos \omega t$  pero quedan dos constantes  $A$  y  $B$  disponibles. Resolviendo  $A$  y  $B$  algebraicamente, puede obtenerse una solución particular. Aquí derivaremos el resultado en forma diferente, para proporcionar una comprensión física más clara del fenómeno.

Supongamos que la solución es una onda senoidal con frecuencia forzada  $\omega$ . Entonces las cuatro fuerzas de la Ec. (2.1) serán ondas

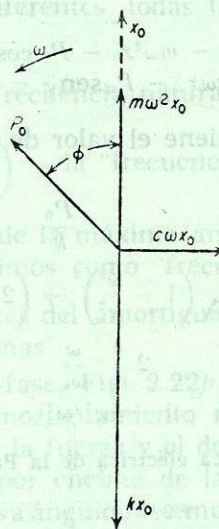


FIG. 2.21. Diagrama vectorial del que puede deducirse la Fig. 2.22

senoidales con esta frecuencia y podrán representarse por medio de vectores. Su derivada es equivalente a multiplicar la longitud del vector por  $\omega$  con un giro hacia adelante de  $90^\circ$ , como se explica en la Pág. 18

Si representamos el desplazamiento por

$$\text{sen } x = x_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

donde  $x_0$  y  $\varphi$  son todavía desconocidas y dibujamos este desplazamiento como un vector vertical dirigido hacia arriba (punteado) en el diagrama de la Fig. 2.21. La fuerza del resorte  $-kx$  tiene una



amplitud  $kx_0$  y se presenta en el diagrama dirigida hacia abajo. La fuerza de amortiguamiento  $-c\dot{x}$  tiene una amplitud  $c\omega x_0$  y está  $90^\circ$  adelantada con respecto a la fuerza del resorte. La fuerza de inercia  $-m\ddot{x}$  está  $90^\circ$  adelante de la fuerza de amortiguamiento y tiene una amplitud  $m\omega^2 x_0$ . La fuerza exterior  $P_0 \sin \omega t$  está  $\varphi$  grados adelante del desplazamiento  $x_0 \sin(\omega t - \varphi)$ . Así, se obtiene el diagrama completo de la Fig. 2.21 (siendo incógnitas  $x_0$  y  $\varphi$ ).

La ley de Newton [o la Ec. (2.1) que es lo mismo] requiere que la suma de las cuatro fuerzas sea cero en todo instante. Esto significa, que la suma geométrica de los cuatro vectores de la Fig. 2.21 deberá ser cero, lo que implica una vez más que las componentes, tanto horizontal como vertical, de esta resultante sean nulas. Expresado en lenguaje matemático

$$\text{Componente vertical: } kx_0 - m\omega^2 x_0 - P_0 \cos \varphi = 0$$

$$\text{Componente horizontal: } c\omega x_0 - P_0 \sin \varphi = 0$$

De estas dos ecuaciones se obtiene el valor de las incógnitas  $x_0$  y  $\varphi$ , con el resultado de

$$x_0 = \frac{P_0}{\sqrt{(c\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}} = \frac{\frac{P_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.28a)$$

$$\tan \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - (\omega^2/\omega_n^2)} \quad (2.28b)$$

Con la ayuda del glosario de mecánica eléctrica de la Pág. 50, esto puede transcribirse en

$$Q_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(R\omega)^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2}}$$

$$Q_{\omega\omega} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (2.29)$$

Puesto que  $i = dQ/dt$ , y  $Q = Q_0 \sin \omega t$ , la corriente será  $i = Q_{\omega\omega} \cos \omega t$ . El primer miembro de la Ec. (2.29) es el valor máximo de la corriente. La raíz cuadrada del denominador a la derecha se conoce con el nombre de "impedancia", que es un concepto familiar en la ingeniería eléctrica.

Las expresiones (2.28a, b) para la amplitud  $x_0$  y para el ángulo de fase  $\varphi$  están en términos de magnitudes no dimensionales o, simplemente, en razones. Aparece la razón de frecuencias  $\omega/\omega_n$  y la razón de amortiguamientos  $c/c_c$ , donde  $c_c$  es el "amortiguamiento crítico"

de la fórmula (2.16).  $P_0/k$  puede interpretarse como la deformación del resorte bajo la carga  $P_0$ ; y suele llamársele "deformación estática"  $x_{est}$ .

Estas relaciones se expresan gráficamente en la Fig. 2.22 a y b. El diagrama de amplitudes consiste en una familia de curvas, una para cada valor del amortiguamiento  $c$ . Todas las curvas aparecen debajo de la de amortiguamiento cero, la cual es, por supuesto, la misma que la de la Fig. 2.18. Así vemos que la amplitud de la vibración forzada disminuye con el amortiguamiento. Otra propiedad interesante de la figura es que el máximo de las diferentes curvas no vuelve a ocurrir cuando  $\omega/\omega_n = 1$  sino en una frecuencia un poco menor. De hecho, en el caso de vibraciones amortiguadas se distinguen tres frecuencias diferentes, todas las cuales coinciden cuando  $c = 0$ , a saber

$$(1) \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{la "frecuencia natural no amortiguada"}$$

$$(2) \omega_q = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \text{la "frecuencia natural amortiguada"}$$

$$(3) \text{La "frecuencia de la máxima amplitud forzada" a la que a veces nos referimos como "frecuencia de resonancia".}$$

Para pequeños valores del amortiguamiento, estas tres frecuencias resultan muy cercanas.

El diagrama ángulo-fase, Fig. 2.22b, es también de considerable interés. Para un amortiguamiento nulo, hemos visto que por debajo de la resonancia, la fuerza y el desplazamiento están en fase ( $\varphi = 0$ ), mientras que por encima de la resonancia se encuentran desfasados  $180^\circ$ . La curva ángulo-fase muestra, por lo tanto, un salto discontinuo en el punto de resonancia. Esto puede verse también en la Ec. (2.28b) haciendo el amortiguamiento  $c$  sumamente pequeño. Por debajo de la resonancia, el denominador es positivo, resultando  $\tan \varphi$  un número positivo muy pequeño, mientras que, por encima de la resonancia,  $\tan \varphi$  resulta un número negativo muy pequeño. De esta forma, el propio ángulo  $\varphi$  tendrá valores cercanos a  $0^\circ$ , o bien, un poco menores que  $180^\circ$ . Haciendo el amortiguamiento igual a cero, resultará ya sea exactamente  $0^\circ$ , o exactamente  $180^\circ$ .

Para valores del amortiguamiento diferentes de cero, las otras curvas de la Fig. 2.22b representarán el ángulo de fase. Puede verse que, en general, el amortiguamiento tiende a suavizar las crestas de los diagramas de amortiguamiento nulo, tanto en la amplitud como en la fase.



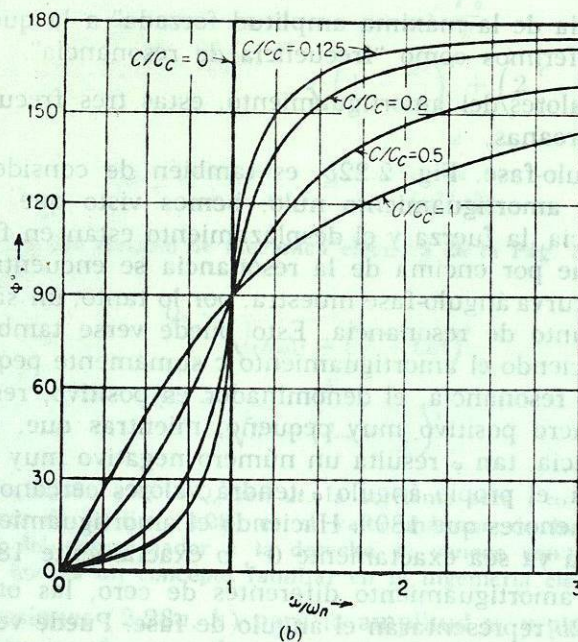
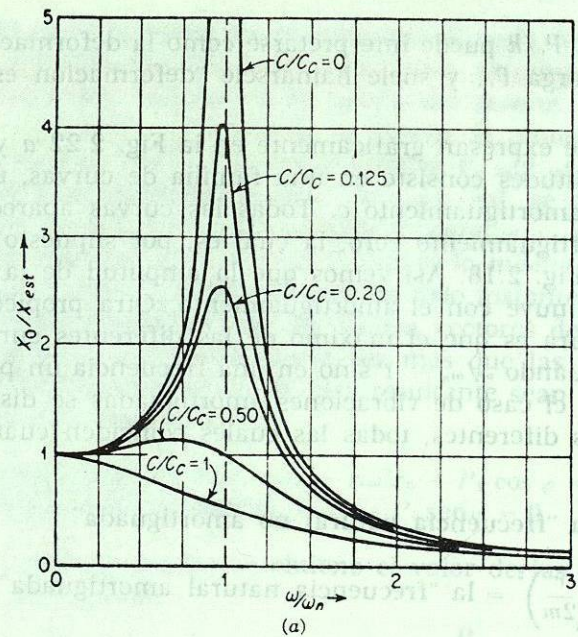


FIG. 2.22. (a) Amplitud de la fuerza de vibración de cualquiera de las Figs. 2.3 a 2.7 para diferentes grados de amortiguamiento. (b) El ángulo de fase entre la fuerza y el desplazamiento en función de la frecuencia para diferentes valores del amortiguamiento

Resulta instructivo volver al diagrama vectorial de la Fig. 2.21 y visualizar cómo los ángulos de amplitud y fase varían con la frecuencia. Para vibraciones muy lentas ( $\omega \approx 0$ ), las fuerzas de amortiguamiento y de inercia resultan despreciables y  $P_0 = kx_0$ , para  $\varphi = 0$ . Aumentando la frecuencia, el vector amortiguamiento crece y las fuerzas de inercia aumentan aún con mayor rapidez. El ángulo de fase no puede permanecer siendo cero, puesto que  $P_0$  deberá tener una componente horizontal hacia la izquierda para equilibrar a  $c\omega x_0$ . El vector fuerza-inercia crecerá hasta lograr la magnitud de la fuerza del resorte. Luego,  $\varphi$  valdrá  $90^\circ$ , y  $P_0 = c\omega x_0$ . Esto sucede en la resonancia, porque  $m\omega^2 x_0 = kx_0$ , o sea  $\omega^2 = k/m$ . Por lo tanto, en la resonancia el ángulo de fase será de  $90^\circ$ , independientemente del amortiguamiento. Por encima de esta frecuencia,  $m\omega^2 x_0$  crecerá, tomando un valor mayor que  $kx_0$ , de tal suerte que  $P_0$  sufrirá una caída descendente y  $\varphi$  se mantendrá mayor de  $90^\circ$ . Para frecuencias muy altas,  $kx_0$  resulta insignificante con respecto a  $m\omega^2 x_0$ , por lo que  $P_0$  se usará para equilibrar la fuerza de inercia siendo  $\varphi = 180^\circ$ .

A bajas velocidades, la fuerza exterior superará a la fuerza del resorte, y para altas velocidades, la fuerza exterior superará a la de inercia, mientras que en la resonancia equilibrará a la fuerza de amortiguamiento.

Las ecuaciones de energía involucradas en este proceso sirven también para proporcionarnos un mejor entendimiento físico. Para movimientos muy lentos  $\varphi = 0$ , se demostró en la Pág. 29 que el trabajo en un ciclo completo es nulo. En otras palabras, durante un ciclo la energía mecánica no se transforma en calor. A partir de una posición de equilibrio, la fuerza exterior deberá recorrer una cierta distancia antes de alcanzar su posición extrema. En este caso, efectivamente realiza un trabajo. Pero este trabajo propiamente se convierte en energía potencial o elástica almacenada en el resorte. Durante el siguiente cuarto de ciclo, el movimiento actúa *contra* la fuerza exterior, cediendo entonces el resorte, su energía almacenada. Por lo tanto, a bajas velocidades, el trabajo de la fuerza exterior se convierte en energía elástica, sin que nada se convierta en calor. Para la frecuencia de resonancia  $\varphi = 90^\circ$ , el trabajo disipado por ciclo será  $\pi P_0 x_0$  (Pág. 29). En este caso, la fuerza exterior es igual en magnitud, pero de sentido opuesto, a la fuerza de amortiguamiento, de tal suerte que el trabajo se disipa en amortiguamiento. Las fuerzas de inercia y del resorte son de igual magnitud, de sentido opuesto y en fase con el desplazamiento. Cada una de estas fuerzas *efectúa* un trabajo durante un cuarto de ciclo pero almacena ener-