5.

Conceptos fundamentales de dinámica estructural

5.1 GRADOS DE LIBERTAD

Desde el punto de vista dinámico, los grados de libertad que interesan son aquellos en los que se consideran fuerzas generalizadas de inercia; es decir, fuerzas iguales a masa por aceleración y momentos iguales al momento de inercia de masa por aceleración angular. Por ejemplo, en la figura 5.1 se muestra un marco que, de acuerdo con la definición de grados de libertad dada en la sección 1.2.1 de este manual, tiene 10 grados de libertad si se ignoran las deformaciones

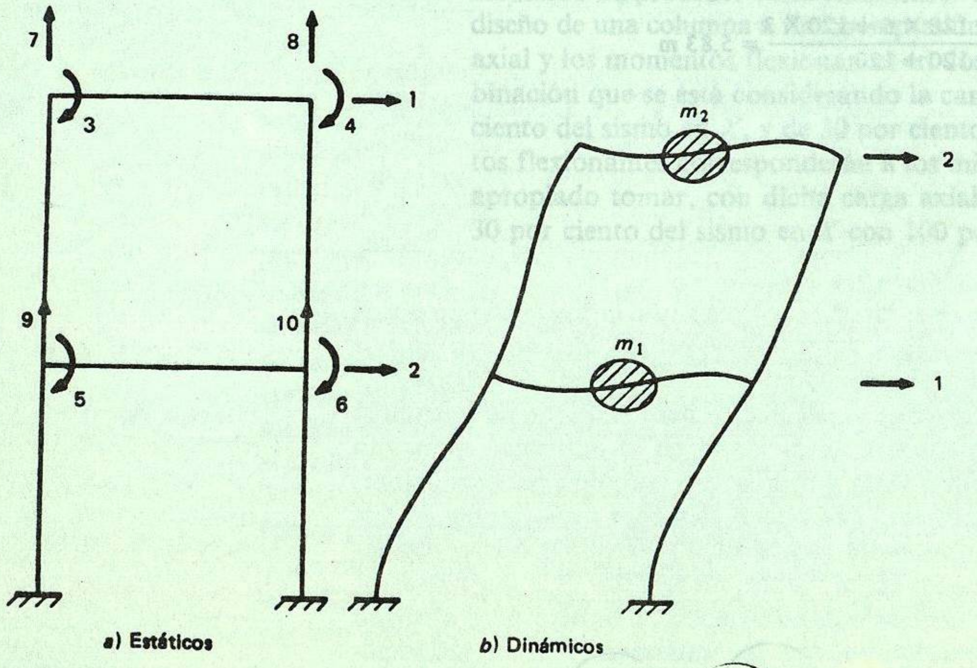


Figura 5.1 Grados de libertad estáticos y dinámicos.

axiales en las vigas; sin embargo, si las fuerzas de inercia importantes son solamente las que generan las masas m_1 y m_2 al moverse lateralmente, entonces en dinámica se habla de un sistema de dos grados de libertad, que son precisamente los desplazamientos laterales 1 y 2. Esto no implica que en los restantes grados de libertad los giros y desplazamientos correspondientes se anulen; además, la matriz de rigideces de la estructura, que sería de 10×10, se pueden transformar a una de 2×2 (expresada en función de los grados de libertad 1 y 2), denominada matriz de rigideces lateral, mediante el proceso de condensación estática descrito también en la sección 1.2.1, véase la expresión 1.19.

En lo que sigue de este capítulo al hablar de cierto número de grados de libertad, se alude sólo a aquellos en que existen fuerzas generalizadas de inercia.

Como el título del capítulo lo señala, aquí se tratan sólo las ideas fundamentales. Existen presentaciones mucho más completas de la dinámica estructural, por ejemplo, las hechas en las referencias 35 a 39.

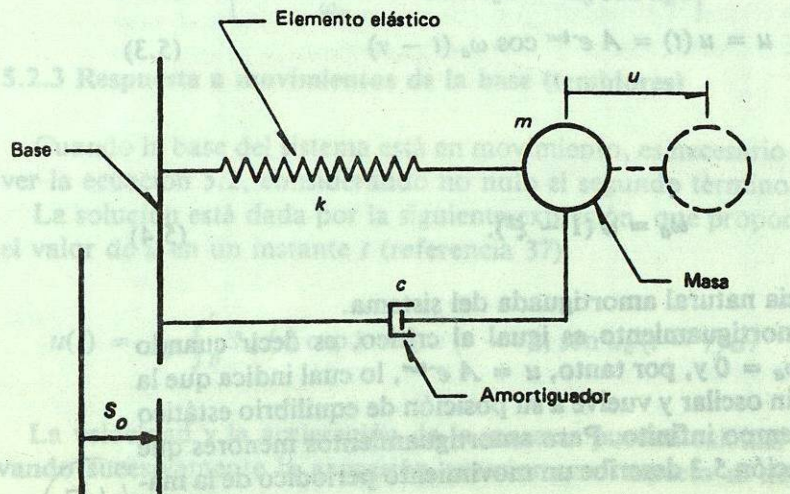
5.2 SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

5.2.1 Descripción y ecuación de equilibrio dinámico

Considérese el sistema mostrado en la figura 5.2, el cual está constituido por una masa concentrada que puede tener un desplazamiento horizontal u, ligada a la base (que puede tener un movimiento horizontal, s_0) mediante un elemento elástico y un amortiguador. El sistema tiene, por tanto, un solo grado de libertad.

En cierto instante en que la masa y su base están moviéndose, en la ecuación de equilibrio dinámico intervienen la fuerza de inercia, igual a la masa por su aceleración absoluta $\ddot{x}$, la fuerza de rigidez y la fuerza de amortiguamiento. El caso más sencillo es aquel en el cual las

5.2 Sistema simple con amortigua- viscoso.



fuerzas de rigidez y de amortiguamiento son, respectivamente, proporcionales al desplazamiento u y a la velocidad $\dot{u}$ de la masa con respecto a su base. Sean k y c las correspondientes constantes de proporcionalidad, que se supone que no cambian con el tiempo. Este conjunto constituye un sistema lineal de un grado de libertad, con amortiguamiento viscoso o lineal.

En estas circunstancias, usando el principio de D'Alambert, la ecuación de equilibrio dinámico es

$$m\ddot{x} + c\dot{u} + k u = 0$$

Considerando que $x = s_0 + u$, la ecuación anterior se puede escribir

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k u = -m\ddot{s}_0 \qquad (5.1)$$

El punto sobre una cantidad significa derivación con respecto al tiempo; dividiendo la ecuación 5.1 entre m y definiendo $\omega = \sqrt{k/m}$, $c_{cr} = 2\sqrt{k\,m}$ y $\xi = c/c_{cr}$ se llega a:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{s}_0 \qquad (5.2)$$

ω se denomina frecuencia circular natural del sistema; c_{cr} se conoce como amortiguamiento crítico y ξ es la fracción que c representa del amortiguamiento crítico y se llama coeficiente o relación de amortiguamiento. El periodo de vibración natural del sistema se calcula como $2\pi/\omega$.

5.2.2 Vibraciones libres

El sistema descrito en la sección precedente tiene vibraciones libres cuando la masa m se mueve pero la base permanece inmóvil y no actúan fuerzas exteriores. En este caso el segundo miembro de la ecuación 5.2 se anula y su solución se puede describir (referencia 2).

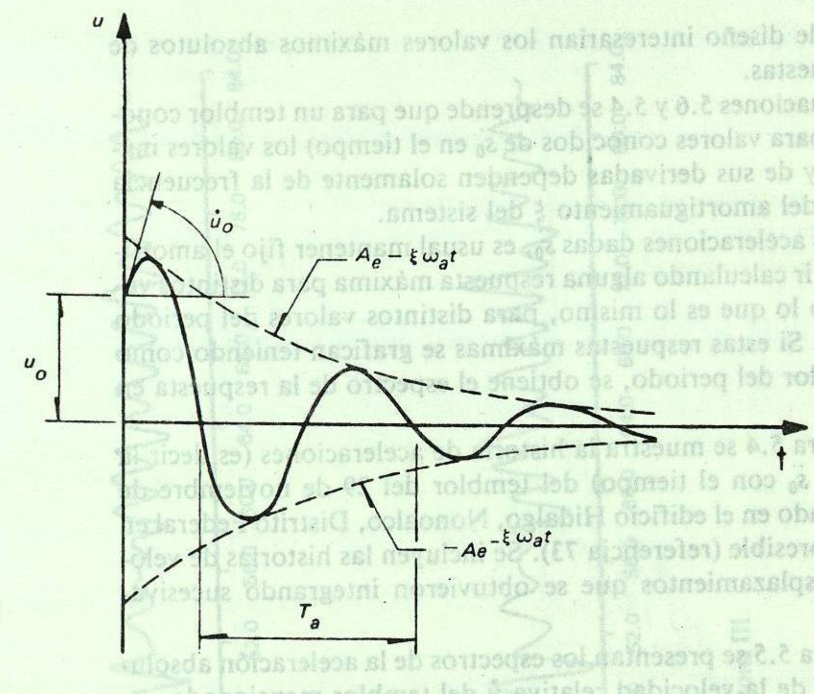
$$u = u(t) = A\,e^{-\xi\omega t}\cos\omega_a (t - \tau) \qquad (5.3)$$

donde

$$\omega_a = \omega(1 - \xi^2). \qquad (5.4)$$

ω_a es la frecuencia natural amortiguada del sistema.

Cuando el amortiguamiento es igual al crítico, es decir cuando $\xi = 1$, se tiene $\omega_a = 0$ y, por tanto, $u = A\,e^{-\xi\omega t}$, lo cual indica que la masa se mueve sin oscilar y vuelve a su posición de equilibrio estático después de un tiempo infinito. Para amortiguamientos menores que el crítico, la ecuación 5.3 describe un movimiento periódico de la ma-



5.3 Vibraciones libres de un sistema de la figura 5.2.

sa m, con frecuencia ω_a y con amplitud decreciente $A\,e^{-\xi\omega t}$, como se ilustra en la figura 5.3.

Para estructuras usuales, el valor del amortiguamiento no excede de 10 por ciento del crítico ($\xi = 0.1$), en cuyo caso $\omega_a = 0.995\omega$. Esto muestra que en casos prácticos la influencia del amortiguamiento en la frecuencia de vibración es pequeña. El efecto más importante del amortiguamiento es disminuir la amplitud de dicha vibración conforme avanza el tiempo, según lo expresa el término $e^{-\xi\omega t}$ de la ecuación 5.3 y se aprecia en la figura 5.3.

Los valores que asumen A y ω en la ecuación 5.3 se determinan a partir de las condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad del sistema. Si para $t = 0$ se tiene $u = u_0$ y $\dot{u} = \dot{u}_0$, se puede demostrar que dicha ecuación se convierte en:

$$u = e^{-\xi\omega t}\left\{\frac{\dot{u}_0 + \xi\,\omega\,u_0}{\omega_a}\,\mathrm{sen}\,\omega_a t + u_0\cos\omega_a t\right\} \qquad (5.5)$$

5.2.3 Respuesta a movimientos de la base (temblores)

Cuando la base del sistema está en movimiento, es necesario resolver la ecuación 5.2, considerando no nulo el segundo término.

La solución está dada por la siguiente expresión, que proporciona el valor de u en un instante t (referencia 37).

$$u(t) = \frac{1}{\omega_a}\int_0^t \ddot{s}_0(\tau)\exp\{-\xi\,\omega\,(t-\tau)\}\,\mathrm{sen}\,\omega_a(t-\tau)\,d\tau \qquad (5.6)$$

La velocidad y la aceleración de la masa se pueden calcular derivando sucesivamente la expresión anterior con respecto al tiempo.

Para fines de diseño interesarían los valores máximos absolutos de dichas respuestas.

De las ecuaciones 5.6 y 5.4 se desprende que para un temblor conocido (o sea para valores conocidos de $\ddot{s}_0$ en el tiempo) los valores máximos de u y de sus derivadas dependen solamente de la frecuencia natural ω y del amortiguamiento ξ del sistema.

Para unas aceleraciones dadas $\ddot{s}_0$, es usual mantener fijo el amortiguamiento e ir calculando alguna respuesta máxima para distintos valores de ω (o lo que es lo mismo, para distintos valores del periodo $T = 2\pi/\omega$). Si estas respuestas máximas se grafican teniendo como abscisa el valor del periodo, se obtiene el espectro de la respuesta en cuestión.

En la figura 5.4 se muestra la historia de aceleraciones (es decir la variación de $\ddot{s}_0$ con el tiempo) del temblor del 29 de noviembre de 1978, registrado en el edificio Hidalgo, Nonoalco, Distrito Federal en terreno compresible (referencia 73). Se incluyen las historias de velocidades y desplazamientos que se obtuvieron integrando sucesivamente $\ddot{s}_0$.

En la figura 5.5 se presentan los espectros de la aceleración absoluta ($\ddot{s}_0 + \ddot{u}$) y de la velocidad relativa $\dot{u}$ del temblor mencionado.

Es frecuente obtener el espectro de desplazamiento D y en lugar de las velocidades y aceleraciones dibujar las cantidades $V = \omega D$ y $A = \omega^2 D$, que se denominan espectros de seudovelocidades y de seudoaceleraciones, respectivamente. De acuerdo con su definición es posible trazar estos tres últimos espectros (D, V y A) en una sola gráfica, con rayado logarítmico en cuatro direcciones, según se hace en la figura 5.5. Este tipo de gráfica se debe a Newmann y ha sido empleado en muchas publicaciones (referencias 40, 41 y 42). Es interesante notar que la fuerza máxima en el elemento elástico k es igual a

$$k\,D = \frac{k}{m}\, m\,D = m\,\omega^2 D = m\,A$$

Cualquiera de los espectros de un temblor proporciona los datos necesarios para el diseño de estructuras con un grado de libertad, con sólo conocer el periodo natural y el amortiguamiento de la misma.

5.3 SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

5.3.1 Alcance

En edificios es usualmente aceptable suponer que las masas están concentradas en los niveles de los pisos y que las fuerzas de inercia importantes son sólo las laterales; por ello, lo que sigue se limita a tratar este caso, aunque los conceptos son aplicables a otros sistemas

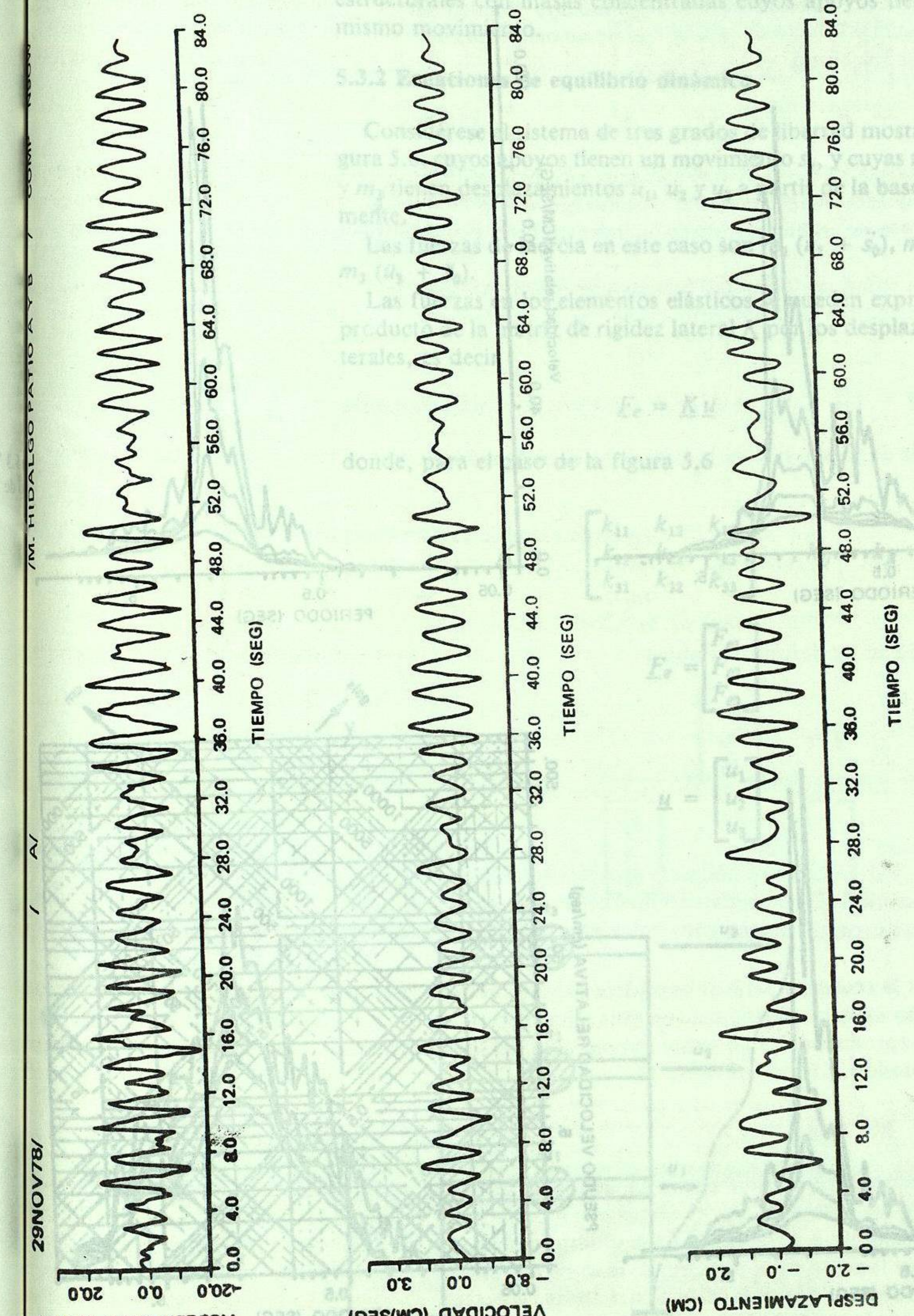


Figura 5.4 Aceleraciones, velocidades y desplazamientos de un temblor registrado en la zona III.

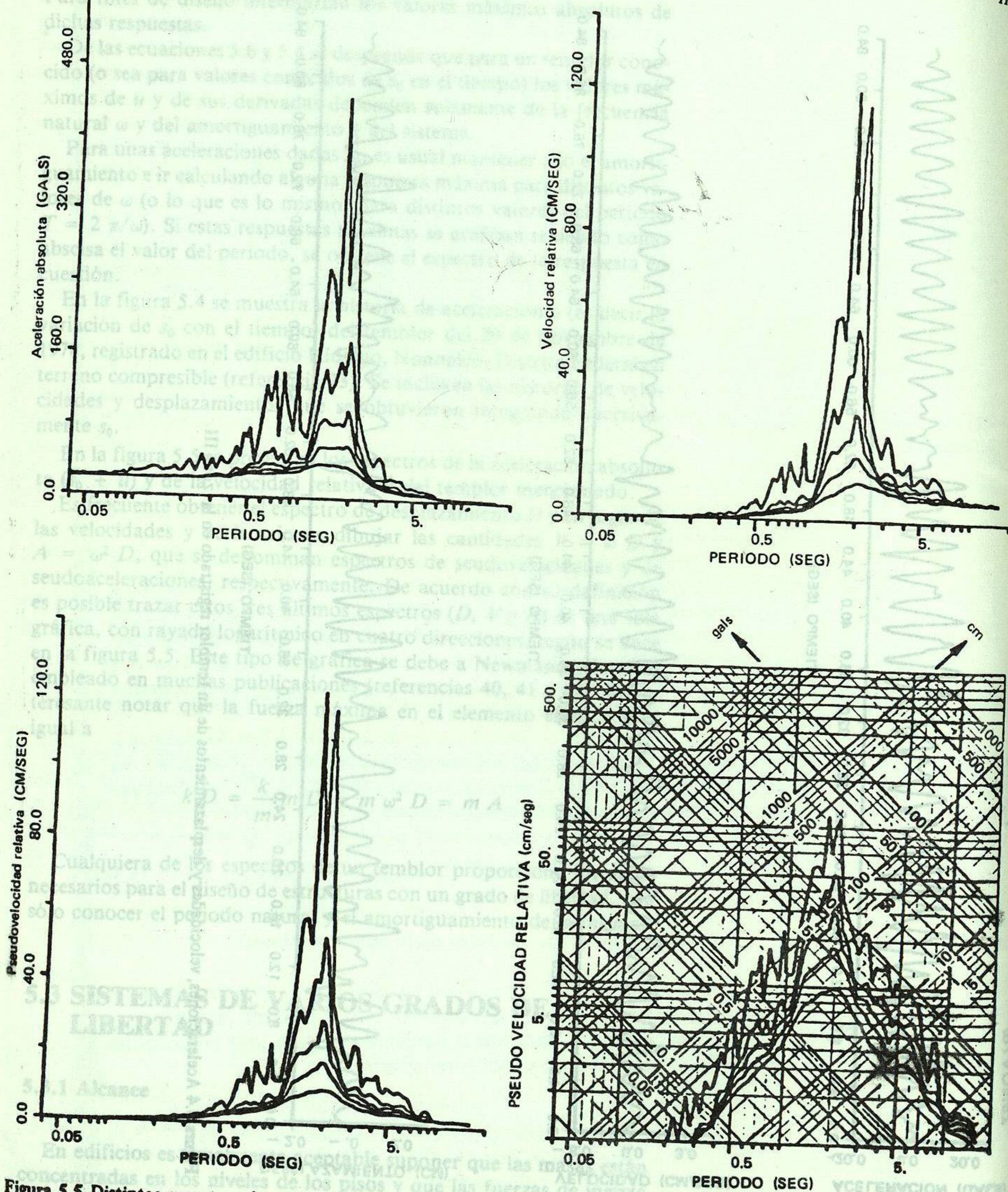


Figura 5.5 Distintos espectros de respuesta del temblor de la figura 5.4 (amortiguamientos 0, 2, 5, 10 y 20 por ciento del crítico).

estructurales con masas concentradas cuyos apoyos tienen todos el mismo movimiento.

5.3.2 Ecuaciones de equilibrio dinámico

Considérese el sistema de tres grados de libertad mostrado en la figura 5.6, cuyos apoyos tienen un movimiento s_0, y cuyas masas m_1, m_2 y m_3 tienen desplazamientos u_1, u_2 y u_3 a partir de la base, respectivamente.

Las fuerzas de inercia en este caso son $m_1\,(\ddot{u}_1 + \ddot{s}_0)$, $m_2\,(\ddot{u}_2 + \ddot{s}_0)$ y $m_3\,(\ddot{u}_3 + \ddot{s}_0)$.

Las fuerzas en los elementos elásticos se pueden expresar como el producto de la matriz de rigidez lateral $\underline{K}$ por los desplazamientos laterales, es decir

$$\underline{F}_e = \underline{K}\,\underline{u} \tag{5.7}$$

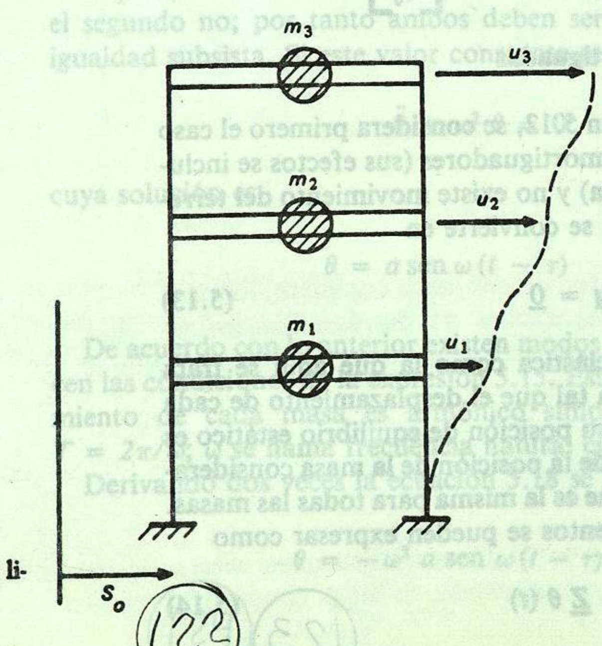
donde, para el caso de la figura 5.6

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \; k_{jj} = k_{ji} \tag{5.8}$$

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} F_{e1} \\ F_{e2} \\ F_{e3} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

y

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$



5.6 Sistema de varios grados de li-

De análoga manera las fuerzas de amortiguamiento viscoso se pueden expresar como el producto de una matriz de amortiguamiento por las velocidades, o sea como

$$\underline{F}_a = \underline{C}\,\dot{\underline{u}} \qquad (5.11)$$

donde el punto denota derivación con respecto al tiempo. Se verá más adelante que en general no es necesario calcular $\underline{C}$ y que el efecto del amortiguamiento se toma en cuenta en los espectros de diseño.

Para cada masa la suma de todas las fuerzas debe ser cero. Así se llega a que las ecuaciones de equilibrio dinámico se pueden escribir.

$$\underline{M}\ddot{\underline{u}} + \underline{C}\dot{\underline{u}} + \underline{K}\underline{u} = \underline{M}\,\underline{1}\,\ddot{s}_0 \qquad (5.12)$$

M se denomina matriz de masas y, para la estructura de la figura 5.6, es igual a:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

En la expresión 5.12 se ha definido también:

$$\ddot{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{1}\,\ddot{s}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{s}_0 = \begin{bmatrix} \ddot{s}_0 \\ \ddot{s}_0 \\ \ddot{s}_0 \end{bmatrix}$$

5.3.3 Vibraciones libres no amortiguadas

En lugar de resolver la ecuación 5.12, se considera primero el caso más simple en el que no existen amortiguadores (sus efectos se incluyen después en forma aproximada) y no existe movimiento del terreno, con lo cual la expresión 5.12 se convierte en

$$\underline{M}\ddot{\underline{u}} + \underline{K}\underline{u} = \underline{0} \qquad (5.13)$$

Ahora bien, toda estructura elástica como la que aquí se trata puede vibrar libremente en forma tal que el desplazamiento de cada una de sus masas con respecto a su posición de equilibrio estático es igual al producto de una función de la posición de la masa considerada por una función del tiempo, que es la misma para todas las masas. En otras palabras los desplazamientos se pueden expresar como

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\theta(t) \qquad (5.14)$$

donde para el caso de la figura 5.6

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

haciendo notar que las $\underline{z}$ no dependen de t. A esta forma de vibrar se le llama modos naturales. Al conjunto de valores z_i se denomina forma del modo, y al periodo de $\theta(t)$, en caso de que exista, se llama periodo natural.

Derivando la ecuación 5.14 se obtiene

$$\ddot{\underline{u}}(t) = \underline{Z}\ddot{\theta}(t) \qquad (5.15)$$

y sustituyendo 5.14 y 5.15 en 5.13 se llega a:

$$\underline{M}\,\underline{Z}\,\ddot{\theta} + \underline{K}\,\underline{Z}\,\theta = 0 \qquad (5.16)$$

por sencillez se han omitido los (t).

Para la masa i, el desarrollo de la expresión 5.16 da

$$m_i z_i \ddot{\theta} + (\sum_j k_{ij} z_i)\theta = 0$$

de donde

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{\sum_j k_{ij} z_i}{m_i z_i} \qquad (5.17)$$

El primer miembro de esta ecuación es función de t, mientras que el segundo no; por tanto ambos deben ser constantes para que la igualdad subsista. Si este valor constante se llama $-\omega^2$, se obtiene

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

cuya solución es

$$\theta = a \operatorname{sen} \omega(t - \tau) \qquad (5.18)$$

De acuerdo con lo anterior existen modos de vibración que satisfacen las condiciones de la expresión 5.15. Estos son tales que el movimiento de cada masa es armónico simple con periodo natural $T = 2\pi/\omega$; ω se llama frecuencia natural circular.

Derivando dos veces la ecuación 5.18 se tiene

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 a \operatorname{sen} \omega(t - \tau) = -\omega^2\theta$$