

y sustituyendo en 5.16, y considerando que $\theta \neq 0$, queda

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M})\underline{Z} = \underline{0} \quad (5.19)$$

que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo; para que existan valores de \underline{Z} distintos de cero es necesario que el determinante del sistema se anule, esto es, que

$$|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0 \quad (5.20)$$

5.3.4 Frecuencias y modos de vibración

La expresión 5.20 representa un problema de valores característicos. Desarrollando el determinante se obtiene una ecuación algebraica de grado n cuya incógnita es ω^2 , siendo n el número de grados de libertad (tres en el caso de la figura 5.6) cuya solución conduce a n valores de ω^2 , es decir a n frecuencias de vibración ω , que corresponden a otros tantos periodos naturales $2\pi/\omega$.

Los valores de ω^2 son reales y positivos, y sus raíces cuadradas son las frecuencias naturales. Se acostumbra numerar a las ω en orden creciente, es decir la primera frecuencia ω (llamada frecuencia fundamental) es el menor valor, y la última ω_n , el mayor.

Si cada valor de la frecuencia ω_j se reemplaza en 5.19 es posible obtener valores \underline{Z}_j diferentes de cero (cada uno de estos vectores se llama modo de vibración). Para cada modo no se obtienen soluciones únicas sino solamente valores relativos entre las z_{ij} , es decir que no están definidas las amplitudes de las vibraciones de las masas, sino las relaciones entre todas ellas.

Se demuestra que los modos de vibración tienen las siguientes propiedades:

a) Ortogonalidad con respecto a la matriz de masas,

$$\underline{Z}_j^T \underline{M} \underline{Z}_r = 0 \text{ si } j \neq r \quad (5.21)$$

b) Ortogonalidad con respecto a la matriz de rigideces

$$\underline{Z}_j^T \underline{K} \underline{Z}_r = 0 \text{ si } j \neq r \quad (5.22)$$

c) Los modos naturales constituyen un conjunto completo, lo que significa que cualquier configuración de desplazamientos \underline{u} puede expresarse como una combinación lineal de las \underline{Z}_j , es decir como:

$$\underline{u} = \sum a_j \underline{Z}_j \quad (5.23)$$

El producto $\underline{Z}_j^T \underline{M} \underline{Z}_j$ es igual a una constante arbitraria cuyo valor depende de la escala a la que se tome cada modo. Si dicha constante

125

es obligada a tomar el valor de la unidad, modificando la escala del modo, se dice que éste se hace normalizado con respecto a las masas.

En todo lo que antecede se ha supuesto que el terreno sobre el que se apoya la estructura es indeformable. Tratándose de estructuras reales, los modos naturales se ven afectados por la deformabilidad del terreno y por la masa de éste que está sujeta a aceleraciones. En tales casos el problema se complica por la existencia de amortiguamiento de cierta importancia.

5.3.5 Ejemplo

Considérese la estructura mostrada en la figura 5.7, tomada de la referencia 74. Las matrices de masas y de rigideces de esta estructura son:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

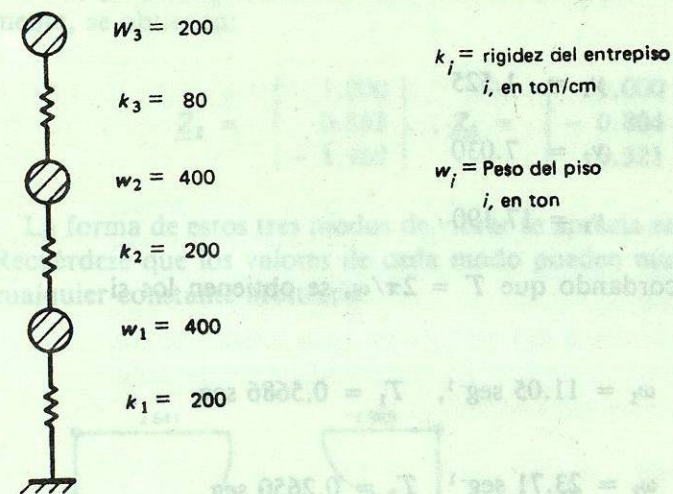


Figura 5.7 Estructura con tres grados de libertad.

el valor de cada masa m_i es igual a $\frac{W_i}{g}$; g es la aceleración de la gravedad. Esto da

$$m_1 = m_2 = \frac{400}{981} = 0.407750 \text{ ton-seg}^2/\text{cm},$$

$$m_3 = \frac{200}{981} = 0.203875 \text{ ton-seg}^2/\text{cm}$$

126

Reemplazando los valores de k_i de la figura 5.7 se tiene

$$\underline{K} = 80 \begin{bmatrix} 5.0 & -2.5 & 0.0 \\ -2.5 & 3.5 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

la ecuación 5.20, es decir $|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0$, se escribe entonces como

$$80 \begin{bmatrix} 5.0 - 0.407750 \frac{\omega^2}{80} & -2.5 & 0.0 \\ -2.5 & 3.5 - 0.40775 \frac{\omega^2}{80} & -1.0 \\ -0.0 & -1.0 & 1.0 - 0.203875 \frac{\omega^2}{80} \end{bmatrix} = 0$$

haciendo $y = \frac{\omega^2}{80}$, el desarrollo de este determinante conduce a la ecuación siguiente:

$$y^3 - 25.751 y^2 + 157.885 y - 184.386 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$y_1 = 1.525$$

$$y_2 = 7.030$$

$$y_3 = 17.190$$

como $\omega^2 = 80y$, y recordando que $T = 2\pi/\omega$, se obtienen los siguientes resultados:

$$\omega_1^2 = 122.0, \quad \omega_1 = 11.05 \text{ seg}^{-1}, \quad T_1 = 0.5686 \text{ seg}$$

$$\omega_2^2 = 562.4, \quad \omega_2 = 23.71 \text{ seg}^{-1}, \quad T_2 = 0.2650 \text{ seg}$$

$$\omega_3^2 = 1375.2, \quad \omega_3 = 37.08 \text{ seg}^{-1}, \quad T_3 = 0.1694 \text{ seg}$$

Para calcular los modos de vibración, se reemplazan los valores de ω^2 en la expresión 5.19, es decir en:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{Z} = \underline{0}$$

Procediendo así con ω_1^2 , se tiene el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones:

127

$$\begin{bmatrix} (400 - 122 \times 0.40775) & -200 & -0 \\ -200 & (280 - 122 \times 0.40775) & -80 \\ 0 & -80 & (80 - 122 \times 0.203875) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En z_{ij} el índice i se refiere al nivel y el índice j identifica al modo en cuestión.

Efectuando operaciones se tiene

$$\begin{array}{rclclcl} 350.2545 & z_{11} & -200 & z_{21} & & = 0 \\ -200 & z_{11} & +230.2545 & z_{21} & -80 & z_{31} = 0 \\ & & -80 & z_{21} & +55.1273 & z_{31} = 0 \end{array}$$

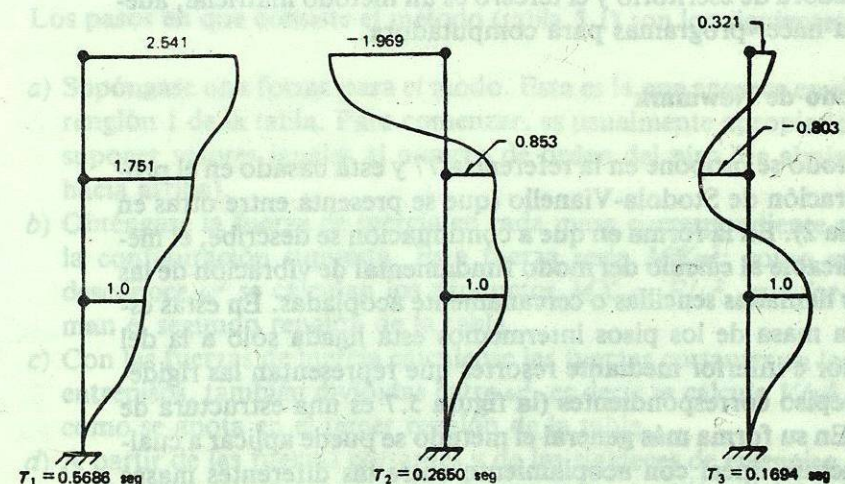
Se puede escoger arbitrariamente el valor de alguna de las z_{ij} ; por ejemplo, si $z_{11} = 1$, entonces de la primera ecuación se obtiene $z_{21} = 1.751$ y de la segunda o tercera ecuación se encuentra que $z_{31} = 2.541$; es decir que

$$\underline{Z}_1 = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.751 \\ 2.541 \end{bmatrix}$$

Análogamente, empleando los valores de ω_2^2 y de ω_3^2 , respectivamente, se obtienen:

$$\underline{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.853 \\ -1.969 \end{bmatrix}, \quad \underline{Z}_3 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.804 \\ 0.321 \end{bmatrix}$$

La forma de estos tres modos de vibrar se aprecia en la figura 5.8. Recuerdese que los valores de cada modo pueden multiplicarse por cualquier constante arbitraria.



5.8 Modos de vibrar de la estructura para 5.7.

128

Se puede verificar la ortogonalidad de los modos con respecto a las matrices de masas y de rigideces. Por ejemplo, con el primer y tercer modos se tiene:

$$\underline{Z}_1^T \underline{M} = \{ 1.00 \quad 1.751 \quad 2.541 \} \begin{bmatrix} 0.40775 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.203875 \end{bmatrix}$$

$$= \{ 0.40775 \quad 0.71397 \quad 0.51805 \}$$

$$\underline{Z}_3^T \underline{M} \underline{Z}_1 = 1.0 \times 0.40775 - 0.804 \times 0.71397 + 0.321 \times 0.51805$$

$$= 0.00001 \approx 0$$

Análogamente con la matriz de rigideces se obtiene

$$\underline{Z}_1^T \underline{K} = \{ 1.000 \quad 1.751 \quad 2.541 \} \begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Z}_3^T \underline{K} \underline{Z}_1 = 1.00 \times 49.8 - 0.804 \times 87.0 + 0.321 \times 63.2 = 0.139$$

Los resultados no son exactamente cero por errores de redondeo.

5.4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA OBTENER MODOS Y FRECUENCIAS DE VIBRAR

El procedimiento seguido en la sección precedente para obtener modos y frecuencias de vibrar, es laborioso e impráctico en sistemas de más grados de libertad. Por ello se han desarrollado métodos numéricos de aproximaciones sucesivas, tres de los cuales se presentan a continuación. Los dos primeros son apropiados para emplearse con una calculadora de escritorio y el tercero es un método matricial, adecuado para hacer programas para computadora.

5.4.1 Método de Newmark

Este método se propone en la referencia 77 y está basado en el proceso de iteración de Stodola-Vianello (que se presenta entre otras en la referencia 2). En la forma en que a continuación se describe, el método es aplicable al cálculo del modo fundamental de vibración de las estructuras llamadas sencillas o cercanamente acopladas. En estas estructuras la masa de los pisos intermedios está ligada sólo a la del piso superior e inferior mediante resortes que representan las rigideces de entrepiso correspondientes (la figura 5.7 es una estructura de este tipo). En su forma más general el método se puede aplicar a cualquier estructura lineal con acoplamiento entre las diferentes masas (referencia 37).

Tabla 5.1 Método de Newmark.

Renglón	K (ton/cm)	M (ton-seg ² /cm)	200	200	200
1	X		1.000	2.000	3.000
2	F/ω ²		0.408	0.816	0.612
3	V/ω ²	1.836	1.428	0.612	0.612
4	ΔY/ω ²	0.00918	0.00714	0.00765	0.00765
5	Y/ω ²		0.00918	0.01632	0.02397
6	ω ²		109	123	125
1	X		1.000	1.780	2.610
2	F/ω ²		0.408	0.726	0.532
3	V/ω ²	1.664	1.258	0.532	0.532
4	ΔY/ω ²	0.00837	0.00629	0.00665	0.00665
5	Y/ω ²		0.00837	0.01466	0.2131
6	ω ²		119	121	122
1	X		1.000	1.750	2.550
2	F/ω ²		0.408	0.714	0.520
3	V/ω ²	1.642	1.234	0.520	0.520
4	ΔY/ω ²	0.00821	0.00617	0.0065	0.0065
5	Y/ω ²		0.00821	0.01438	0.02088
6	ω ²		121.8	121.7	122.1
			1.000	1.752	2.543

$$\omega^2 = \frac{\sum FX}{\sum MX} = \frac{0.024475}{0.000201} = 121.9 \text{ seg}^{-2}$$

$$T = 2\pi/\omega = 0.5686 \text{ seg}$$

Los pasos en que consiste el método (tabla 5.1) son los siguientes:

- Supóngase una forma para el modo. Esta es la que aparece en el renglón 1 de la tabla. Para comenzar, es usualmente apropiado suponer valores iguales al número de orden del piso (de abajo hacia arriba).
- Obtégase la fuerza de inercia en cada masa correspondiente a la configuración supuesta. Esta fuerza sería $MX\omega^2$; como se desconoce ω^2 se calculan los productos $MX = F/\omega^2$, que forman el segundo renglón de la tabla.
- Con las fuerzas de inercia calcúlense las fuerzas cortantes en los entrepisos, también divididas entre ω^2 , es decir se calcula V/ω^2 , como se anota en el tercer renglón de la tabla.
- A partir de las fuerzas cortantes y de las rigideces de entrepiso, obténganse las deformaciones de entrepiso también divididas

entre ω^2 . Esto se presenta en el cuarto renglón de la tabla como $\Delta Y/\omega^2$.

e) Acumulando deformaciones de entrepiso, determinese una nueva configuración de los desplazamientos de las masas Y/ω^2 (quinto renglón de la tabla).

f) Obténgase ω^2 para cada masa, como los cocientes $X/(Y/\omega^2)$. Esto se hace en el sexto renglón de la tabla. Si la configuración X supuesta es la correcta, se obtendrá el mismo valor para todas las masas. En caso contrario es necesario repetir todos los pasos empezando con una forma de modo proporcional a Y/ω^2 , hasta que se obtengan valores de ω^2 suficientemente parecidos en todas las masas. Así se obtiene una convergencia en general bastante rápida. En la tabla 5.1 se muestran tres iteraciones del método aplicado al edificio de la figura 5.7, con las cuales se obtuvo una aproximación suficiente. Los valores de X en cada iteración se normalizaron de manera que la masa del primer piso tuviese un desplazamiento unitario, lo cual permite apreciar cómo se va modificando de una iteración a otra la forma del modo.

Para calcular la frecuencia se pueden promediar los valores del último ciclo o mejor aún, determinarla con el cociente de Schwartz (que es una forma particular del cociente de Rayleigh), es decir como:

$$\omega^2 = \frac{\Sigma(F/\omega^2)(Y/\omega^2)}{\Sigma M(Y/\omega^2)^2}$$

empleando para F y X los valores del último ciclo. En el ejemplo propuesto ambos criterios conducen a $\omega^2 = 121.9 \text{ seg}^{-2}$, y la forma del modo es (1.000, 1.752, 2.543). Los valores difieren de los obtenidos en la sección 5.3.5 solamente en la cuarta cifra significativa.

5.4.2 Método de Holzer

Cuando se trata de obtener modos superiores al primero, es conveniente emplear el procedimiento debido a Holzer (referencia 44). Este método es solamente aplicable a estructuras sencillamente acopladas (véase la introducción al método de Newmark, en la sección precedente). Los pasos a dar son:

- a) Supóngase arbitrariamente un valor de ω^2 mayor que el del modo fundamental, previamente obtenido por cualquier método.
- b) Supóngase la amplitud del movimiento X_1 de la primera masa a partir del apoyo (es decir el valor de X correspondiente a la primera masa). Conviene suponer un valor unitario. Esta amplitud supuesta es también igual al desplazamiento ΔX_1 del primer entrepiso.

Tabla 5.1 Método de Newmark

Iteración	ω^2	X	Y/ω^2	$\Delta Y/\omega^2$
1	121.9	1.000	1.000	0.000
2	121.9	1.752	1.752	0.752
3	121.9	2.543	2.543	1.543

- c) Calcúlese la fuerza cortante en el primer resorte, $V_1 = K_1 \Delta X_1$ (K_1 es la rigidez de entrepiso), y la fuerza de inercia en la primera masa, igual a

$$F_1 = M_1 \omega^2 X_1.$$

- d) Satisfaciendo equilibrio calcúlese la fuerza cortante en el segundo resorte

$$V_2 = V_1 - F_1.$$

- e) Obténgase la deformación de este último

$$\Delta_2 = F_2/K_2.$$

- f) Calcúlese la amplitud del desplazamiento de la segunda masa, $X_2 = X_1 + \Delta X_2$ y la fuerza de inercia en la misma,

$$F_2 = M_2 \omega^2 X_2.$$

- g) Repítanse los pasos (d) a (f) con el tercer resorte y la tercera masa.

- h) Continúese el proceso hasta llegar a la última masa. Si se satisface el equilibrio entre la fuerza cortante del último resorte y la fuerza de inercia de la última masa, la frecuencia escogida y las amplitudes calculadas corresponden a un modo natural de vibración. Por lo general se obtendrá un residuo.

Representando en una gráfica los residuos obtenidos contra los distintos valores de ω^2 supuestos, se obtendrá una curva cuyos ceros corresponden a las frecuencias naturales.

Nótese que un cambio de signo en los residuos correspondientes a dos valores de ω^2 indica que hay una frecuencia comprendida entre dichos valores y se puede interpolar, por ejemplo linealmente, para obtener una mejor aproximación de la frecuencia buscada.

Cuando se está probando un valor de ω^2 suficientemente próximo al correspondiente a un modo de vibrar (cuando el residuo es pequeño), se encuentra que una aproximación más precisa de dicha frecuencia es (referencia 44)

$$\bar{\omega}^2 = \omega^2 \frac{\Sigma V \Delta X}{\Sigma F X} \tag{5.24}$$

Lo anterior se aprecia en la tabla 5.2, para los cálculos hechos para el segundo modo del edificio de la figura 5.7. Nótese que las operaciones se han hecho con más precisión en el último ciclo. Los resultados, $\omega_2^2 = 562.5/\text{seg}^2$ y $Z_2 = (1.000, 0.851, -1.964)$, difieren muy poco de los obtenidos en la sección 5.3.5.

La gráfica de los residuos versus ω^2 se muestra en la figura 5.9. En ella se incluyen también resultados obtenidos para calcular la frecuen-

Tabla 5.2 Método de Holzer

ω^2 Supuesta	K (ton/cm)	Residuo		
		200	200	80
	M (ton-seg ² /cm)	0.408	0.408	0.204
	X	1.0000	0.98	-1.570
500	ΔX	1.000	-0.020	-2.550
	V	200.0	-4.00	-204.0
	F	204.0	200.0	-160
600	X	1.000	0.780	-2.170
	ΔX	1.000	-0.220	-2.950
	V	200.0	-45.00	-236.0
	F	245.0	191.0	-266.0
560	X	1.000	0.860	-1.950
	ΔX	1.000	0.140	-2.810
	V	200.0	-28.50	-225
	F	228.5	195.5	-223
563	X	1.000	0.851	-1.964
	ΔX	1.000	-0.149	-2.815
	V	200.0	-29.70	-225.2
	F	229.7	195.5	225.6

$(500 \times 30 + 600 \times 44)/74 = 560$ (interpolación lineal)

$\bar{\omega}^2 = 560 \times \frac{200 \times 1 + 28.5 \times 0.140 + 225.0 \times 2.810}{228.5 \times 1 + 195.5 \times 0.860 + 223.0 \times 1.950} = 563.0$ (ec. 5.24)

$\bar{\omega}^2 = 563 \times \frac{200 \times 1 + 29.7 \times 0.149 + 225.2 \times 2.815}{229.7 \times 1 + 195.5 \times 0.851 + 225.6 \times 1.964} = 562.5$ (ec. 5.24)

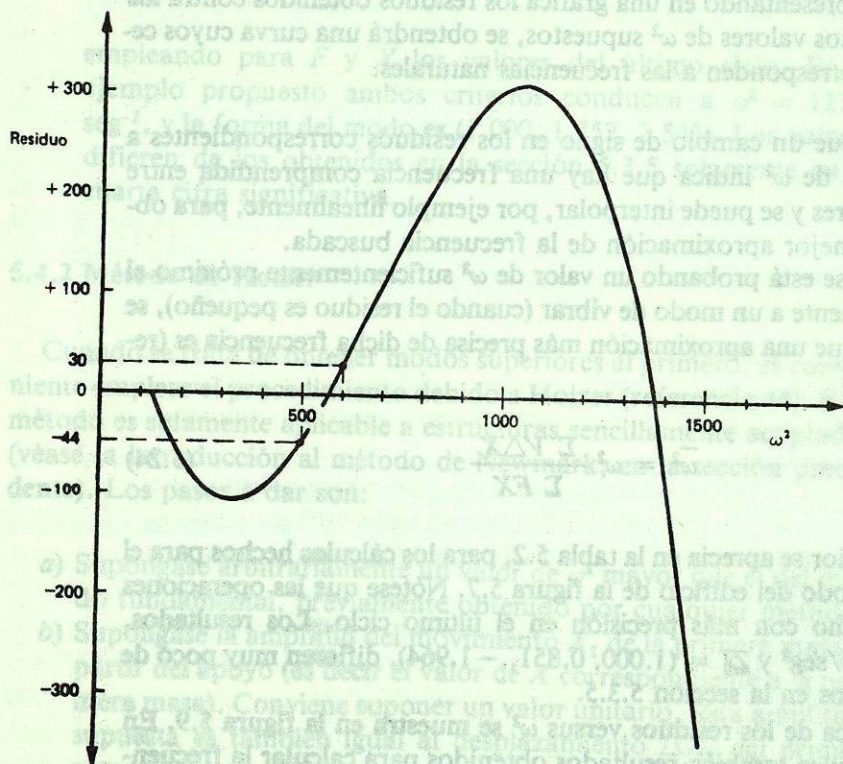


Figura 5.9 Método de Holzer.

133

cia del tercer modo de vibrar. El valor calculado para ω_3^2 es 1372/seg², que difiere del obtenido en 5.3.5 en menos de 0.3 por ciento.

5.4.3 Método de iteración inversa

Este procedimiento es apropiado para resolver problemas de valores característicos mediante operaciones matriciales. Se parte de que la ecuación 5.19 puede escribirse

$$KZ = \omega^2 MZ \quad (5.25)$$

Los pasos a seguir son:

- a) Supóngase un valor arbitrario X de Z (lo que es lo mismo que suponer un valor arbitrario de $\omega^2 Z$)
- b) Calcúlese el valor $X' = MX$.
- c) Calcúlese el vector Y resolviendo el sistema de ecuaciones siguientes (que proviene de la expresión 5.25).

$$KY = X' \quad (5.26)$$

- d) Si el vector Y es igual al vector X multiplicado por una constante, entonces se tiene una forma modal y la constante es igual a $1/\omega^2$. En la práctica se busca que Y sea aproximadamente igual a una constante por X y se calcula ω^2 con la relación siguiente (que es una manera de escribir el cociente de Rayleigh)

$$\omega^2 = \frac{Y^T X'}{Y^T M Y} \quad (5.27)$$

Si se considera que Y no es lo suficientemente parecida a X , se empieza otra vez en el paso a) con un vector X que sea proporcional a Y . Se demuestra (referencia 45) que así el proceso converge rápidamente al primer modo.

El método sirve también para determinar modos superiores de vibración si es que los pasos anteriores se aplican empleando en vez de K la matriz K' con un corrimiento de origen, es decir

$$K' = K - \mu M \quad (5.28)$$

En este caso los valores de Y convergen a la forma del modo cuyo valor de ω^2 esté más cercano a μ ; y el cociente de Rayleigh (ecuación

134