5.27) proporciona el valor de $(\omega^2 - \mu)$ por lo que para calcular ω^2 se debe usar la expresión:

$$\omega^2 = \mu + \frac{\underline{Y}^T \underline{X}'}{\underline{Y}^T \underline{M}\, \underline{Y}} \tag{5.29}$$

Como ejemplo se aplica este método otra vez a la estructura de la figura 5.7, recordando que las matrices de masas y de rigideces son:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 0.40775 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.20388 \end{bmatrix} \quad \text{(en ton-seg}^2\text{/cm)}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{bmatrix} \quad \text{(en ton/cm)}$$

Tabla 5.3 Método de iteración inversa (primer modo).

Grado de libertad	*1*	*2*	*3*
$\underline{X}$	1.000	2.000	3.000
$\underline{X}'$	0.40775	0.81550	0.61163
$\underline{Y}$	0.009174	0.01631	0.02396
$\underline{X}$	1.000	1.778	2.612
$\underline{X}'$	0.40775	0.72498	0.53253
$\underline{Y}$	0.008326	0.01461	0.02127
$\underline{X}$	1.000	1.775	2.555
$\underline{X}'$	0.40775	0.71560	0.52091
$\underline{Y}$	0.008221	0.01440	0.02092
$\underline{X}$	1.000	1.752	2.545

Notas: **Los valores de $\underline{X}$, salvo para la primera iteración, son proporcionales a los de $\underline{Y}$ de la iteración anterior.**

$$\underline{X}' = \underline{M}\,\underline{X}$$
$$\underline{Y} = \underline{K}^{-1}\underline{X}'$$

$$\omega^2 = \frac{Y^T X'}{Y^T M Y} \quad \textbf{(ecuación 5.27)}$$

$$\omega^2 = \frac{0.008221 \times 0.40775 + 0.0144 \times 0.7156 \times 0.02092 \times 0.52091}{0.008221^2 \times 0.40775 + 0.0144^2 \times 0.40775 + 0.02092^2 \times 0.20388}$$

$$\omega^2 = 122 \text{ seg}^{-2}$$

135

Los cálculos de varias iteraciones hechas para obtener el primer modo, se presentan en la tabla 5.3. Como valores iniciales de $\underline{X}$ conviene, como en el método de Newmark, suponer cantidades proporcionales al número de orden del grado de libertad.

En el paso c) se necesita resolver el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{bmatrix} 400 & -200 & 0 \\ -200 & 280 & -80 \\ 0 & -80 & 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix}$$

La solución se puede escribir

$$y_1 = \frac{x_1' + x_2' + x_3'}{200}$$

$$y_2 = 2\,y_1 - \frac{x_1'}{200}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{x_3'}{80}$$

En la tabla 5.4 se muestran los cálculos para obtener el segundo modo. Para esto se adoptó en la expresión 5.28 el valor $\mu = 490.5$

Tabla 5.4 Método de iteración inversa con corrimiento **($\mu = 490.5$, converge al segundo modo).**

Grado de libertad	*1*	*2*	*3*
$\underline{X}$	1.000	1.000	1.000
$\underline{X}'$	0.40775	0.40775	0.20388
$\underline{Y}$	0.01198	0.009939	0.02574
$\underline{X}$	1.000	0.830	−2.149
$\underline{X}'$	0.40775	0.33843	−0.43813
$\underline{Y}$	0.01453	0.01249	−0.02805
$\underline{X}$	1.000	0.860	−1.931
$\underline{X}'$	0.40775	0.35067	−0.39368
$\underline{Y}$	0.01370	0.01167	−0.02698
$\underline{X}$	1.000	0.851	−1.969

Nota: **Los valores de $\underline{X}$, salvo para la primera iteración, son proporcionales a los de $\underline{Y}$ de la iteración anterior**

$$\underline{X}' = \underline{M}\,\underline{X}$$
$$\underline{Y} = \underline{K}'^{-1}\,\underline{X}'$$

$$\rho = \frac{\underline{Y}^T \underline{X}'}{\underline{Y}^T \underline{M}\,\underline{Y}}, \quad \omega^2 = \rho + \mu \textbf{ (ecuación 5.59)}$$

$$\rho = \frac{0.01370 \times 0.40775 + 0.01167 \times 0.35067 + 0.02698 \times 0.39368}{0.01370^2 \times 0.40775 + 0.01167^2 \times 0.40775 + 0.02698^2 \times 0.20388}$$

$$\rho = 72.4, \qquad \omega^2 = 490.5 + 72.4 = 562.9 \text{ seg}^{-2}$$

136

(= 981/2), entonces la convergencia será el valor de ω^2 más cercano a 490.5

En modos superiores al primero (y aun en este) conviene suponer que los valores iniciales de $\underline{X}$ son todos iguales a la unidad.

La matriz $\underline{K}'$ resulta entonces:

$$\underline{K}' = \underline{K} - \mu \underline{M} = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 80 & -80 \\ 0 & -80 & -20 \end{bmatrix}$$

Esta vez, en el paso *c*) se tiene que resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 \\ -200 & 80 & -80 \\ 0 & -80 & -20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix}$$

La solución es:

$$y_1 = \frac{2x_1' + x_2' - 4x_3'}{200}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{x_1'}{200}$$

$$y_3 = -4\,y_2 - \frac{x_3'}{20}$$

Puede notarse que el método de iteración inversa da, para el primer modo, los mismos resultados que el método de Newmark. De hecho ambos métodos son equivalentes, en este caso, al procedimiento conocido como de Stodola-Vianello, que consiste básicamente en iterar empleando la expresión siguiente (véase por ejemplo la referencia 2).

$$\frac{1}{\omega^2}\underline{Z} = \underline{K}^{-1}\underline{M}\,\underline{Z} \qquad (5.30)$$

que es otra forma de escribir la ecuación 5.19, y que equivale a resolver el sistema de ecuaciones 5.26.

Sin embargo, el método de iteración inversa se puede aplicar cualesquiera que sean las matrices de masas y rigideces, y no sólo a sistemas sencillamente acoplados; además, como se ha visto, empleado con corrimientos, sirve para calcular cualquier modo de vibrar.

Por tales motivos el método de iteración inversa constituye la base de varios algoritmos (como el de iteración de subespacios y el de búsqueda del determinante) apropiados para computadoras. En la referencia 45, se trata con más amplitud este método y sus variantes, y se presentan inclusive los correspondientes programas para computadoras.

1.1.4 Fórmulas de Wilbur

La rigidez de entrepiso es la relación entre la fuerza cortante absorbida por un marco, muro o contraviento en un entrepiso y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles que lo limitan. La rigidez así definida no es independiente del sistema de fuerzas laterales. Por tanto, para calcularla con rigor debe conocerse tal sistema con anterioridad, lo cual en general no es posible.

En marcos ordinarios de edificios el empleo de sistemas de cargas que no son estrictamente proporcionales al definitivo de análisis introduce errores de poca importancia, y usualmente es aceptable calcular las rigideces a partir de hipótesis simplificadoras sobre la forma del sistema de fuerzas laterales. En muros, contravientos y ciertos marcos es indispensable tener en cuenta la variación de la carga lateral.

Las fórmulas de Wilbur son aplicables a marcos regulares formados por piezas de momentos de inercia constante. La versión que aquí se presenta se basa en las siguientes hipótesis:

1. Los giros en todos los nudos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales, excepto en el nivel de desplante, en donde puede suponerse empotramiento o articulación según el caso.
2. Las fuerzas cortantes en los dos entrepisos adyacentes al que interesa son iguales a la de éste.

De aquí resultan las siguientes expresiones.

- Para el primer entrepiso:

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación

$$R_1 = \frac{48E}{h_1\left[\dfrac{4h_1}{\Sigma K_{c1}} + \dfrac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1} + \dfrac{\Sigma K_{c1}}{12}}\right]} \qquad (1.5)$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación

$$R_1 = \frac{24E}{h_1\left[\dfrac{8h_1}{\Sigma K_{c1}} + \dfrac{2h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1}}\right]} \tag{1.6}$$

- Para el segundo entrepiso:

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2\left[\dfrac{4h_2}{\Sigma K_{c2}} + \dfrac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1} + \dfrac{\Sigma K_{c1}}{12}} + \dfrac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{t2}}\right]} \tag{1.7}$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2\left[\dfrac{4h_2}{\Sigma K_{c2}} + \dfrac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{t2}} + \dfrac{2h + h_2}{\Sigma K_{t1}}\right]} \tag{1.8}$$

- Para entrepisos intermedios:

$$R_n = \frac{48E}{h_n\left[\dfrac{4h_n}{\Sigma K_{cn}} + \dfrac{h_m + h_n}{\Sigma K_{tm}} + \dfrac{h_n + h_o}{\Sigma K_{tn}}\right]} \tag{1.9}$$

En estas ecuaciones

R_n	rigidez del entrepiso en cuestión.
K_{tn}	rigidez (I/L) de las vigas del nivel sobre el entrepiso *n*.
K_{cn}	rigidez (I/L) de las columnas del entrepiso *n*.
m, n, o	índices que identifican tres niveles consecutivos de abajo hacia arriba.
h_n	altura del entrepiso *n*.

Para el entrepiso superior, si se acepta que la cortante del penúltimo piso es el doble que la del último, se encuentra que es aplicable la fórmula para entrepisos intermedios, poniendo $2h_m$ en vez de h_m y haciendo $h_o = 0$.