gence, les rayons I'R' et *i'r'* suivent des directions divergentes. En d'autres termes, un faisceau de rayons simples, parallèles avant l'incidence, donne *généralement* naissance à un faisceau réfracté divergent : si donc on a égard

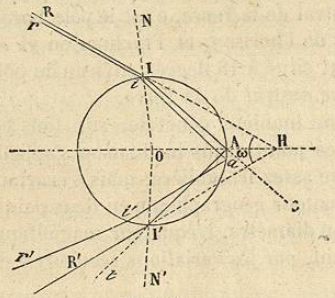

Fig. 685.

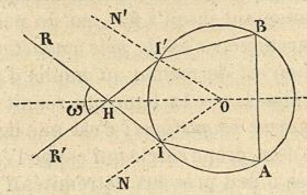

Fig. 686.

à la distance du nuage au spectateur, on conçoit que la quantité de lumière apportée à l'œil par ce faisceau soit trop faible pour y produire une impression. — Mais la *déviation totale* du rayon RI est la somme des angles HIs,sAI',tI'R' : or, la théorie montre que, si la position de RI est telle que cette déviation totale soit *un maximum* ou *un minimum* par rapport à celles des autres rayons, les rayons voisins de RI émergeront suivant des directions sensiblement parallèles; ces rayons pourront donc impressionner l'œil : on les nomme *rayons efficaces*.

Le calcul donne, pour les rayons de *chaque couleur*, la valeur de ce maximum ou de ce minimum; et la figure montre que, en retranchant cette valeur de 4 angles droits, on obtient l'angle RHR', ou ω, que fait le faisceau incident avec le faisceau émergent; on voit aussi, en tenant compte des lois de la réflexion et de la réfraction, que les directions RI et R'I' prolongées se rencontrent en un point H de la droite OA, laquelle est bissectrice de l'angle RHR'; enfin, que l'angle d'incidence RIN est égal à l'angle d'émergence R'I'N'. — Dans le cas d'une seule réflexion intérieure, on trouve, pour les *rayons rouges*, ω = 42° 1' 10", et l'angle d'incidence correspondant est de 59°23'30".

Soit donc SAS' (*fig.* 687) une droite passant par le centre du soleil et par l'œil du spectateur, que nous supposerons placé en A; menons par ce point A, vers le nuage, une droite quelconque AM faisant avec AS' un angle de 42° 1' 10" : pendant la chute de la pluie, cette droite est à chaque instant rencontrée par des gouttes d'eau, de telle façon que l'angle d'incidence soit égal à 59°23'30". Soit G une des gouttes; menons par son centre une parallèle à la bissectrice de l'angle MAS' et considérons le rayon solaire dont la direction RI est symétrique de I'A par rapport à cette parallèle. Ce rayon, en se réfractant au point I, subit une décomposition, et l'on voit, d'après ce qui précède, que le *rayon rouge* auquel il donne naissance sortira de la goutte d'eau suivant I'A, après s'être réfléchi une fois dans son intérieur; on voit, de plus, que les rayons très voisins de RI donneront, à l'émergence, un faisceau de rayons efficaces; l'œil de l'observateur placé en A recevra donc *de la lumière rouge* dans la direction I'A. — Les mêmes conclusions s'appliquant à toute droite qui fait avec AS' un angle de 42° 1' 10", le spectateur verra un arc rouge, suivant l'intersection de la voûte céleste avec la surface d'un cône engendré par la révolution de I'A autour de AS'. Cet arc rouge ne sera d'ail-

leurs pas une simple *ligne* lumineuse, mais une *bande*, ayant une largeur angulaire égale au diamètre apparent du soleil : on voit en effet que l'on peut répéter, pour chacun des points du soleil, les raisonnements que nous avons faits pour le centre.

Les diverses couleurs qui composent la lumière blanche incidente donnent lieu à des phénomènes semblables; mais la théorie montre que la valeur de

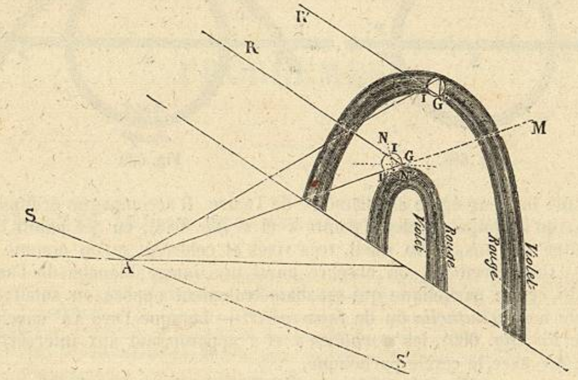

Fig. 687.

l'angle ω va progressivement en décroissant, du rouge au violet : c'est pourquoi, dans cet arc-en-ciel, le rouge occupe le bord *externe*. — Les bandes correspondantes aux sept couleurs du spectre se superposent d'ailleurs en partie; de sorte que les couleurs de l'arc-en-ciel ne sont pas des couleurs simples, à l'exception du rouge extrême et du violet extrême.

Si l'on considère de même le cas de *deux réflexions intérieures*, on arrive à expliquer l'*arc-en-ciel extérieur*. — Dans ce cas, la valeur de l'angle ω (*fig.* 686) est plus petite pour le violet que pour le rouge : le rouge occupe donc le bord *interne*, et le violet le bord *externe*. — On comprend aussi que ce deuxième arc doive être moins brillant que le premier, parce que les rayons qui le produisent ont subi une réflexion de plus, à l'intérieur des gouttes d'eau.

948. Halos. — On nomme *halos*, des cercles colorés qui s'observent quelquefois autour du soleil, et dont cet astre occupe le centre : les couleurs y sont les mêmes que dans l'arc-en-ciel, mais le rouge est toujours *à l'intérieur*, le violet toujours *à l'extérieur*. — Le plus souvent, le halo est composé d'un cercle unique, dont le rayon est vu sous un angle d'environ 23°. Parfois, on observe un deuxième cercle, concentrique au premier, et dont le rayon est vu sous un angle double. Enfin, on peut voir apparaître un cercle ou un arc coloré, tangent au point le plus élevé du halo de 23°; ordinairement, cet arc AA' est à l'extérieur du cercle CC' du halo (*fig.* 688); mais il se peut aussi que AA' enveloppe le halo (fig. 689). — Les halos s'observent également autour de la lune; mais alors les couleurs sont moins nettes.

Le phénomène des halos a été attribué par Mariotte à la décomposition de la lumière, dans les aiguilles prismatiques hexagonales de glace qui composent les cirrus (932). L'explication des halos repose sur les mêmes principes que celle de l'arc-en-ciel

949. Cercles parhéliques. — Parhélies. — Un *cercle parhélique* est une bande blanche horizontale PP′ (*fig.* 688 et 689), passant par le soleil S, et

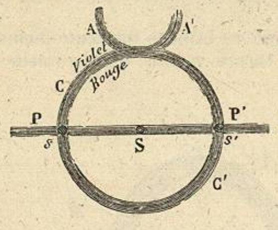

Fig. 688.

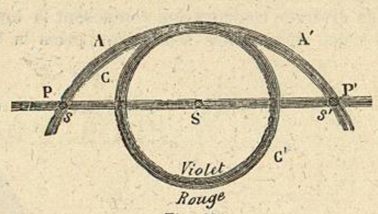

Fig. 689.

ayant une hauteur égale au diamètre de l'astre. Il accompagne ordinairement le halo, qu'il coupe en deux points *s* et *s′* (*fig.* 688); en ces points, on voit apparaître des images du soleil, très vives et colorées, qu'on nomme *parhélies*. — Ordinairement, on observe aussi une image blanche de l'astre, au point du cercle parhélique qui est diamétralement opposé au soleil; on lui donne le nom d'*anthélie* ou de *faux-soleil*. — Lorsque l'arc AA′ enveloppe le halo de 23° (*fig.* 689), les parhélies *s* et *s′* apparaissent aux intersections de cet arc AA′ avec le cercle parhélique.

Le cercle parhélique est dû à la réflexion de la lumière solaire, sur les faces des prismes de glace qui sont placées verticalement.

950. Couronnes. — Les *couronnes* sont encore des cercles colorés, qui apparaissent autour du soleil ou autour de la lune. Elles se distinguent des halos par une disposition inverse des couleurs : le rouge est toujours *à l'extérieur*, le violet *à l'intérieur*; leur diamètre est d'ailleurs bien moindre que celui des halos. — On observe fréquemment plusieurs couronnes concentriques : l'angle sous lequel on voit le rayon de la couronne intérieure varie depuis 1° 30′ jusqu'à 4°.

Le phénomène des couronnes est dû à l'action exercée sur les rayons solaires par les nuages formés de gouttelettes sphériques, sensiblement égales entre elles. — On peut le reproduire artificiellement, en saupoudrant de lycopode une lame de verre, à travers laquelle on regarde la flamme d'une bougie placée à une certaine distance.

PROBLÈMES

PROBLÈMES SUR LA PESANTEUR ET L'HYDROSTATIQUE.

I. *Dans une machine d'Atwood, chacune des masses égales pèse 240 grammes, la masse additionnelle pèse 10 grammes. On sait que, en faisant usage du système d'unités C.G.S., l'accélération de la chute libre des corps est égale à 980 unités d'accélération. — Evaluer, 1° la force* f *qui met le système en mouvement; 2° la masse* m *(mise en mouvement; 3° la hauteur de chute* h, *pour une durée de la chute égale à 5 secondes.*

On trouve $f = 9800$ dynes; $m = 490$ grammes; $h = 250$ centimètres.

II. *Un corps est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale* v_0. *A quelle hauteur* h *parvient-il, et quelle vitesse* v *a-t-il en revenant au point de départ?*

On trouve $h = \frac{v_0^2}{2g}$; $v = v_0$

III. *Le fil qui s'enroule sur la poulie d'une machine d'Atwood supporte, à ses deux extrémités, deux masses égales chacune à 240 grammes; l'une de ces masses, ramenée à la division zéro, est surchargée d'une masse additionnelle cylindrique de 5 grammes, et d'une masse de forme allongée, égale aussi à 5 grammes. On dispose le curseur annulaire de manière à arrêter la masse de forme allongée au bout de 2 secondes de chute. On demande de trouver l'équation du mouvement : 1° quand la durée de la chute est inférieure à deux secondes; 2° quand la durée de la chute dépasse 2 secondes. — On fera usage des unités C.G.S., l'accélération de la chute libre est de 980 unités d'accélération.*

Solution. — La force qui sollicite le système dans la première partie de la chute est égale à $10 \times 980 = 9800$ dynes, elle n'est plus que $5 \times 980 = 4900$ dynes dans la seconde partie. — La masse entraînée est d'abord de $2 \times 240 + 10 = 490$ grammes elle n'est plus ensuite que de $2 \times 240 + 5 = 485$ grammes. — L'accélération du mouvement s'obtient, dans les deux cas, en faisant le quotient de la force par la masse : $\gamma = \frac{F}{m}$. On trouve ainsi, avant que le curseur annulaire ait arrêté la masse de forme allongée, $\gamma = 20$; après que cette masse a été arrêtée, c'est-à-dire au bout de 2 secondes, $\gamma' = 10{,}10$.

Si t est inférieur à 2 secondes, la vitesse et l'espace parcouru sont donnés par les deux équations :

$$(1) \qquad v = 20 \times t, \qquad e = 10 \times t^2.$$

En particulier, quand $t = 2$, on a $e = 40$, $v = 40$. Le curseur annulaire est donc placé à 40 centimètres du zéro, et quand le système mobile abandonne la masse de forme allongée, sa vitesse est de 40 centimètres par seconde. Cette vitesse est la vitesse initiale v_0 du second mouvement, uniformément accéléré, qui succède au premier; l'accélération devient alors 10,10; et si l'on compte toujours l'espace parcouru à partir du zero de la règle, les deux équations du mouvement sont :

$$(2) \qquad v = 40 + 10{,}10\,(t-2), \qquad e = 40 + 40\,(t\text{-}2) + 5{,}05\,(t-2)^2.$$

IV. *Calculer la vitesse acquise par un corps pesant qui tombe d'une hauteur égale à 20 mètres, en un lieu de la Terre où la longueur du pendule qui bat la seconde est de 98 centimètres. — On négligera la résistance de l'air.*

Solution. — Soit h la hauteur de chute et v la vitesse, on a $v = \sqrt{2gh}$. — Or la longueur du pendule qui bat la seconde étant λ, la valeur de g est donnée par la formule du pendule : $1 = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$, d'où l'on tire $g = \pi^2\lambda$. — En portant cette valeur de g dans l'expression de la vitesse, il vient :

$$v = \pi\sqrt{2\lambda h}.$$

Les unités de longueur et de temps étant le *mètre* et la *seconde*, on doit faire $\lambda = 0{,}98$, $h = 20$, et l'on trouve $v = 19{,}67$; c'est-à-dire que la vitesse est de 19 *mètres* 67 *par seconde.*

V. *Une horloge retarde de 5 minutes par jour; de combien doit-on raccourcir le pendule, pour régler cette horloge, sachant que la longueur du pendule qui bat la seconde est de 991 millimètres?*

On trouve $6^{mm},9$.

VI. *On a laissé tomber une pierre au fond d'un puits, et l'on a entendu le bruit de la chute au bout de 4 secondes et demie. Quelle est la profondeur du puits? — On supposera que le son se propage d'un mouvement uniforme, avec une vitesse de 340 mètres par seconde.*

Solution. — Soient t la durée de la chute, et x la profondeur du puits; on aura

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2}gt^2.$$

D'autre part, si T est le temps écoulé entre le départ de la pierre et le moment où le bruit de la chute est parvenu à l'oreille, le temps qu'a mis le bruit de la chute, pour parvenir à l'oreille, est égal à $\mathrm{T} - t$; en sorte que, si v est la vitesse de propagation du son, on a :

$$(2) \qquad x = v\,(\mathrm{T} - t).$$

En éliminant t entre les équations (1) et (2), on arrive à l'équation

$$x^2 - 2\left(v\mathrm{T} + \frac{v^2}{g}\right)x + v^2\mathrm{T}^2 = o,$$

d'où l'on tire,

$$x = v\mathrm{T} + \frac{v^2}{g} \pm \sqrt{\frac{v^2}{g}\left(2v\mathrm{T} + \frac{v^2}{g}\right)}.$$

La hauteur x du puits devant être inférieure au produit $v\mathrm{T}$, qui exprimerait l'espace parcouru par le son dans le temps T, la valeur de x qui correspond au signe négatif du radical est la seule qui convienne au problème.

Si l'on prend le *mètre* et la *seconde* comme unités de *longueur* et de *temps*, on doit faire $v = 340$, $g = 9{,}8$, $\mathrm{T} = 4{,}5$. On trouve alors $x = 88^m,2$.

VII. *Deux mobiles sont lancés successivement de bas en haut, avec la même vitesse initiale* a : *l'intervalle de temps qui s'écoule entre le départ du premier et le départ du second est égal à* θ. — *On demande : 1° à quelle hauteur et à quel instant ils se rencontreront; 2° de quelles vitesses ils seront animés à l'instant de leur rencontre.*

Solution. — Représentons par t le temps qui s'écoule entre le départ du premier mobile et l'instant de la rencontre, par e la hauteur à laquelle les deux mobiles se rencontrent, par v et v' leurs vitesses au moment de la rencontre, ces deux quantités étant

comptées positivement de bas en haut. En désignant par g l'accélération de la chute libre, et remarquant que le mouvement des deux mobiles est uniformément retardé, on aura, pour le premier mobile,

$$(1) \qquad e = at - \frac{1}{2}gt^2, \qquad v = a - gt.$$

La considération du mouvement du second mobile donne une deuxième expression de e, et la valeur de v', en remplaçant, dans les équations (1), t par $t - \theta$; on a ainsi

$$(2) \qquad e = a\,(t-\theta) - \frac{1}{2}g\,(t-\theta)^2 \qquad v' = a - g\,(t-\theta).$$

En égalant les deux expressions (1) et (2) de la même quantité e, on obtient une équation du premier degré, qui donne la valeur de t; en portant cette valeur dans les expressions de e, v, et v', on obtient les résultats suivants :

$$t = \frac{2a + g\theta}{2g}, \qquad e = \frac{4a^2 - g^2\theta^2}{8g}, \qquad v = -g\frac{\theta}{2}, \qquad v' = +g\frac{\theta}{2}.$$

On voit que, à l'instant de la rencontre, les deux mobiles sont animés de vitesses égales et de signes contraires : le premier mobile descend, tandis que le second s'élève. — La hauteur e doit être positive, c'est-à-dire que l'on doit avoir $\theta < \frac{2a}{g}$; en d'autres termes, le second mobile doit être lancé avant que le premier mobile soit revenu au point de départ.

VIII. *Sur un couteau ayant son arête horizontale, on dispose, perpendiculairement à cette arête, une tige pesante de poids* p *et de longueur* l, *supportant à ses extrémités des poids* P *et* Q. *Calculer les distances* x *et* y *du couteau aux extrémités de la tige, lorsque celle-ci se tient horizontalement en équilibre.*

Solution. — Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la résultante des trois forces P, Q, et p passe par l'arête du couteau. — Or, on peut remplacer cette dernière force p, appliquée au milieu de la tige, par deux forces égales à $\frac{p}{2}$, dont les points d'application sont les deux extrémités de la tige. En exprimant que la résultante des forces $\mathrm{P} + \frac{p}{2}$ et $\mathrm{Q} + \frac{p}{2}$, appliquées à des distances x et y de l'arête du couteau, doit passer par cette arête, on aura une équation, qui, combinée avec la relation $x + y = l$, fera connaître les valeurs de x et de y.

IX. *Le petit piston d'une presse hydraulique a une section de 15 centimètres carrés; il est pressé par une force motrice de 40 kilogrammes. On demande : 1° quelle sera la force résistante* F *exercée sur le gros piston, quand il cessera de s'élever, sachant que sa section est de 3 décimètres carrés; 2° quelle section* S *devrait avoir le gros piston, pour qu'il continuât à s'élever jusqu'à ce que la force résistante fût de 2000 kilogrammes.*

On trouve $\mathrm{F} = 800$ kilogrammes; $\mathrm{S} = 750$ centimètres carrés.

X. *Une éprouvette cylindrique renferme des volumes égaux de mercure et d'eau, sur une hauteur totale de 20 centimètres. Cette éprouvette étant placée dans le vide, on demande d'évaluer la pression* p *à la surface de séparation des deux liquides, et la pression* P *au fond du vase. On fera d'abord usage des unités C.G.S.; puis on prendra comme unité de pression le poids du kilogramme par centimètre carré. — La densité du mercure par rapport à l'eau, est 13,6.*

On trouve, dans le système d'unités C.G.S., $p = 9800$, $\mathrm{P} = 143\,080$. — Dans le second système d'unités, $p = 0{,}01$; $\mathrm{P} = 0{,}146$.

XI. *Quel est le rapport des poids* x *et* y *de deux cylindres de fer et de platine qu'il faudrait fixer l'un à l'autre, pour que le système pût se maintenir en équilibre* *au milieu du mercure? — Densité du fer*, 7,8; *densité du platine*, 21; *densité du mercure*, 13,6.

Solution.— Prenons comme unité de poids le poids de l'unité de volume d'eau; les poids des cylindres étant x et y, leurs volumes seront respectivement $\frac{x}{7,8}$ et $\frac{y}{21}$. Le volume du mercure déplacé sera égal à la somme de ces volumes, et le poids du mercure déplacé sera $\left(\frac{x}{7,8}+\frac{y}{21}\right)13,6$. — Ce poids devant être égal à la somme des poids des deux cylindres, on aura

$$\left(\frac{x}{7,8}+\frac{y}{21}\right)13,6=x+y; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{y}=0,474.$$

XII. *On a un cylindre d'acier, de* 22 *centimètres de longueur, qu'on voudrait lester avec un cylindre de platine de même diamètre, de manière qu'il se tint verticalement flottant dans du mercure, la partie non plongée du cylindre d'acier n'étant que de* 2 *centimètres : quelle longueur faut-il donner au cylindre de platine?*

Solution. — Soient d la densité du platine, d' celle de l'acier, d'' celle du mercure; x la longueur du cylindre de platine. Exprimons que le poids du corps plongé et le poids du mercure déplacé sont égaux entre eux; nous aurons

$$xd+22d'=(20+x)d'';$$

d'où l'on tire la valeur de x.

XIII. *Un morceau de platine et une boule de cire se font équilibre dans les plateaux d'une balance parfaitement juste. Calculer le rapport des masses de ces deux corps en tenant compte de la poussée qu'ils éprouvent de la part de l'air. — Densité du platine*, 21; *densité de la cire*, 0,96; *densité absolue de l'air*, 0,0013.

Solution. — Faisons usage des unités C.G.S. Soit m la masse du platine; son volume est $\frac{m}{21}$, et par suite la masse de l'air qu'il déplace est $\frac{m}{21}\times 0,0013$. De même, m' étant la masse de la cire, la masse de l'air qu'elle déplace est $\frac{m'}{0,96}\times 0,0013$. Or, les poids apparents de ces deux corps dans l'air étant égaux, on a, en désignant par g l'intensité de la pesanteur,

$$\left(m-\frac{m}{21}\times 0,0013\right)g=\left(m'-\frac{m'}{0,96}\times 0,0013\right)g;$$

d'où l'on déduira facilement $\frac{m'}{m}=0,9987$.

XIV. *Le balancier d'une horloge, fait d'une substance dont la densité est* 8,8, *bat la seconde. Quelle serait la durée* t *d'une oscillation, si le balancier était immergé dans l'eau?*

On trouve $t=0^s,94$.

XV. *Un vase cylindrique, de section* S, *renferme un liquide de densité* D, *à la surface duquel on fait flotter un cylindre de bois, de section* s, *de hauteur* h *et de densité* d. *On demande :* 1° *la hauteur de la partie du cylindre immergée;* 2° *de combien le niveau s'est élevé dans le vase;* 3° *l'accroissement de la pression sur le fond du vase.*

Solution. — 1° Soit x la hauteur de la partie immergée; exprimons que le poids du cylindre de bois est égal au poids du liquide qu'il déplace; nous aurons, en prenant le poids de l'unité de volume d'eau comme unité de poids :

$$sx\mathrm{D}=shd, \qquad \text{d'où} \qquad x=h\frac{d}{\mathrm{D}}.$$

2° Le niveau du liquide s'est élevé comme si l'on avait versé dans le vase un volume de liquide $sx=sh\frac{d}{\mathrm{D}}$; l'addition de ce volume du liquide, dans un vase cylindrique de section S, produira une élévation du niveau exprimée par $y=h\frac{sd}{\mathrm{SD}}$.

3° La pression sur le fond du vase s'est accrue du poids de la colonne liquide ayant pour base le fond du vase et pour hauteur l'accroissement du niveau; l'augmentation de la pression est donc $\mathrm{S}y\mathrm{D}=shd$. La pression sur le fond du vase a donc augmenté du poids du cylindre qui flotte à la surface du liquide.

XVI. *Une sphère de platine et un cylindre de cuivre, ayant même diamètre, sont suspendus aux deux extrémités d'une balance parfaitement juste, et plongent, la première, dans du mercure; le second, dans l'eau. Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que le fléau se tienne horizontal? — Poids spécifique du platine*, 22; *poids spécifique du cuivre*, 8,8; *poids spécifique du mercure*, 13,6.

Solution. — d étant le diamètre commun à la sphère et au cylindre, on doit avoir pour la hauteur du cylindre, $h=d\times 0,718$.

XVII. *Une sphère de liège, de rayon* r *et de densité* d, *est lestée par une sphère de plomb, de densité* D. *Quel doit être le rayon* x *de cette dernière sphère, pour que le système se tienne en équilibre quand il est complètement immergé dans l'eau?*

Application numérique : $\mathrm{d}=0,233$, $D=11,35$.

On trouve $\quad x=r\sqrt[3]{\frac{1-d}{\mathrm{D}-1}}=0,42\times r.$

XVIII. *Un pèse-acides de Baumé marque* n *degrés dans un liquide. Quelle est la densité* x *de ce liquide, sachant que la densité de la solution saline qui a servi à marquer le* 15° *degré est* $\mathrm{d}=1,1136$. — *Application à l'acide sulfurique concentré qui marque* 66 *degrés.*

Solution. — Soit l'aréomètre représenté par la figure 84; appelons V le volume de l'aréomètre jusqu'au zéro, et v le volume d'une division. — Quand l'aréomètre flotte dans l'eau, il affleure au zéro; le volume de cette eau déplacée est donc V; si l'on prend comme unité de poids le poids de l'unité de volume d'eau, le nombre V exprime aussi le poids de l'eau déplacée par l'aréomètre. — Quand l'aréomètre flotte dans le liquide, jusqu'au degré n, le volume du liquide déplacé est $\mathrm{V}-nv$, et le poids de ce liquide est $(\mathrm{V}-nv)x$. — Enfin, quand l'aréomètre flotte dans la solution saline, le poids de cette solution qui est déplacée est $(\mathrm{V}-15\,v)d$.

Chacun de ces trois poids V, $(\mathrm{V}-nv)x$, $(\mathrm{V}-15v)d$, étant égal au poids du corps flottant, il en résulte que l'on a

$$\mathrm{V}=(\mathrm{V}-nv)x; \qquad \mathrm{V}=(\mathrm{V}-15\,v)d.$$

De la seconde équation on tire $\frac{v}{\mathrm{V}}=\frac{d-1}{15\,d}$; en substituant dans la première, et résolvant par rapport à x, il vient :

$$x=\frac{15\,d}{15\,d-n\,(d-1)}.$$

En faisant l'application à l'acide sulfurique, on trouve :

$$\frac{v}{\mathrm{V}}=\frac{1136}{167\,040}; \qquad x=1,814.$$

XIX. *Un aréomètre de Baumé, destiné aux liquides moins denses que l'eau (fig.* 85), *est plongé dans l'alcool absolu ayant pour densité* 0,804. *A quel degré affleure-t-il, sachant que la densité de la solution qui a servi à marquer le zéro est* 1,0855?

Solution. — Ce problème se traitera comme celui qui précède. — L'aréomètre plongé dans l'alcool absolu, marque 40°,9.

XX. *Quel effort doit-on faire pour séparer les hémisphères de Magdebourg, le vide étant fait à l'intérieur? —* R *est le rayon des hémisphères*, H *la hauteur barométrique.*

Solution. — L'hémisphère inférieur étant fixé au sol, pour détacher l'hémisphère supérieur, il faudra développer une force égale et contraire à la résultante de toutes les forces élémentaires telles que f, qui sont appliquées normalement à chacun des éléments de la surface de cet hémisphère (*fig.* 690).

Or si l'on fait usage des unités C.G.S., la pression atmosphérique, étant égale à la pression hydrostatique d'une colonne de mercure de hauteur H, est exprimée par $H \times 13{,}6 \times g$; la force f, appliquée à l'élément de surface AB a donc pour valeur

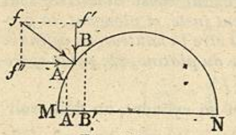

Fig. 690.

$$f = H \times 13{,}6 \times g \times \text{surf. AB}.$$

Elle peut être remplacée par deux composantes, l'une verticale f'; l'autre horizontale f''. — Par raison de symétrie, les composantes horizontales f'' se font équilibre deux à deux; tandis que les composantes verticales f', toutes parallèles entre elles, donnent une résultante égale à leur somme. Or si l'on remarque que l'angle α, que fait la force f avec sa projection verticale f', est égal à l'angle que fait l'élément de surface AB avec sa projection horizontale A'B', on a

$$\frac{f'}{f} = \frac{\text{surf. A'B'}}{\text{surf. AB}}.$$

Il en résulte que

$$f' = H \times 13{,}6 \times g \times \text{surf. A'B'}.$$

C'est-à-dire que la composante verticale de la force f, exercée sur la surface AB, est égale au poids d'une colonne de mercure qui aurait pour base la projection A'B' et pour hauteur la hauteur barométrique. La somme de toutes ces composantes f' est donc égale au poids d'une colonne de mercure de hauteur H, dont la base serait égale à la surface d'un grand cercle MN de la sphère.

XXI. *Une soupape pesant 1 kil. recouvre une ouverture de 1 décimètre carré. De quel poids* P *faut-il la charger, pour qu'elle ne s'ouvre que sous une différence de pression de 10 atmosphères?*

On trouve $P = 1032$ kilogrammes. — Une pression d'une atmosphère équivaut au poids de $1^{kg},033$ par centimètre carré (118).

XXII. *Un ballon contenant de l'air à la pression de 770 millimètres de mercure est ajusté, au moyen d'une monture à robinet, à la partie supérieure d'un baromètre à cuvette, dont le tube a une section de 2 centimètres carrés et une longueur de 90 centimètres au-dessus du niveau du mercure dans la cuvette. La pression extérieure étant de 760 millimètres, on ouvre le robinet; le mercure s'abaisse dans le tube, de telle sorte que sa surface ne se trouve plus qu'à 10 centimètres au-dessus du niveau dans la cuvette. On demande d'en déduire la capacité du récipient, en supposant que la température soit restée invariable pendant l'expérience.*

Solution. — Soit x le volume du récipient, exprimé en centimètres cubes. Avant l'ouverture du robinet, le volume d'air contenu dans l'appareil est x; sa pression, évaluée en hauteur de mercure, est 770 millimètres; quand le robinet est ouvert, le volume de cet air devient $x + 2(90 - 10)$, ou $x + 160$, et sa pression est $760 - 100$ millimètres, ou 660 millimètres. D'après la loi de Mariotte, le produit de chacun de ces volumes par la pression correspondante étant constant (138), on a :

$$x \times 770 = (x + 160)660;$$

d'où l'on tirera $x = 960^{cc}$.

XXIII. *On a construit un baromètre à cuvette sans se préoccuper d'en chasser complètement l'air, de sorte que la chambre barométrique contient une quantité inconnue de ce gaz. On fait une première observation, dans laquelle on mesure successivement la hauteur de la colonne de mercure, qui est 748 millimètres, et la longueur de la chambre barométrique, qui est 122 millimètres. On soulève alors un peu le tube et l'on constate que la hauteur du liquide devient 750 millimètres, la chambre barométrique acquérant une longueur de 141 millimètres. Quelle est la pression atmosphérique* H *au moment de l'expérience, en supposant que le tube soit bien cylindrique, au moins dans sa partie supérieure?* (*).

On trouve $H = 762^{mm},8$.

XXIV. *Un eudiomètre à mercure, de section uniforme dans toute sa longueur, est placé sur la cuve à mercure; il contient du gaz ammoniac, sur une longueur de 10 centimètres; le mercure s'élève dans le tube à 25 centimètres au-dessus de sa surface libre dans la cuvette. On fait passer dans l'eudiomètre une série d'étincelles électriques (fig. 497), jusqu'à ce que le gaz soit complètement décomposé; trouver la longueur occupée par le gaz. — Le baromètre marque 76 centimètres.*

Solution. — Soit s la section du tube; le volume du gaz ammoniac est égal à $10 \times s$, sous la pression $76 - 25 = 51$; si le gaz était sous la pression atmosphérique, son volume serait donc $s\,\frac{10 \times 51}{76}$. — Après le passage des étincelles, le volume du mélange d'azote et d'hydrogène est $x \times s$, en désignant par x la longueur cherchée, exprimée en centimètres; la longueur de la partie de l'eudiomètre, qui est en dehors de la cuve à mercure, est $10 + 25 = 35$ centimètres; la hauteur occupée par le mercure est donc $35 - x$, et par suite la pression du mélange gazeux est $76 - (35 - x) = 41 + x$. Si le gaz était sous la pression 76, il occuperait le volume $s\,\frac{x(41 + x)}{76}$. — Or, on sait que le volume du mélange d'azote et d'hydrogène est le double du volume primitif du gaz ammoniac, ces deux volumes étant mesurés sous la même pression; on a donc

$$2 \times s\,\frac{10 \times 51}{76} = s\,\frac{x(41 + x)}{76},$$

ou

$$x^2 + 41\,x - 1020 = 0.$$

On doit rejeter la racine négative; en faisant le calcul, on trouve $x = 17^{cm},2$.

XXV. *Un tube vertical, de longueur* l *et de section* b, *est rempli de mercure l'extrémité supérieure est bouchée, l'autre extrémité est effilée, et communique avec un cylindre de longueur* L *et de section* B, *rempli d'air sec sous la pression atmosphérique. On débouche le tube, et l'on demande quelle sera la hauteur* x *du mercure dans le tube, quand l'écoulement s'arrêtera. — La hauteur barométrique est* H.

Solution. — Puisque le tube fermé à sa partie supérieure est rempli de mercure, sa longueur l doit être inférieure à la hauteur barométrique H.

La longueur x est déterminée par l'équation

$$(BL - bl + bx)(H + x) = BLH.$$

La racine positive convient seule.

XXVI. *Un gros tube cylindrique vertical* M, *ouvert à sa partie supérieure, et un petit tube cylindrique vertical* m, *fermé à sa partie supérieure, communiquent entre eux, par leurs parties inférieures, au moyen d'un tube de jonction; le premier,* M, *a une section de 30 centimètres carrés; le second,* m, *a une section quelconque. On a versé du mercure dans l'appareil, et l'on a enfermé ainsi dans le tube* m *un certain volume d'air, qui y occupe une longueur de $2^m,15$, les niveaux du liquide dans les deux branches étant dans le même plan horizontal. Quelle force* F, *évaluée en kilogrammes, devrait-on appliquer sur la surface du liquide du tube* M, *à l'aide d'un piston qui s'adapterait exactement dans ce tube, pour que l'air n'occupât plus, dans le tube* m, *qu'une longueur de $0^m,52$? — Le tube* m *est supposé assez étroit, par rapport à* M, *pour que le niveau du mercure n'ait pas sensiblement baissé dans* M; *la température reste invariable pendant l'expérience, et la pression barométrique est de 760 millimètres.*

On trouve $F = 324^{kg},5$.

(*) Cette méthode est applicable à la construction de baromètres dont on pourrait enlever le liquide, en voyage, pour éviter les chances de rupture, et qu'on remplirait seulement au moment l'observation, sans se préoccuper d'en expulser complètement l'air. (Arago, *Astronomie populaire.*)

XXVII. *Une cloche cylindrique, en cristal, de poids* p, *de section intérieure* s, *de hauteur intérieure* h + l, *est renversée sur le mercure, qui s'y élève à la hauteur* h; *le reste de la cloche contient de l'air, sur la longueur* l. *La hauteur barométrique est de* 76 *centimètres, et la température est* 0°.

Quel est l'effort à faire pour soutenir la cloche? — Que devient cet effort, si l'on fait passer dans la cloche un morceau de fer de volume v, *le niveau du mercure à l'extérieur restant invariable?*

a, m, c, f, *sont les poids spécifiques de l'air, du mercure, du cristal et du fer.*

Application numérique : p = 450 *grammes*, s = 40 *centimètres carrés*; h = l = 10 *centimètres*; v = 200 *centimètres cubes*; a = 0,0013; m = 13,6; c = 3; f = 7,48.

Solution. — Prenons comme unité de force le poids du gramme, et comme unité de volume le centimètre cube.

En supposant que le mercure contenu dans la cloche soit solidifié jusqu'au plan horizontal de la surface libre du mercure extérieur, on ne modifie pas les conditions d'équilibre; l'effort F qu'il faut développer pour soutenir la cloche, est donc égal au poids apparent de la cloche et de son contenu. On a donc :

$$\mathrm{F} = p + shm + sla\,\frac{76-h}{76} - \left(\frac{p}{c} + s(h+l\right)a;$$

ou, après simplification :

$$\mathrm{F} = p + shm - \left(\frac{p}{c} + sh + s\,\frac{hl}{76}\right)a = 5889^{\mathrm{gr}},22.$$

Quand le morceau de fer a été introduit dans la cloche, il a fait sortir une certaine quantité de mercure, en sorte que la hauteur du mercure dans la cloche au dessus de la surface extérieure est devenue y. Le fer flotte à la surface du mercure, x étant le volume immergé, défini par la relation $x.m = v.f$; en sorte que le volume du fer qui émerge est $v - x$, ou $v\,\dfrac{m-f}{m}$.

Pour calculer y, on a recours à la loi de Mariotte. La même masse d'air, qui occupait d'abord le volume sl, sous la pression $76 - h$, occupe ensuite le volume

$$s(l+h-y) - v\,\frac{m-f}{m},$$

sous la pression $76 - y$: y est donc déterminé par la racine positive de l'équation du second degré :

$$\left[s(l+h-y) - v\,\frac{(m-f)}{m}\right][\mathrm{H} - y] = sl\,(76-h)$$

on trouve

$$y = 8^{\mathrm{cm}},0386.$$

En raisonnant comme ci-dessus, on calculerait l'effort F′ :

$$\mathrm{F}' = p + (sy - x)\,m + vf + sla\,\frac{76-h}{76} - \left[\frac{p}{c} + s\,(l+h)\right]a.$$

Après simplification,

$$\mathrm{F}' = p + sym - \left[\frac{p}{c} + sh + s\,\frac{lh}{76}\right]a = 4822^{\mathrm{gr}},22.$$

XXVIII. *Dans un récipient rempli d'air sec sous la pression de* 750 *millimètres, on fait le vide jusqu'à une pression* x, *et l'on fait entrer de l'hydrogène dans le récipient, jusqu'à ce que le mélange soit sous la pression de* 750 *millimètres. On fait encore une fois le vide, sous la pression* x, *et l'on fait de nouveau entrer de l'hydrogène jusqu'à ce que la pression du mélange soit de* 750 *millimètres. Trouver quelle doit être la valeur de* x, *pour que le poids de l'hydrogène soit la dixième partie du poids de l'air avec lequel il est mélangé. — La densite de l'hydrogène est* 0,069.

On trouve $x = 479$ millimètres.

XXIX. *Dans une éprouvette graduée, placée sur la cuve à mercure, et contenant un volume* v *d'eau, sans air, on introduit un volume* V *d'un mélange d'acide carbonique et d'oxyde de carbone, sous la pression* H. — *Après un certain temps, le volume occupé par le gaz est devenu* V_1, *sous la pression* H_1. *De ces données, et des coefficients de solubilité* c′ *et* c″ *des deux gaz, déduire la composition du mélange.*

Solution. — Soient x' et x'' les pressions de l'acide carbonique et de l'oxyde de carbone dans le mélange occupant le volume V avant la dissolution. On a :

(1) $$x' + x'' = \mathrm{H}.$$

Après la dissolution d'une partie de chacun des gaz, la force élastique de l'acide carbonique au-dessus de l'eau est f', celle de l'oxyde de carbone est f''; et l'on a

(2) $$f' + f'' = \mathrm{H}_1.$$

Avant la dissolution, l'acide carbonique occupait un volume V, sous la pression x' : après la dissolution, une partie de ce gaz occupe le volume V_1 sous la pression f', et l'autre partie peut être considérée comme occupant le volume $c'v$ sous la même pression f'; on a donc

(3) $$(\mathrm{V}_1 + c'v)\,f' = \mathrm{V}x'.$$

On aurait de même, en considérant l'oxyde de carbone,

(4) $$(\mathrm{V}_1 + c''v)\,f'' = \mathrm{V}x''.$$

Des équations (3) et (4) on tire les valeurs de f' et de f''; en les portant dans l'équation (2), on a une équation en x' et x'', qui, combinée avec l'équation (1), donne les valeurs de x' et de x'' :

$$x' = \frac{(\mathrm{V}_1 + c'v)\,(\mathrm{VH} - \mathrm{V}_1\mathrm{H}_1 - c''v\mathrm{H}_1)}{\mathrm{V}\,v\,(c' - c'')}; \qquad x'' = \frac{(\mathrm{V}_1 + c''v)\,(\mathrm{VH} - \mathrm{V}_1\mathrm{H}_1 - c'v\mathrm{H}_1)}{\mathrm{V}\,v\,(c'' - c')}.$$

XXX. *Un corps de pompe, auquel on veut donner une hauteur de* 90 *centimètres, est terminé inférieurement par un tuyau d'aspiration, dont le diamètre intérieur est* 35 *millimètres, et dont la hauteur est* 4ᵐ,80 *au-dessus du niveau de l'eau dans laquelle il plonge; quel diamètre* D *devra-t-on donner à ce corps de pompe, pour que l'eau s'élève, au premier coup de piston, jusqu'au sommet du tuyau d'aspiration? — On supposera la pression atmosphérique égale à celle de* 10 *mètres d'eau.*

On trouve $\mathrm{D} = 11^{\mathrm{cm}},2$.

XXXI. *Une fontaine de compression (fig. 137), de forme cylindrique, ayant une base de* 5 *décimètres carrés et une hauteur de* 50 *centimètres, contient de l'eau jusqu'à la moitié de sa hauteur; on y adapte, pour y comprimer de l'air, une pompe à main dont le corps de pompe a une section de* 12 *centimètres carrés et une hauteur de* 40 *centimètres. On donne* 20 *coups de piston; trouver :* 1° *à quelle hauteur* H *l'eau s'élèverait dans un tube étroit, ouvert à sa partie supérieure, qu'on substituerait à la pompe;* 2° *quelle force* F, *évaluée en kilogrammes, on devrait exercer sur une soupape placée à la partie supérieure du cylindre et ayant une surface de* 15 *centimètres carrés, pour la maintenir fermée.*

On trouve $\mathrm{H} = 7^{\mathrm{m}},938$; $\mathrm{F} = 11^{\mathrm{kgr}},907$.

XXXII. *Sous le récipient d'une machine pneumatique contenant de l'air sec à* 0° *et à la pression de* 760 *millimètres, on place un fléau de balance dont les bras sont égaux, et aux deux extrémités duquel sont suspendus deux cubes : l'un a* 3 *centimètres de côté et pèse dans l'air* 26ᵍʳ,3240, *et l'autre, qui a* 5 *centimètres de côté, pèse dans l'air* 26ᵍʳ,2597; *par suite de cette inégalité de poids, le fléau n'est pas horizontal. On raréfie l'air dans l'appareil et l'on demande quelle sera la pression sous le récipient, quand l'horizontalité sera établie. — La température sera supposée égale à* 0° *pendant toute l'expérience.*

Solution. — Soit x la pression cherchée, évaluée en millimètres de mercure; prenons pour unité de poids le poids du gramme. Pour obtenir le poids apparent du premier cube, au moment où l'horizontalité sera établie, il suffira de déterminer d'abord son poids dans le vide, et d'en retrancher le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient : or, le poids spécifique de l'air par rapport à l'eau, à 0° et sous la pression de 760 millimètres, est 0,0013; le poids du premier cube dans le vide est donc $26^{gr},3240 + 5^3 \times 0,0013$; le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient à la fin de l'expérience est $5^3 \times \frac{0,0013 \times x}{760}$: son poids apparent sous le récipient est donc définitivement

$$26^{gr},3240 + 5^3 \times 0,0013 \left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

De même, le poids apparent du second cube, sous le récipient, est

$$26^{gr},2597 + 5^3 \times 0,0013 \left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

En égalant entre elles ces deux expressions, on trouve $x = 376^{mm}$.

XXXIII. *Un aérostat sphérique, de 10 mètres de diamètre, est construit avec du taffetas pesant 250 grammes par mètre carré. Quel volume d'hydrogène doit-on introduire dans l'enveloppe, pour lui donner une force ascensionnelle de 10 kilogrammes? — La densité de l'hydrogène est 0,0692; on négligera la poussée subie par l'enveloppe. — La température est 0°, et le baromètre marque 76 cent.*

On trouve $V = 65^{mc},2$.

XXXIV. *Après avoir fermé la branche inférieure d'un baromètre à siphon, et y avoir ainsi enfermé une certaine quantité d'air sec, on observe la position du niveau du mercure dans la branche inférieure, à la température 0°, en un lieu de la Terre où l'intensité de la pesanteur est connue et égale à g. On connait le volume V occupé par l'air sec, la section s de chacune des deux branches, et la distance verticale H des deux niveaux du mercure dans les deux branches. — On transporte l'instrument dans une deuxième station, et l'on observe que, la température étant encore 0°, le niveau du mercure dans la branche qui renferme l'air s'est abaissé de a. Comment pourra-t-on en déduire l'intensité g' de la pesanteur, à cette deuxième station?*

Solution. — Lors de la première observation, le volume occupé par l'air est V, sous la pression exercée par une colonne de mercure de hauteur H, pression exprimée par Hdg; en désignant par d la densité de mercure (*note de la page* 90). — L'instrument étant transporté à la deuxième station, le volume de l'air est devenu $V + sa$, la hauteur de la colonne mercurielle est devenue $H + 2a$, et la pression qu'elle exerce est égale à $(H + 2a)dg'$.

En appliquant la loi de Mariotte, il vient :

$$(V + sa)(H + 2a)g' = VHg$$

d'où l'on tire la valeur de g'.

PROBLÈMES SUR LA CHALEUR

XXXV. *Un thermomètre est plongé, jusqu'au 20e degré de son échelle, dans un liquide chaud; le mercure s'élève dans la tige jusqu'au 130e degré. Cette indication ne donnant pas la température exacte du liquide, puisque la portion de la colonne mercurielle comprise entre les divisions 20 et 130 n'est pas plongée dans le bain, on demande de calculer la correction qu'elle devra subir, en supposant que la température de la portion extérieure de la colonne mercurielle soit égale à celle de l'atmosphère environnante, savoir 15°; on prendra pour coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre le nombre $\frac{1}{6480}$.*

Solution. — Désignons par x la température réelle du bain, c'est-à-dire celle que marquerait le thermomètre si toute la tige était plongée; le nombre x est évidemment la somme de 130 degrés, plus la dilatation *apparente* qu'éprouvent 130 — 20 ou 110 divisions de mercure, lorsque leur température s'élève de 15 degrés à x degrés. Donc

$$x = 130 + 110(x - 15)\frac{1}{6480}; \qquad \text{d'où} \qquad x = 131^{\circ},99.$$

XXXVI. *Quel est le rapport des poids x et y de mercure et de platine qu'il faut introduire, à la température de zéro degré, dans un vase de fer, pour que, dans ce vase, la dilatation apparente soit nulle, de zéro à une température quelconque t, cette dernière température étant inférieure à 100 degrés? — Densité du mercure, 13,6. Densité du platine, 21. Coefficient de dilatation absolu du mercure, entre zéro et 100 degrés, 0,0001815. Coefficient de dilatation cubique du platine, 0,0000257. Coefficient de dilatation cubique du fer, 0,0000366.*

On trouve $\frac{x}{y} = 0,0487$.

XXXVII. *Après avoir divisé un tube en parties d'égales capacités, on y introduit une longue colonne de mercure; puis on la fait sortir et on la pèse : elle occupait 250 division et pèse $2^{gr},5$. On souffle ensuite un réservoir à ce tube et l'on en fait un thermomètre à mercure. Le poids de mercure introduit est $129^{gr},6$. On détermine les points fixes de ce thermomètre, et l'on trouve qu'il marque 10 divisions à 0°, et 210 divisions à 100°. On demande, d'après cela, quel est le coefficient $\frac{1}{n}$ de dilatation cubique du mercure; on exprimera n avec trois chiffres significatifs seulement.*

Le coefficient de dilatation absolu du mercure est $m = \frac{1}{5550}$.

Solution. — On déduit des données le coefficient de dilatation apparente $\mu = \frac{1}{6480}$; par suite, $\frac{1}{n} = m - \mu = \frac{1}{38700}$.

XXXVIII (suite). *Après avoir enlevé le mercure, on met de l'eau à sa place. Ce thermomètre à eau marque 20 divisions à 0°; 26,3 à + 15°; 73,5 à — 15°. On demande quel est le volume de l'eau à + 15° et à — 15°, celui de l'eau à zéro étant pris pour unité.*

On trouve :

$$\text{à } + 15^{\circ}, \quad \frac{12976,3}{12970}\left(1 + \frac{15}{38700}\right) = 1,00088.$$

$$\text{à } - 15^{\circ}, \quad \frac{13023,5}{12970}\left(1 - \frac{15}{38700}\right) = 1,0037.$$

XXXIX. *Un tube bien calibré est divisé en parties d'égales longueurs et soudé à un réservoir. On y introduit une première fois $137^{gr},5$ de mercure : dans la glace fondante, le mercure s'arrête à la 175e division du tube; dans l'étuve à vapeur d'eau bouillante sous la pression normale, le mercure s'arrête à la 310e division. — On y introduit une nouvelle quantité de mercure, en tout $139^{gr},6$: dans la glace fondante, le mercure s'arrête à la 346e division.*

On vide l'appareil et on le remplit d'un liquide qui affleure à la 180e division dans la glace fondante, à la 326e division dans un bain à 20°.

On demande : 1° la dilatation apparente du mercure entre 0° et 100°, et le coefficient moyen de dilatation; 2° la dilatation de l'enveloppe entre 0° et 100°, et le coefficient moyen de dilatation; 3° la dilatation du liquide entre 0° et 20°, et le coefficient moyen de dilatation.

On trouve :

1° 0,0121; 0,000 121
2° 0,0059; 0,000 059
3° 0,0190; 0,000 950

XL. *On a un thermomètre centigrade à mercure, dont la tige est divisée en degrés. Le coefficient de dilatation apparente est $\frac{1}{6480}$. On y remplace le mercure par de*