récipient : or, le poids spécifique de l'air par rapport à l'eau, à 0^0 et sous la pression de 760 millimètres, est 0,0013; le poids du premier cube dans le vide est donc $26^{gr},3240 + 3^3 \times 0,0013$; le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient à la fin de l'expérience est $3^3 \times \frac{0,0013 \times x}{760}$: son poids apparent sous le récipient est donc définitivement

$$26^{gr},3240 + 3^3 \times 0,0013 \left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

De même, le poids apparent du second cube, sous le récipient, est

$$26^{gr},2597 + 3^3 \times 0,0013 \left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

En égalant entre elles ces deux expressions, on trouve $x = 376^{mm}$.

XXXIII. *Un aérostat sphérique, de 10 mètres de diamètre, est construit avec du taffetas pesant 250 grammes par mètre carré. Quel volume d'hydrogène doit-on introduire dans l'enveloppe, pour lui donner une force ascensionnelle de 10 kilogrammes? — La densité de l'hydrogène est 0,0692; on négligera la poussée subie par l'enveloppe. — La température est 0°, et le baromètre marque 76 cent.*

On trouve $V = 65^{mc},2$.

XXXIV. *Après avoir fermé la branche inférieure d'un baromètre à siphon, et y avoir ainsi enfermé une certaine quantité d'air sec, on observe la position du niveau du mercure dans la branche inférieure, à la température 0°, en un lieu de la Terre où l'intensité de la pesanteur est connue et égale à g. On connait le volume V occupé par l'air sec, la section s de chacune des deux branches, et la distance verticale H des deux niveaux du mercure dans les deux branches. — On transporte l'instrument dans une deuxième station, et l'on observe que, la température étant encore 0°, le niveau du mercure dans la branche qui renferme l'air s'est abaissé de a. Comment pourra-t-on en déduire l'intensité g' de la pesanteur, à cette deuxième station?*

Solution. — Lors de la première observation, le volume occupé par l'air est V, sous la pression exercée par une colonne de mercure de hauteur H, pression exprimée par Hdg; en désignant par d la densité de mercure (*note de la page* 90). — L'instrument étant transporté à la deuxième station, le volume de l'air est devenu $V + sa$, la hauteur de la colonne mercurielle est devenue $H + 2a$, et la pression qu'elle exerce est égale à $(H + 2a)dg'$.

En appliquant la loi de Mariotte, il vient :

$$(V + sa)(H + 2a)\, g' = VHg$$

d'où l'on tire la valeur de g'.

PROBLÈMES SUR LA CHALEUR

XXXV. *Un thermomètre est plongé, jusqu'au 20e degré de son échelle, dans un liquide chaud; le mercure s'élève dans la tige jusqu'au 130e degré. Cette indication ne donnant pas la température exacte du liquide, puisque la portion de la colonne mercurielle comprise entre les divisions 20 et 130 n'est pas plongée dans le bain, on demande de calculer la correction qu'elle devra subir, en supposant que la température de la portion extérieure de la colonne mercurielle soit égale à celle de l'atmosphère environnante, savoir 15°; on prendra pour coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre le nombre* $\frac{1}{6480}$.

Solution. — Désignons par x la température réelle du bain, c'est-à-dire celle que marquerait le thermomètre si toute la tige était plongée; le nombre x est évidem-

ment la somme de 130 degrés, plus la dilatation *apparente* qu'éprouvent 130 — 20 ou 110 divisions de mercure, lorsque leur température s'élève de 15 degrés à x degrés. Donc

$$x = 130 + 110\,(x - 15)\,\frac{1}{6480}; \qquad \text{d'où} \qquad x = 131^0,99.$$

XXXVI. *Quel est le rapport des poids* x *et* y *de mercure et de platine qu'il faut introduire, à la température de zéro degré, dans un vase de fer, pour que, dans ce vase, la dilatation apparente soit nulle, de zéro à une température quelconque* t, *cette dernière température étant inférieure à 100 degrés? — Densité du mercure, 13,6. Densité du platine, 21. Coefficient de dilatation absolu du mercure, entre zéro et 100 degrés, 0,0001815. Coefficient de dilatation cubique du platine, 0,0000257. Coefficient de dilatation cubique du fer, 0,0000366.*

On trouve $\frac{x}{y} = 0,0487$.

XXXVII. *Après avoir divisé un tube en parties d'égales capacités, on y introduit une longue colonne de mercure; puis on la fait sortir et on la pèse : elle occupait 250 division et pèse* $2^{gr},5$. *On souffle ensuite un réservoir à ce tube et l'on en fait un thermomètre à mercure. Le poids de mercure introduit est* $129^{gr},6$. *On détermine les points fixes de ce thermomètre, et l'on trouve qu'il marque 10 divisions à 0°, et 210 divisions à 100°. On demande, d'après cela, quel est le coefficient* $\frac{1}{\mathrm{n}}$ *de dilatation cubique du mercure; on exprimera* n *avec trois chiffres significatifs seulement.*

Le coefficient de dilatation absolu du mercure est $\mathrm{m} = \frac{1}{5550}$.

Solution. — On déduit des données le coefficient de dilatation apparente $\mu = \frac{1}{6480}$; par suite, $\frac{1}{n} = m - \mu = \frac{1}{38700}$.

XXXVIII (suite). *Après avoir enlevé le mercure, on met de l'eau à sa place. Ce thermomètre à eau marque 20 divisions à 0°; 26,3 à + 15°; 73,5 à — 15°. On demande quel est le volume de l'eau à + 15° et à — 15°, celui de l'eau à zéro étant pris pour unité.*

On trouve :

$$\text{à } +15^0,\quad \frac{12976,3}{12970}\left(1 + \frac{15}{38700}\right) = 1,00088.$$
$$\text{à } -15^0,\quad \frac{13023,5}{12970}\left(1 - \frac{15}{38700}\right) = 1,0037.$$

XXXIX. *Un tube bien calibré est divisé en parties d'égales longueurs et soudé à un réservoir. On y introduit une première fois* $137^{gr},5$ *de mercure : dans la glace fondante, le mercure s'arrête à la 175e division du tube; dans l'étuve à vapeur d'eau bouillante sous la pression normale, le mercure s'arrête à la 310e division. — On y introduit une nouvelle quantité de mercure, en tout* $139^{gr},6$ *: dans la glace fondante, le mercure s'arrête à la 346e division.*

On vide l'appareil et on le remplit d'un liquide qui affleure à la 180e division dans la glace fondante, à la 326e division dans un bain à 20°.

On demande : 1° la dilatation apparente du mercure entre 0° et 100°, et le coefficient moyen de dilatation; 2° la dilatation de l'enveloppe entre 0° et 100°, et le coefficient moyen de dilatation; 3° la dilatation du liquide entre 0° et 20°, et le coefficient moyen de dilatation.

On trouve :

1° 0,0121 ; 0,000 121
2° 0,0059 ; 0,000 059
3° 0,0190 ; 0,000 950

XL. *On a un thermomètre centigrade à mercure, dont la tige est divisée en degrés. Le coefficient de dilatation apparente est* $\frac{1}{6480}$. *On y remplace le mercure par de* *l'eau. Le thermomètre à eau, ainsi formé, marque 20 degrés dans la glace fondante et 85 degrés quand on le plonge dans un bain à 45°. On demande quelle est la dilatation de l'eau de 0° à 45°.*

On trouve 0,01117.

XLI. *Un thermomètre à poids contient 3 kilogrammes de mercure à 0°. On le chauffe; il sort 50 grammes de mercure. A quelle température* t *l'a-t-on chauffé? Coefficient de dilatation cubique du verre* $\frac{1}{38700}$; *coefficient de dilatation absolu du mercure* $\frac{1}{5550}$.

On trouve $t = 110°$.

XLII. *Une sphère de platine, pesée dans le mercure, a perdu de son poids 50 grammes à zéro, et* $49^{gr},5415$ *à 60°. On demande de trouver, d'après ces données, le coefficient de dilatation cubique du platine, sachant que la densité du mercure à zéro est 13,6 et que le coefficient de dilatation absolue de ce liquide est* $\frac{1}{5550}$.

Solution. — Désignons par V le volume de la sphère de platine à zéro, et par x le coefficient de dilatation cubique du métal; le poids du mercure à zéro que cette sphère déplace étant 50 grammes, on a

$$V \times 13{,}6 = 50.$$

A 60°, le volume de la sphère est devenu $V(1+60x)$; d'autre part, la densité du mercure est devenue

$$\frac{13{,}6}{1+60\times\frac{1}{5550}}, \quad \text{ou} \quad \frac{13{,}6\times 185}{187};$$

et comme la perte de poids est maintenant de $49^{gr},5415$, il vient

$$V(1+60x)\,\frac{13{,}6\times 185}{187} = 49{,}5415.$$

En remplaçant, dans cette équation, $V\times 13{,}6$ par 50, et tirant la valeur de x, on aura

$$x = \frac{49{,}5415\times 187 - 50\times 185}{50\times 185\times 60} = \frac{14{,}2605}{555000} = 0{,}00002569.$$

XLIII. *Trouver quel rapport on doit établir entre la hauteur du mercure et la longueur de la tige, dans le pendule de Graham (fig. 179), pour que la compensation ait lieu. — On considérera le poids de la tige et celui du cylindre de verre comme négligeables par rapport au poids du mercure.*

Solution. — Représentons par L_0 la longueur à zéro de la tige du pendule, augmentée de la hauteur de l'étrier, et par h_0 la hauteur du mercure à zéro qu'il faut introduire dans l'éprouvette, pour que la distance du point de suspension au centre de gravité du liquide soit la même à zéro et à une température déterminée t. L'expression de cette distance, ou la *longueur* du pendule à zéro, est évidemment $L_0 - \frac{h_0}{2}$, en négligeant l'épaisseur du fond de l'éprouvette.

Soient l le coefficient de dilatation linéaire de l'acier, y la hauteur encore inconnue du mercure dans l'éprouvette, à la température de t degrés. La longueur du pendule à cette température sera $L_0(1+lt) - \frac{y}{2}$, pour qu'elle soit égale à la longueur à zéro, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \qquad L_0 - \frac{h_0}{2} = L_0(1+lt) - \frac{y}{2}.$$

Nous allons chercher à exprimer y en fonction de h_0 et des coefficients de dilatation du verre et du mercure. Soit r le rayon de la section intérieure de l'éprouvette à zéro; $\pi r^2 h_0$ est le volume du mercure à cette température; il devient $\pi r^2 h_0(1+mt)$ à t degrés, m étant le coefficient de dilatation absolue du mercure. — Soit δ le coefficient de dilatation linéaire du verre; en passant de zéro à t degrés, le rayon r devient $r(1+\delta t)$, et la section πr^2 devient $\pi r^2(1+\delta t)^2$ ou sensiblement $\pi r^2(1+2\delta t)$. Mais, à cette température, la hauteur du mercure est y; le volume du liquide est donc $\pi r^2(1+2\delta t)y$. — En égalant les deux expressions du volume du mercure à t degrés, on obtient une équation qui détermine y,

$$\pi r^2 h_0(1+mt) = \pi r^2(1+2\delta t)y;$$

en substituant la valeur de y dans l'équation (1), on a :

$$L_0 - \frac{h_0}{L_0} = L_0(1+lt) - \frac{h_0}{2}\,\frac{1+mt}{1+2\delta t}.$$

Si l'on fait toutes les réductions, et si l'on néglige tous les termes qui renferment le produit des deux coefficients de dilatation, on arrive à la relation bien plus simple

$$\frac{h_0}{L_0} = \frac{2l}{m-2\delta}.$$

Ce résultat est indépendant de la température particulière t, pour laquelle nous avons mis le problème en équation. Donc la compensation aura lieu *pour toute température*, pourvu que, à zéro, le rapport entre la hauteur du mercure et la longueur de la tige, augmentée de celle de l'étrier, soit égal à la fraction $\frac{2l}{m-2\delta}$, fraction dont la valeur est environ $\frac{1}{6}$.

XLIV. *Un récipient, de volume invariable, renferme à la température de 0°, 10 kilogrammes de gaz comprimé. — On fait sortir du récipient 3 kilogrammes de gaz, et l'on chauffe pour rétablir dans l'appareil la même pression qu'au début. A quelle température faut-il chauffer? — Le coefficient de dilatation du gaz est* $\alpha = \frac{1}{273}$.

On trouve $\frac{3}{7}\times 273 = 117°$.

XLV. *Quel doit être le rayon d'un ballon sphérique, formé d'un taffetas qui pèse 250 grammes le mètre carré, pour que, plein d'hydrogène sec à 20 degrés et à la pression de 750 millimètres, il ait une force ascensionnelle nulle, lorsqu'il se trouve dans l'air sec à la même température et à la même pression? — Poids du litre d'air sec à zéro et sous la pression de 760 millimètres,* $1^{gr},293$; *densité de l'hydrogène par rapport à l'air, 0,0693.*

Solution. — Désignons par r le rayon du ballon, exprimé en mètres : la surface de l'enveloppe étant $4\pi r^2$, le poids de l'enveloppe en grammes sera $250\times 4\pi r^2$. Le poids de l'hydrogène, en grammes, dans les conditions données par l'énoncé, sera, en remarquant que, dans les circonstances normales, un mètre cube d'air pèse 1293 grammes,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times 1293 \times 0{,}0693 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1+0{,}00367\times 20}.$$

Enfin le poids de l'air déplacé sera, en grammes,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times 1293 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1+0{,}00367\times 20}.$$

Si maintenant on exprime que la somme des poids de l'enveloppe et de l'hydrogène, diminuée du poids de l'air déplacé, est nulle, on obtient une équation, d'où l'on tirera $x = 0^m,678$.

XLVI. *On a, dans deux éprouvettes, d'une part, 4 centimètres cubes d'un gaz à 7 degrés sous la pression de 56 centimètres de mercure; d'autre part, 6 centimètres* *cubes d'un autre gaz à 17 degrés sous la pression de 58 centimètres. On introduit ces deux gaz dans une troisième éprouvette, où le mélange prend une température de 15 degrés. On demande à quelle hauteur* x *le mercure s'élèvera dans cette éprouvette, dont la section est de 1 centimètre carré, et dont la hauteur au-dessus du mercure est de 21 centimètres. — Le baromètre marque 76 centimètres; le coefficient de dilatation des gaz est* $\frac{1}{273}$. *— On négligera les dilatations du mercure et du verre.*

Solution. — La hauteur x est exprimée par la plus petite des deux racines de l'équation

$$(21-x)(76-x)-576=0.$$

La plus grande des deux racines, étant supérieure à 76, n'est pas acceptable. — On trouve $x=12$ centimètres.

XLVII. *Après avoir laissé échapper une partie de l'air sec qui était comprimé dans un récipient, on ferme le robinet et l'on observe, au même instant, la hauteur* h *d'un manomètre à air libre qui communique avec le récipient. Lorsque l'air qui reste dans le récipient est revenu à la température ambiante* T, *on note la hauteur* H *du manomètre. Quelle était la température* t *de l'air intérieur au moment où il a été refroidi par sa raréfaction? La hauteur du baromètre est 76 cent. — On négligera la section du tube manométrique.*

La température t est déterminée par l'équation $\frac{76+h}{273+t}=\frac{76+\mathrm{H}}{273+\mathrm{T}}$.

XLVIII. *Dans une cloche graduée en centimètres cubes, à 0 degré, pleine de mercure, et placée sur une cuvette à mercure, on a introduit* $0^{gr},75$ *d'éther : la température de la cloche étant portée à 80 degrés, on constate que tout le liquide s'est réduit en vapeur et que le volume occupé par cette vapeur est* $366^{cc},48$*; le mercure s'élève à une hauteur de* $152^{mm},16$*; la pression barométrique, ramenée à 0 degré, est* 750^{mm}. *Quelle est, à cette température, la densité de la vapeur d'éther par rapport à l'air? — Le coefficient de dilatation du mercure est* $\frac{1}{5550}$*; le coefficient de dilatation cubique du verre est* 0,0000276 (*).

Solution. — La pression barométrique étant ramenée à 0°, ramenons de même à 0° la colonne de mercure qui s'élève dans la cloche, et dont la température est 80 degrés : la valeur de cette colonne deviendra

$$152^{mm},16\times\frac{1}{1+\frac{80}{5550}}=150^{mm}.$$

Donc la force élastique de la vapeur d'éther, évaluée par la hauteur d'une colonne de mercure qui serait à 0 degré, est $750^{mm}-150^{mm}=600$ millimètres. — Le volume de cette vapeur qui occupe, à 80 degrés, un nombre de divisions égal à 366,48, est, en centimètres cubes, $366,48\,(1+0,0000276\times 80)$; le poids du même volume d'air, dans les mêmes conditions de température et de pression, est

$$366,48\,(1+0,0000276\times 80)\times 0,0013\times\frac{600}{760}\times\frac{1}{1+0,00367\times 80}.$$

La densité de la vapeur par rapport à l'air est donc

$$\frac{0,75}{366,48\,(1+0,0000276\times 80)\times 0,0013}\times\frac{760}{600}\times(1+0,00367\times 80)=2,573.$$

(*) Cette méthode de détermination de la densité d'une vapeur, est connue sous le nom de méthode de Gay-Lussac.

XLIX. *Un récipient est rempli d'oxygène liquide à la température de — 130°. On élève la température à + 500°. Calculer la pression à l'intérieur du récipient, en supposant que la loi de Mariotte soit applicable. — On négligera la dilatation du récipient. — La densité de l'oxygène gazeux par rapport à l'air est* 1,10*; la densité absolue de l'oxygène liquide à — 130° est* 1,05.

On trouve 2081 atmosphères.

L. *Un espace de 1 mètre cube de capacité, entretenu à la température de 20 degrés, renferme de l'air humide dont l'état hygrométrique est* $\frac{3}{4}$. *La température venant à s'abaisser jusqu'à zéro, on demande de trouver le poids de la vapeur qui devra se liquéfier. — On prendra pour poids du mètre cube d'air, dans les conditions normales de température et de pression,* $1^{kil},293$*; pour densité de la vapeur,* 0,622*; on sait, d'ailleurs, que la tension maximum de la vapeur est, à 20 degrés, de* $17^{mm},391$*; à zéro, de* $4^{mm},6$.

Solution. — Le poids de la vapeur qui devra se liquéfier s'obtiendra en retranchant, du poids de la vapeur contenue à 20 degrés dans l'espace donné, le poids de la vapeur que ce même espace contient à zéro quand il est saturé. — On trouve $7^{gr},991$.

LI. *Une masse d'air qui occupe 50 mètres cubes, à la température de 5 degrés, et dont la fraction de saturation est* 0,572, *se mélange à une autre masse d'air dont le volume est 75 mètres cubes, la température 15 degrés, et la fraction de saturation* 0,480*; le volume du mélange est 125 mètres cubes, et sa température est 11 degrés. Quelle sera la fraction de saturation du mélange? — Les valeurs de la force élastique maximum de la vapeur d'eau à 5 degrés, 15 degrés, 11 degrés, sont respectivement* $6^{mm},53$; $12^{mm},70$; $9^{mm},79$.

Solution. — Dans la première masse d'air, avant le mélange, la force élastique de la vapeur d'eau est, d'après les conditions de l'énoncé, $6,53\times 0,572$. Donc, lorsque le mélange sera effectué, c'est-à-dire lorsque cette vapeur se sera échauffée de 5 degrés à 11 degrés, et qu'elle aura acquis, au lieu du volume de 50 mètres cubes, un volume de 125 mètres cubes, sa force élastique sera

$$6,53\times 0,572\left[1+0,00367\,(11-5)\right]\frac{50}{125}=1^{mm},527.$$

De même, la force élastique de la vapeur contenue dans la seconde masse d'air deviendra, lorsque le mélange sera effectué,

$$12,7\times 0,48\left[1-0,00367\,(15-11)\right]\frac{75}{125}=3^{mm},604.$$

En faisant la somme de ces deux forces élastiques, on obtient la force élastique totale de la vapeur d'eau dans le mélange, savoir : $5^{mm},131$. Puisque la force élastique maximum à cette température est $9^{mm},79$, la fraction de saturation est

$$\frac{5,131}{9,79}=0,524.$$

LII. *Quelle est la masse de la quantité de mercure, qui, dans l'air, pèse* $375^{gr},185$ *? — La densité du mercure est* 13.596*; la densité du laiton des poids marqués est* 8,5*; le coefficient de dilatation cubique du laiton est* 0,000051*; le coefficient de dilatation absolue du mercure est* 0,000180. *La hauteur barométrique est 764 millimètres; la température est 10 degrés; la tension maximum correspondante est* $9^{mm},17$*; enfin l'état hygrométrique actuel est* 0,8.

On trouve (156) $$=375,185\,\frac{1-\frac{a}{\Delta}}{1-\frac{a}{\mathrm{D}}}$$

a, D, et Δ représentent la masse d'un centimètre cube d'air, de mercure, et de la substance des poids marqués, dans les circonstances actuelles.

$$a = \frac{0,001293}{1+\frac{10}{273}} \; \frac{764 - \frac{3}{8} \times 0,8 \times 9,17}{760} \qquad \Delta = \frac{8,5}{1,00051} \qquad D = \frac{13,596}{1,0018}$$

LIII. *La terre étant couverte d'une couche de neige à zéro, de 2 centimètres d'épaisseur, quelle est l'épaisseur de la couche de pluie tombant à 12°,5 qui serait nécessaire pour en déterminer la fusion? — Densité de la neige par rapport à l'eau de pluie,* 0,78; *chaleur de fusion de la neige,* 79,25.

On trouve $9^{cm},89$.

LIV. *On verse* 600 *grammes d'un liquide dont la température est* 85 *degrés, dans une masse d'eau pesant* 3 *kilogrammes, et dont la température est* 8 *degrés; cette eau est contenue dans un calorimètre en laiton, du poids de* 300 *grammes. On trouve que la température finale du mélange est* 15 *degrés. — On sait d'ailleurs, par des expériences préliminaires, qu'il s'est perdu* 3 *calories par rayonnement ou par conductibilité, pendant la durée de l'expérience; la chaleur spécifique du laiton est* 0,1. *— On demande de calculer la chaleur spécifique du liquide?*

Solution. — En se refroidissant de 85 à 15 degrés, le liquide soumis à l'expérience a abandonné $600 \times c \times 70$ calories, en désignant par c la chaleur spécifique cherchée. La capacité calorifique de l'enveloppe du calorimètre est $300 \times 0,1 = 30$, et la capacité calorifique du calorimètre tout entier est 3030; en s'échauffant de 8 à 15 degrés, le calorimètre a donc absorbé $3030 \times 7 = 21210$ calories. — La quantité de chaleur abandonnée par le liquide est égale à la somme de la quantité de chaleur absorbée par le calorimètre et de la quantité de chaleur perdue par rayonnement ou conductibilité; on a donc :

$$600 \times c \times 70 = 21210 + 3,$$

d'où l'on tire

$$c = 0,505.$$

LV. *Dans un vase plat, large et horizontal, on répand* 500 *grammes d'eau à* 100 *degrés. Il s'en dégage* 30 *grammes par évaporation subite : que devient la température de cette eau? — La chaleur de vaporisation de l'eau est de* 537 *calories.*

Solution. — En se vaporisant, les 30 grammes d'eau ont absorbé $30 \times 537 = 16110$ calories, et cette quantité de chaleur a été cédée par les 470 grammes d'eau qui sont demeurés à l'état liquide; ils se sont ainsi refroidis de $\frac{16110}{470} = 34°,3$. La température devient donc $100 - 34,3 = 65°,7$.

LVI. *Sur une plaque de liège, enduite de noir de fumée et disposée sur la platine d'une machine pneumatique, au-dessus d'une cuvette contenant de l'acide sulfurique* (*fig.* 200), *on a placé une masse d'eau pesant* 10 *grammes, à la température de* 15 *degrés; on a recouvert d'une cloche de verre, et l'on a fait le vide. Au bout d'un certain temps, il reste sur la plaque un résidu de glace à* 0 *degré. Quelle est la masse de cette glace? — La chaleur de vaporisation de l'eau, à basse température, est* 600 *calories, la chaleur de fusion de la glace est* 80 *calories. On négligera les pertes de chaleur par rayonnement ou par conductibilité.*

Solution. — Soit x la masse de glace obtenue; l'évaporation de $(10 - x)$ grammes d'eau a absorbé $(10 - x)$ 600 calories. D'autre part, le refroidissement de 15 à 0 degré et la solidification de l'eau ont dégagé, pour chaque grammes d'eau, $15 + 80 = 95$ calories; le refroidissement et la solidification de x grammes d'eau correspondent donc à un dégagement de $x \times 95$ calories. On a donc

$$x \times 95 = (10 - x)\,600 \qquad \text{d'où} \qquad x = 8^{gr},633.$$

LVII. *Étant donnée une couche de neige à zéro, de* 1 *centimètre d'épaisseur, combien devra-t-elle recevoir de chaleur du soleil, par mètre carré de superficie, pour se répandre dans l'air sous forme de vapeur saturante à* 10 *degrés? — Densité de la neige,* 0,78; *chaleur de vaporisation à* 10 *degrés,* 600; *chaleur de fusion,* 80 *calories.*

On trouve $(80 + 10 + 600)\,7,8 = 5382$ grandes calories.

LVIII. *Quelle quantité de chaleur, au maximum, pourra céder* 1 *mètre cube d'air, chauffé sous la pression atmosphérique, à telle température que l'on voudra? — Chaleur spécifique de l'air à pression constante,* 0,24.

Solution. — Un mètre cube d'air, pris à une température T, pèse

$$\frac{1^k,3}{1+\frac{T}{273}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{273 \times 1,3}{273 + T}.$$

Quand cette masse d'air se refroidit à pression constante jusqu'à une température t, elle cède

$$\frac{273 \times 1,3}{273 + T} \times 0,24\,(T - t) \text{ grandes calories.}$$

Quelque élevée que soit la température T, le quotient $\frac{T - t}{273 + T}$ est toujours inférieur à l'unité. Il en résulte que la quantité de chaleur que pourra céder cet air ne peut jamais dépasser $273 \times 1,3 \times 0,24$ ou 85 grandes calories.

LIX. *Une bouteille en fer, munie d'un robinet, est remplie d'un gaz liquéfié; on en laisse échapper par ébullition une masse* p^{gr}. *On demande :* 1° *de calculer le volume* V^{cc} *occupé par le gaz sorti, sous la pression* H, *et à la température* $t°$; *connaissant la densité* D *du gaz par rapport à l'air;* 2° *d'exprimer la masse* q^{gr} *de gaz formé, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la bouteille; on désignera par* d *et* d' *les poids spécifiques, par rapport à l'eau, du liquide et du gaz, dans les conditions où ils se trouvent dans le récipient;* 3° *quelle sera la température finale* x *de l'appareil, sa capacité calorifique totale étant celle de* M^{gr} *d'eau, si l'on suppose qu'il n'emprunte pas de chaleur au milieu ambiant; on désignera par* λ *la chaleur de vaporisation du liquide, dans les conditions de l'expérience.*

Application numérique : $p = 65^{gr}$; $M = 125^{gr}$; $H = 76^{cm}$; $t = 15°$; $\lambda = 90$ calories; $d = 1,43$; $d' = 0,0044$; $D = 2,234$.

Solution. — 1° Le volume V est défini par l'équation $V \times \frac{H}{76} \times \frac{0,0013}{1+\alpha t} \times D = p$.
On trouve V = 23 litres 645.

2° La masse de gaz formée à l'intérieur, occupe un volume $\frac{p}{d}$; et comme la densité absolue d' de ce gaz est donnée, cette masse est égale à $\frac{p}{d}\,d'$. On a donc

$$q = p\left(1 + \frac{d'}{d}\right).$$

On trouve

$$q = 65^{gr},121.$$

3° La quantité de chaleur qui a été cédée par l'appareil, $M\,(t - x)$, est égale à la quantité de chaleur qui a été absorbée par la masse transformée en vapeur :

$$M\,(t - x) = q\lambda.$$
$$x = -31°,88.$$

LX. *Un récipient clos, dont la capacité calorifique est égale à celle de* p^{gr} *d'eau, contient* P^{gr} *de ce liquide. Quelle quantité de chaleur doit-on lui fournir pour le porter de* t *à* T? *Le volume compris entre la surface libre de l'eau et la paroi supérieure du récipient est de* V^{cc}; *on le suppose invariable. — On sait que la chaleur totale de* *vaporisation de l'eau est donnée par la formule* $Q = 606{,}5 + 0{,}305\, t$. *On donne* f *et* F, *les valeurs de la tension maximum à* t^0 *et* T^0. — *La densité* d *de la vapeur d'eau est supposée constante.*

Application numérique. $t = 60^0$ $f = \frac{1}{5}$ *d'atmosphère,* $T = 120$ $F = 2$ *atmosphères,* $p = 20^{gr}$, $P = 10^{gr}$. $d = \frac{5}{8}$. $\alpha = \frac{1}{273}$. *Le volume* V *est tel qu'il peut contenir* 2^{gr} *d'air à* 0^0 *sous la pression* 76.

Solution. — Soit m^{gr} la masse d'eau vaporisée à t^0. On a

$$m = V\frac{f}{76}\times\frac{0{,}001293}{1+\frac{t}{273}}\times\frac{5}{8} = 2^{gr}\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{8}\,\frac{1}{1+\frac{60}{273}} \quad \text{ou} \quad 0^{gr},205.$$

La masse d'eau liquide est donc $P - m$, ou $9^{gr},795$. On évaluerait de même la masse M^{gr} de vapeur à T^0

$$M = V\frac{F}{76}\,\frac{0{,}001293}{1+\frac{T}{273}}\times\frac{5}{8} = 2^{gr},2\times\frac{5}{8}\,\frac{1}{1+\frac{120}{273}} \quad \text{ou} \quad 1^{gr},737\,;$$

la masse d'eau liquide est donc $P - M = 8^{gr},263$.

La quantité de chaleur nécessaire pour passer de t à T est évidemment égale à l'excès de la quantité de chaleur nécessaire pour passer de 0^0 à T^0, sur la quantité de chaleur qu'il faudrait fournir au système pour l'amener de 0^0 à t^0.

On a donc

$$Q^c = pT + (P - M)\,T + M\,(606{,}5 + 0{,}305\,T)$$
$$-pt - (P - m)\,t - m\,(606{,}5 + 0{,}305\,t).$$

D'où

$$Q^c = (P + p)(T - t) + (M - m)\,606{,}5 - (MT - mt)\,0{,}695.$$

On trouve

$$Q = 2577^c,66 \text{ petites calories.}$$

PROBLÈMES SUR L'ACOUSTIQUE

LXI. *Les plateaux d'une sirène portent chacun 25 trous; le plateau supérieur fait 2349 tours en deux minutes. Quelle est la note donnée par la sirène, sachant que le* la_3 *correspond à 435 vibrations doubles par seconde? — Quelle est la longueur du tuyau ouvert, dont le son fondamental est à l'unisson avec celui de la sirène?*

Solution. — Le nombre des vibrations effectuées par la sirène en une seconde est

$$\frac{2349\times 25}{120} \quad \text{ou} \quad 489{,}375.$$

L'intervalle de cette note au *la* normal est mesuré par la fraction $\frac{489{,}375}{335} = 1{,}125$, ou, en fraction ordinaire, $\frac{9}{8}$. La note est donc *un ton* au-dessus du la_3; c'est un si_3.

La longueur d'onde correspondante à cette note (416) est $\lambda = \frac{340}{489{,}375}$. Mais, quand un tuyau ouvert donne le son fondamental, la longueur de l'onde sonore est le double de la longueur du tuyau (438). La longueur du tuyau, dont le son fondamental est le si_3, est donc $\frac{340}{2\times 489{,}375} = 0^m{,}347$.

LXII. *La densité du platine étant prise égale à 22 et celle du fer à 7,8, on demande quel rapport il doit y avoir entre les longueurs de deux cordes, l'une en platine, l'autre en fer, et toutes les deux de même section, pour qu'elles soient à l'unisson quand on les tend également.*

Solution. — On doit avoir

$$\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{7{,}8}{22}} \quad \text{ou} \quad 0{,}5954.$$

LXIII. *Une corde tendue par un poids* P *est à l'unisson d'un tuyau ouvert donnant le son fondamental. — 1° Quel doit être le poids tenseur* P', *pour que le son de la corde soit à l'octave aiguë du son fondamental du tuyau? — 2° Quel doit être le poids tenseur* P'' *pour que le son de la corde soit à la quinte de l'octave aiguë du son fondamental du tuyau? — 3° Pourrait-on faire rendre au tuyau les trois sons que donne la corde, tendue successivement par les poids* P, P' *et* P''?

Solution. — Soient n, n' et n'' les nombres de vibrations effectuées en une seconde par la corde tendue successivement par les poids P, P' et P''. D'après les lois des vibrations des cordes, on a :

$$\frac{n}{\sqrt{P}} = \frac{n'}{\sqrt{P'}} = \frac{n''}{\sqrt{P''}}.$$

n, n' et n'' sont entre eux comme 1, 2 et 3; par conséquent les poids tenseurs P, P' et P'' doivent être entre eux comme 1, 4 et 9. — La corde rend successivement le son fondamental et les deux premiers harmoniques du tuyau ouvert (438).

PROBLÈMES SUR L'OPTIQUE

LXIV. *Deux sources lumineuses* S *et* S', *dont les intensités propres sont* I *et* I', *ont été placées à une distance* d *l'une de l'autre. En quel point faut-il placer un écran, en ligne droite avec les deux sources, pour qu'il reçoive autant de lumière de l'une que de l'autre? — Application :* $I' = 4I$, $d = 3$ *mètres.*

Solution. — Représentons par x la distance de l'écran à la source S, que nous supposons de plus faible intensité que S'. Si l'écran est placé entre les deux sources, on doit avoir

$$x = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{I'}{I}}} = \frac{3}{1+\sqrt{4}} = 1 \text{ mètre.}$$

Mais l'écran peut aussi être placé en dehors de l'intervalle des deux sources, du côté de la source la moins intense. La distance x est alors

$$x = \frac{d}{\sqrt{\frac{I'}{I}}-1} = \frac{3}{\sqrt{4}-1} = 3 \text{ mètres.}$$

LXV. *Deux miroirs plans* AB *et* CD (*fig.* 691), *inclinés l'un sur l'autre, ont leurs faces réfléchissantes en regard; un rayon lumineux* SI *se réfléchit d'abord sur* AB, *suivant* IH; *puis sur* CD, *suivant* HR. *Démontrer que l'angle* δ, *formé par la direction du rayon incident avec celle du rayon deux fois réfléchi, est toujours double de l'angle* α *des deux miroirs.*

Solution. — Les triangles IOR et HOM ont leurs angles en O égaux comme opposés par le sommet; donc :

$$OIR + \delta = OHM + \alpha.$$

Mais OHM est égal à IHC, à cause de la réflexion sur le miroir CD; IHC est égal à la somme des angles intérieurs α et HIM; enfin ce dernier angle, à cause de la réflexion sur le miroir AB, est égal à SIA, qui lui-même est égal à OIR. On voit donc que

$$OHM = \alpha + OIR\,;$$

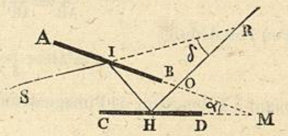

Fig. 691.

en ajoutant membre à membre ces deux égalités, et supprimant les parties communes, il vient enfin

$$\delta = 2\alpha.$$

LXVI. *Devant un miroir sphérique concave, de 2 mètres de rayon, on place une flèche lumineuse de 1 décimètre de longueur, perpendiculairement à l'axe principal et à 5 mètres du miroir. Où se forme l'image. et quelle en est la grandeur?*

On met ensuite un petit miroir plan au foyer principal du miroir sphérique, incliné de 45 degrés sur l'axe principal, et la face réfléchissante tournée vers ce miroir. Quelle image formeront les rayons réfléchis par le grand miroir sphérique, en tombant sur le petit miroir plan? Quelles en seront la grandeur et la situation? Où placer un écran pour la recevoir, ou bien une loupe pour l'observer et pour l'agrandir?

Solution. — En appliquant la formule générale (1) qui a été donnée (490), on trouve que l'image se forme à 1^m,25 du miroir, ou à 0^m,25 du foyer principal. D'autre part, la grandeur de l'image s'obtiendra à l'aide de la proportion (495)

$$\frac{i}{0,1} = \frac{1,25}{5}.$$

La grandeur de l'image est donc de

$$0^m,025.$$

Plaçons maintenant le petit miroir plan au foyer F. L'image, au lieu de se former dans une position perpendiculaire à l'axe principal du miroir sphérique, à 0^m,25 au delà du foyer, sera renvoyée, par le miroir plan, dans une position symétrique de la première par rapport à ce miroir. Au point F, menons la perpendiculaire à l'axe du miroir sphérique; l'image se trouvera à 0^m,25 du point F, sur cette perpendiculaire : elle sera parallèle à l'axe, et sa grandeur sera toujours 0^m,025.

Pour la recevoir sur un écran, il suffira de placer cet écran à l'endroit où cette image est renvoyée par le miroir plan, c'est-à-dire parallèlement à l'axe du miroir sphérique, à 0^m,25 du foyer F.

Pour la grossir avec une loupe, il faudra disposer cette loupe de façon que l'image soit placée entre la lentille et son foyer principal; cette dernière opération est facile, dès que l'on a déterminé la position de l'image renvoyée par le miroir plan.

LXVII. *Deux miroirs concaves* MN *et* M'N' (*fig.* 692), *dont les rayons sont respectivement de* 1 *mètre et de* 1^m,50, *sont disposés en regard l'un de l'autre, de manière que leurs axes coïncident. La distance* OO' *est de* 3 *mètres. En quel point de l'axe commun devra-t-on placer un objet lumineux, pour que les images réelles de cet objet données par les deux miroirs soient égales?*

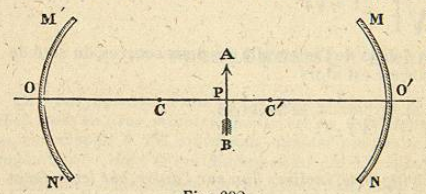

Fig. 692.

Solution. — Il est facile de voir que l'égalité des deux images réelles ne peut être obtenue, dans les conditions du problème, que si l'objet est placé dans l'intervalle des deux centres C et C'. La longueur de l'image donnée par le miroir O, à une distance p_1 du point O, est alors déterminée par les deux équations (495).

$$\frac{i}{AB} = \frac{p_1}{OP}, \qquad \frac{1}{OP} + \frac{1}{p_1} = \frac{2}{CO},$$

d'où l'on déduit

$$i = AB \times \frac{OC}{2 \times OP - OC} = AB\,\frac{OC}{OP + CP}.$$

Quant à la longueur de l'image donnée par le miroir O', on trouverait de même

$$AB\,\frac{C'O'}{PO' + PC'}.$$

Pour que les deux images soient égales, il suffit qu'on ait

$$\frac{OC}{OP + CP} = \frac{C'O'}{PO' + PC'}.$$

En ajoutant ces deux rapports terme à terme, et égalant le résultat au premier rapport, il vient

$$\frac{OC}{OP + CP} = \frac{OC + C'O'}{OO' + CC'};$$

si l'on substitue dans cette égalité les longueurs des différentes lignes qui y entrent, et si l'on remarque que CP est égal à OP — OC, on a

$$\frac{1}{2OP - 1} = \frac{2,5}{3,5} = \frac{5}{7};$$

d'où l'on déduit facilement

$$OP = 1^m,2.$$

LXVIII. *Un prisme* BAC (*fig.* 693), *dont l'angle réfringent* A *est connu, est rencontré perpendiculairement à l'une de ses faces par un rayon lumineux* RI *qui se réfracte en* H *suivant* HS. *On mesure la déviation* δ *que le rayon subit par cette réfraction. Déduire, de la connaissance des angles* A *et* δ, *la valeur de l'indice de réfraction de la substance du prisme.*

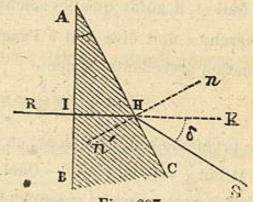

Fig. 693.

Solution. — Soit nn' la normale au point H; on a :

$$\frac{\sin SHn}{\sin RHn'} = n,$$

Or les angles RHn' et RHn étant égaux à A, il vient

$$n = \frac{\sin (A + \delta)}{\sin A}.$$

LXIX. *Un cube de verre, d'indice* n, *repose sur une planchette horizontale noircie. On a déposé sur la face inférieure une goutte de suif, d'indice inconnu* x *on la regarde par la face opposée à celle qui est tournée vers la lumière. En faisant varier la direction du rayon visuel, de manière que l'angle qu'elle fait avec la verticale augmente progressivement, on voit tout à coup la goutte de suif devenir lumineuse. On mesure l'angle* α *que fait alors le rayon visuel avec la verticale. Trouver* x. — *Application numérique,* n = 1,55, α = 65°.

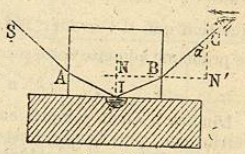

Fig. 694.

Solution. — Pour cette valeur de l'angle α, le rayon AI (*fig.* 694) subit la réflexion totale au point I; à l'angle d'incidence AIN, dans le verre, correspond, dans le suif, un angle de réfraction égal à 90°; on a donc

$$n.\ \sin NIB = x.$$

D'autre part,

$$n.\ \sin NBI = \sin CBN'; \quad \text{ou} \quad \cos NIB = \frac{\cos \alpha}{n}.$$

On en déduit

$$x^2 = n^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{n^2}\right) = n^2 - \cos^2 \alpha.$$

Dans l'application numérique de l'énoncé, on trouve $x = 1,491$.

LXX. *Un tube cylindrique, dont l'axe est vertical, est rempli d'une substance réfringente : un rayon lumineux horizontal pénètre dans ce cylindre sous une incidence* i, *se réfléchit partiellement en* H, *et revient dans l'air suivant* KR (*fig.* 695). *Quelle doit être la valeur de l'angle d'incidence* i *pour que le rayon émergent soit parallèle au rayon incident?*

Solution. — Supposons qu'un faisceau de rayons homogènes tombe dans la direction SI, perpendiculaire à l'axe du cylindre; il est facile de voir que les réfractions et la réflexion successives ne feront pas sortir le rayon lumineux SIHKR du plan de la figure, qui est perpendiculaire à l'axe du cylindre. — Les quatre angles OIH, IHO, OHK et HKO, ont une valeur commune r, et si l'on désigne par i l'angle d'incidence SIN, par n l'indice de réfraction de la substance du cylindre, on a

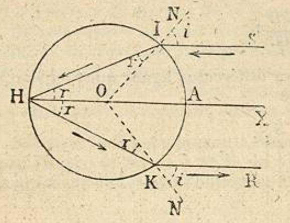

Fig. 695.

$$\sin i = n \sin r.$$

L'égalité des angles d'incidence et d'émergence est une conséquence de l'égalité des angles HIO et HKO; la figure est donc toujours symétrique par rapport à la droite HX. Pour que les droites SI et KR soient parallèles entre elles, il faut et il suffit qu'elles soient parallèles à HX; c'est-à-dire que l'angle d'incidence cherché i doit être égal à l'angle IOX dont la valeur est $2r$; on a donc $r = \frac{i}{2}$, et la relation précédente devient

$$2 \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2} = n \sin \frac{i}{2}. \qquad \sin \frac{i}{2} \left(\cos \frac{i}{2} - \frac{n}{2}\right) = 0.$$

Le problème comporte donc, en général, deux solutions :

1° $\operatorname{Sin} \frac{i}{2} = 0$, ou $i = 0$. — Quel que soit l'indice du cylindre réfringent, le rayon XA, dont le prolongement passe par l'axe du cylindre, revient toujours sur lui-même, après avoir subi la réflexion au point H. Cette solution particulière ne fait jamais défaut.

2° $\operatorname{Cos} \frac{i}{2} = \frac{n}{2}$. — D'une part, pour que la valeur de i soit réelle, on doit avoir $n < 2$. D'autre part, cette condition étant satisfaite, la valeur réelle de i ne convient à la question que si l'on a $i < 90^0$, et par suite $\frac{i}{2} < 45^0$, ou enfin $\operatorname{Cos} \frac{i}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour que le problème admette cette seconde solution, il faut donc qu'on ait

$$n > \sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad n > 1{,}42.$$

L'indice n étant compris entre ces deux limites, 1,42 et 2, plus la substance est réfringente, plus l'angle i est petit; l'angle i décroît de 90 degrés à zéro.

Les conditions du problème peuvent être réalisées avec un cylindre de verre ayant pour indice 1,5. — Il serait impossible de les réaliser, si on opérait avec un tube rempli d'eau, d'indice $1{,}33 < 1{,}42$, ou avec un cylindre taillé dans du diamant d'indice 2,45.

LXXI. *Le trapèze* ACC'A' (fig. 696) *représente la section droite de trois prismes. Les deux extrêmes sont en crown d'indice* n, *et ils ont le même angle* α *en* A *et en* A'. *Le prisme du milieu est isocèle; il est en flint d'indice* p; *l'angle* CBC' $= 2\beta$. *Quelle relation doit-il y avoir entre* α *et* β *pour qu'un rayon* SI, *qui tombe sur le premier prisme parallèlement à* AA', *sorte du dernier sans déviation?*

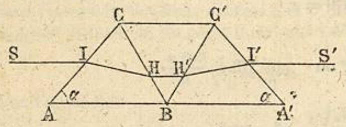

Fig. 696.

Cas particulier. $\alpha = 60^0, \quad n = \frac{5}{2}, \quad p = \frac{7}{4}.$

On trouve

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\left(\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha} - \sin \alpha\right) \cos \alpha}{p - \cos^2\alpha - \sin \alpha \sqrt{n^2 - \cos^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}; \quad \beta = 44^0\,52'\,44''.$$

LXXII. *Une droite lumineuse, de 1 centimètre de longueur, est placée à 2 mètres d'une lentille convergente, perpendiculairement à l'axe principal de cette lentille; la grandeur de l'image est alors égale à celle de l'objet. A quelle distance de la droite lumineuse faudrait-il rapprocher la lentille pour que la nouvelle image eût 10 centimètres de hauteur?*

On trouve $p = 1^m{,}1$.

LXXIII. *Un myope voit distinctement les objets situés à une distance au moins égale à* $0^m{,}20$, *et n'aperçoit pas aisément les objets éloignés. Avec des besicles, il voit distinctement les objets dont la distance est* $0^m{,}60$. *Quelle est la distance focale des verres de ces besicles, et à quelle distance de l'œil se forme l'image des objets placés à l'infini?*

Solution. — Les besicles du myope sont formées de lentilles divergentes, qui donnent d'un objet une image virtuelle rapprochée; soient f la longueur focale de ces lentilles, p la distance de l'objet, p' celle de l'image. On a, en général (536),

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

A l'objet situé à $0^m{,}60$, les besicles substituent une image virtuelle, située à $0^m{,}20$; on a donc

$$\frac{1}{0{,}20} - \frac{1}{0{,}60} = \frac{1}{f}; \qquad \text{d'où} \qquad f = 0^m{,}30.$$

C'est à cette distance de $0^m{,}30$ que se forme l'image virtuelle des objets placés à l'infini.

LXXIV. *Deux lentilles convergentes égales, ayant une distance focale de 1 mètre, sont placées à 1 mètre l'une de l'autre. Quelle position faut-il donner à un objet linéaire, perpendiculaire à l'axe commun des deux lentilles, pour que leur système forme : 1° une image réelle et renversée égale à l'objet; 2° une image réelle deux fois plus grande?*

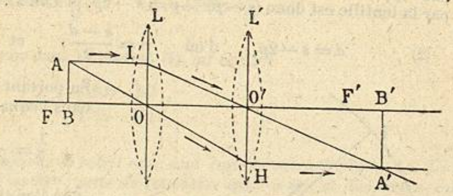

Fig. 697.

Solution. — Soient O et O' les centres optiques des deux lentilles L et L' (*fig.* 697); F et O' les foyers de la première, O et F' les deux foyers de la seconde. Construisons l'image d'un point A. Le rayon AI, mené parallèlement à l'axe principal, se réfracte à travers L suivant IO'; et ne subit aucune déviation en traversant la lentille L'. — Le rayon AOH traverse la première lentille sans déviation, et se réfracte suivant HA', parallèlement à l'axe principal de la seconde lentille. A'B' est donc l'image de AB. — Les deux triangles OAB et OHO' sont semblables, et donnent la relation

$$\frac{HO'}{AB} = \frac{OO'}{OB} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{OO'}{OB}.$$

Si l'on veut que l'image A'B' soit égale à l'objet AB, il faut que l'on ait OB $=$ OO', c'est-à-dire qu'il faut placer l'objet au foyer F.

Si l'on veut que A'B' $=$ 2AB, il faut que OB $= \frac{OO'}{2}$; l'objet sera alors placé à égale distance de la première lentille et de son foyer.

LXXV. *Deux lentilles, l'une convergente et l'autre divergente, dont les distances focales sont respectivement 1 et 2 mètres, sont placées l'une contre l'autre, de manière que leurs axes principaux coïncident. Un objet lumineux, de 10 centimètres de hauteur, est disposé à 4 mètres du système des deux lentilles, perpendiculairement à leur axe commun. Quelles seront la position et la grandeur de l'image?*