

Solution. — A la condition que l'on ait $f < F$, le système des deux lentilles accolées se comporte comme une lentille convergente, dont la longueur focale φ s'obtiendrait par la relation

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} - \frac{1}{F}.$$

D'après les conditions de l'énoncé, $f = 1$ et $F = 2$, on a $\varphi = 2$ mètres. La distance p' de l'image est déterminée par la relation

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \quad \text{d'où } p' = 4 \text{ mètres.}$$

La grandeur de l'image est égale à celle de l'objet.

LXXVI. Un objet éclairé est à une distance s d'un tableau blanc, sur lequel on veut projeter son image. En essayant une lentille, on trouve qu'on peut lui donner deux positions pour lesquelles la projection a lieu, et que la distance de ces deux positions est d ; quelle est la longueur focale de cette lentille?

Solution. — Soit p la distance de la lentille à l'objet, lorsque la projection est effectuée par la lentille dans sa première position; la distance de la lentille à l'écran est alors $s - p$, et on a (529) :

$$(1) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{s-p} = \frac{1}{f}.$$

D'après cette même relation, il est évident que la lentille sera dans la deuxième position, lorsqu'elle sera à la distance $s - p$ de l'objet et à la distance p de l'écran. Pour passer de la première position à la seconde, on aura donc déplacé la lentille, par rapport à l'objet éclairé, de la distance p à la distance $s - p$; le chemin parcouru par la lentille est donc $(s - p) - p = s - 2p$, et l'on a :

$$(2) \quad d = s - 2p, \quad \text{d'où } p = \frac{s-d}{2}, \quad \text{et } s-p = \frac{s+d}{2}.$$

En portant ces valeurs de p et de $s - p$ dans l'équation (1), il vient :

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{s-d} + \frac{2}{s+d} = \frac{4s}{s^2-d^2},$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{s^2-d^2}{4s}.$$

LXXVII. Un rayon lumineux, provenant d'un point fixe P (fig. 698), traverse une glace à faces parallèles G placée près de la source et inclinée à 45 degrés sur la direction du rayon; il se réfléchit sur un miroir plan m qui est situé au centre C d'un miroir concave M ; le rayon suit donc le trajet $PCICHO$, subissant, au retour, la réflexion sur la glace à faces parallèles; on le reçoit sur un écran E situé à une distance $HQ = HP$. On imprime alors au miroir plan un rapide mouvement de rotation autour d'un axe passant par le centre C du miroir concave, et situé dans le plan du miroir m ; on constate que le point Q , où le rayon réfléchi vient rencontrer l'écran, s'est déplacé en Q' . Connaissant le rayon R du miroir concave, la distance $PC = D$, la durée T de la rota-

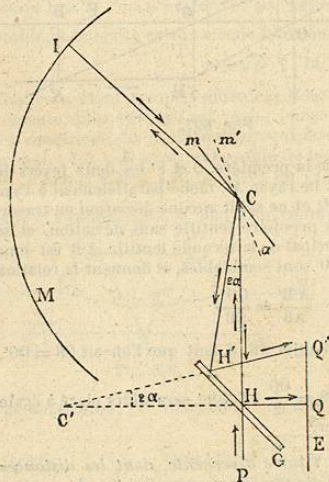


Fig. 698.

tion du miroir et le déplacement $d = QQ'$, calculer la vitesse de la lumière. (Méthode de Foucault.)

Solution. — Quand le rayon lumineux issu de P arrive au point C , le miroir occupe, par exemple, la position m ; quand il a parcouru deux fois le chemin CI , une fois pour aller, une fois pour revenir; le miroir occupe la position m' ; le rayon se réfléchit suivant $CH'Q'$. Soit V la vitesse de la lumière; si l'on désigne par θ le temps qu'a mis le miroir pour se déplacer de m en m' , c'est-à-dire pour tourner de l'angle α , que nous supposons évalué en minutes, on a $\theta = \frac{2R}{V}$. Or, pendant la durée T d'une rotation du miroir, celui-ci a tourné de 560 degrés, c'est-à-dire de 21 600 minutes. On a donc la proportion

$$(1) \quad \frac{\theta}{T} = \frac{\alpha}{21\,600} \quad \text{ou} \quad \frac{2R}{VT} = \frac{\alpha}{21\,600}.$$

Cette équation fera connaître la valeur de V , si l'angle α est connu.

Or on a vu (478) que, si un miroir tourne d'un angle α autour d'un axe situé dans son plan, le rayon réfléchi est dévié d'un angle double; on a donc

$$HCH' = 2\alpha, \quad \text{et par suite } QC'Q' = 2\alpha.$$

Cet angle $QC'Q'$ peut se calculer, puisque, dans le triangle rectangle $QC'Q'$, on connaît la base $QQ' = d$, et la hauteur $C'Q = CP = D$. On a exactement $\tan 2\alpha = \frac{d}{D}$; et en remarquant que le petit angle 2α , évalué en minutes, est sensiblement proportionnel à sa tangente, et que d'autre part $\tan 1' = \frac{1}{5438}$, on a

$$2\alpha = 5438' \times \frac{d}{D}, \quad \alpha = 1719 \times \frac{d}{D}.$$

En remplaçant α par cette valeur dans l'équation (1), on en tire

$$V = \frac{43200}{1719} \cdot \frac{RD}{Td} \quad (r).$$

LXXVIII. Un observateur regarde le soleil avec une lunette astronomique. La distance focale de l'objectif, est $F = 70^m$; celle de l'oculaire est $f = 4^m$, et l'ocillon est à 4^m derrière l'oculaire. — Déterminer : 1° la mise au point; 2° le diamètre de l'image aérienne qui se forme dans le plan focal de l'objectif; 3° le grossissement et le diamètre apparent de l'image vue dans l'instrument.

Le diamètre apparent δ du soleil est de 50 minutes. La tangente de l'angle d'une minute est $\frac{1}{5438}$.

Solution. — 1° L'œil étant placé au point F' (fig. 594), la distance $F'P'$ doit être plus grande que la distance minimum de la vision distincte.

$$2^\circ \quad 2F \cdot \tan \frac{\delta}{2}, \quad \text{ou sensiblement } F \tan \delta = 0^m,61.$$

$$3^\circ \quad \text{Le grossissement } \frac{F}{f} \text{ est } 17,5; \text{ le diamètre apparent de l'image virtuelle est } 8^m43'.$$

(*) Cette méthode de détermination de la vitesse de la lumière, qui permet d'opérer sur une distance de quelques mètres seulement, est celle qui avait été employée par Foucault en 1850. Elle l'avait conduit à assigner à la vitesse de la lumière dans l'air la valeur 298,000 kilomètres, assez peu différente du résultat obtenu par Fizeau (592). Elle offre surtout l'avantage de s'appliquer également à la détermination de la vitesse de la lumière dans l'eau. Il suffit d'interposer sur le trajet CI (fig. 698), un tube plein d'eau; on observe alors que le déplacement QQ' devient les quatre tiers de ce qu'il était primitivement; par suite, la vitesse de propagation dans l'eau n'est que les trois quarts de la vitesse dans l'air. — Ce résultat présente, au point de vue du choix entre la théorie de l'émission et celle des ondulatoires, une importance capitale.

LXXIX. Le rayon de courbure AO (fig. 699) de la face convexe d'un ménisque convergent est égal à r; l'indice du verre est n, et la distance du centre de courbure de la face convexe au centre de courbure de la face concave est OP = $\frac{r}{n}$. A un point lumineux placé au centre de courbure P, correspond une image P'.

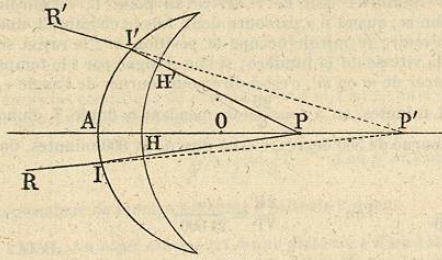


Fig. 699.

1° Démontrer, en ne considérant d'abord que des rayons lumineux PHI, faisant avec l'axe principal un très petit angle, que le produit des distances OP et OP' est égal à r².

2° Démontrer que, pour un rayon incident PH'I', faisant avec l'axe principal un angle quelconque, la direction du rayon émergent I'R' passe par le même point P'.

Solution. — 1° On peut supposer que le rayon PHI se propage dans le verre, supposé indéfini, à droite de la surface convexe AI. Pour des rayons peu inclinés sur l'axe principal, on démontre (525) que la position du point P', conjugué de P, par rapport à la surface sphérique AI, est donnée par la relation

$$\frac{n}{AP} - \frac{1}{AP'} = \frac{n-1}{AO}$$

On en tire

$$AP' = (n+1)r; \quad \text{et par suite} \quad OP' = nr.$$

Il en résulte que le produit

$$OP \times OP' = \frac{r}{n} \times nr = r^2.$$

2° Cette égalité peut s'écrire $\frac{OP}{IO} = \frac{IO}{OP'}$. On en conclut la similitude des deux triangles I'OP et P'OI', que l'on obtiendrait en traçant la droite OI' : ils ont un angle commun O; et les deux côtés OP et IO sont respectivement proportionnels aux deux côtés IO et OP'. Par suite l'angle P'TO = I'PO. — Or dans le triangle IPO, on a $\frac{\sin I'PO}{\sin PTO} = \frac{OI'}{OP} = n$: donc l'angle I'PO, et par suite son égal P'TO n'est autre que l'angle de réfraction correspondant à l'angle d'incidence PTO.

LXXX. Calculer le diamètre apparent sous lequel on voit l'image d'un objet [AB (fig. 700), à travers une loupe L de longueur focale f, le centre optique de l'œil étant

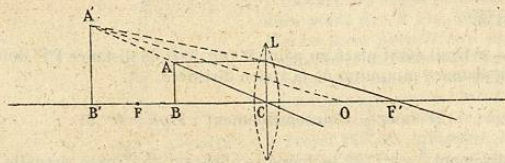


Fig. 700.

placé au point O, à une distance CO = a du centre optique de la lentille, et l'image étant au point à une distance D de l'œil.

Solution. — L'image A'B' est vue sous un angle A'OB', qui a pour mesure $\frac{A'B'}{D}$, ou $\frac{A'B'}{AB} \times \frac{AB}{D}$. Or le rapport de deux dimensions homologues de l'image et de l'objet étant

égal au rapport des valeurs absolues des distances conjuguées B'C et BC, la mesure du diamètre apparent peut s'écrire $\frac{B'C}{BC} \times \frac{AB}{D}$.

Le rapport $\frac{B'C}{BC}$ se déduit de la relation générale $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, dans laquelle on doit faire p = BC, et p' = -B'C (p' est ici négatif, puisque l'image est virtuelle). On a donc

$$\frac{1}{BC} - \frac{1}{B'C} = \frac{1}{f};$$

d'où l'on tire

$$\frac{B'C}{BC} = \frac{B'C}{f} + 1 = \frac{D-a+f}{f}$$

en remarquant que B'C = B'O - CO = D - a. La mesure du diamètre apparent est donc en définitive,

$$AB \left[\frac{1}{f} + \frac{f-a}{fD} \right].$$

L'expression entre parenthèses caractérise la puissance de la loupe, dans les conditions spécifiées par l'énoncé.

Si le centre optique de l'œil est placé entre le point C et le point F', le second terme $\frac{f-a}{fD}$ est positif, et d'autant plus grand que D est plus petit; pour une position déterminée de l'œil, l'observateur a donc intérêt à mettre l'image au point, à la distance minimum de la vision distincte. — Pour un même observateur, l'image étant au point à la distance minimum, la puissance de la loupe augmente quand a diminue; l'observateur a donc intérêt à placer l'œil le plus près possible de la loupe. — Si le centre optique de l'œil coïncide avec le point F', en sorte que l'on ait a = f, la puissance de la loupe, égale à $\frac{1}{f}$, est indépendante de la distance à laquelle se forme l'image (note de la page 457).

PROBLÈMES SUR L'ÉLECTRICITÉ ET LE MAGNÉTISME

LXXXI. Deux sphères métalliques, dont les rayons sont respectivement 1 centimètre et 2 centimètres, ont été électrisées, puis mises en communication par un fil métallique long et fin. Cette communication étant interrompue, et les centres des deux sphères étant à une distance de 10 centimètres, la répulsion mutuelle des deux sphères est de 18 dynes. — Trouver le potentiel et les charges des deux sphères.

Solution. — Le potentiel est égal à 50; les charges des deux sphères sont respectivement 50 et 60.

LXXXII. MESURE EXPÉRIMENTALE DIRECTE DU COUPLE DE TORSION DANS LA BALANCE DE COULOMB, POUR UNE TORSION DE UN DEGRÉ. — Une tige pesante est suspendue à l'extrémité du fil métallique d'une balance de Coulomb, et se tient en équilibre dans la position AB (fig. 701). En deux points M et M' dont la distance au point C est d, on attache deux fils de soie qui passent l'un sur la poulie a, l'autre sur la poulie a'; les directions Ma et M'a' sont horizontales et perpendiculaires à AB; à chacun des fils on suspend une masse de m grammes. Pour maintenir la tige AB dans sa position d'équilibre, on tord le fil dans le sens des aiguilles d'une montre, d'un nombre de degrés N que l'on évalue par le déplacement du repère r sur le cercle gradué t. En déduire le moment du couple de torsion du fil, pour une torsion de un degré.

Solution. — La tige AB est en équilibre sous l'action de deux couples. — D'une part, le couple constitué par deux forces égales à mg, appliquées en M et en M', aux extrémités d'un bras de levier de longueur 2d, tend à faire tourner AB en sens inverse des aiguilles d'une montre. — D'autre part, la torsion de N°, qui a été imprimée au fil, a pour effet de développer, en raison de l'élasticité du fil, un couple qui tend à faire tourner le fil dans le sens des aiguilles d'une montre



Fig. 701.

Les moments de ces deux couples de sens contraires sont égaux. Le moment du couple de torsion, pour une torsion de N° , est donc exprimé en unités C.G.S. par le produit

$$mg \times 2d.$$

En faisant varier les conditions de l'expérience, pour un même fil métallique OC, on trouve que l'angle de torsion N° varie proportionnellement au produit $mg \times 2d$.

Pour une torsion de un degré, le moment du couple de torsion est donc

$$C_t = \frac{2mgd}{N} \quad (*).$$

Application numérique : $d = 1^{\text{cm}},5$ $m = 0^{\text{gr}},5$ $N = 530^\circ$.

On trouve

$$C_t = \frac{2 \times 0,5 \times 980 \times 1,5}{530} = 4,2.$$

LXXXIII. MESURE DES CHARGES ET DES POTENTIELS AU MOYEN DE LA BALANCE DE COULOMB. — Le moment C_t du couple de torsion du fil d'une balance de Coulomb, exprimé en unités C. G. S., est de 0,28, pour un degré de torsion; la longueur ob de la moitié de l'aiguille (fig. 702) est $l = 10^{\text{cm}},2$; les boules a et b ont 1^{cm} de diamètre. — Après avoir électrisé la boule a, en la mettant en communication par un long fil conducteur avec un conducteur électrisé à un potentiel inconnu V, on la transporte dans la balance, au contact de la boule mobile; immédiatement après le contact, celle-ci est repoussée. En tordant le bouton supérieur de 20° en sens inverse de la déviation, on ramène la boule mobile en b, à une distance angulaire de 36° . — On demande de calculer : 1° la force répulsive f qui s'exerce entre les deux boules; 2° la charge q que possédait la boule a quand elle a été introduite dans la balance; 3° le potentiel V du conducteur qui a servi à la charger.

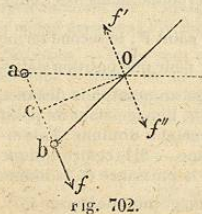


Fig. 702.

1° la force répulsive f qui s'exerce entre les deux boules; 2° la charge q que possédait la boule a quand elle a été introduite dans la balance; 3° le potentiel V du conducteur qui a servi à la charger.

Solution. — 1° Lorsque la boule mobile est en équilibre, en b, la torsion du fil est $T = 36^\circ + 20^\circ$, ou 56° ; et le moment du couple dû à la torsion est égal à $C_t T$. — La force répulsive f , qui s'exerce entre a et b, peut être supposée appliquée au point c, milieu de ab considéré comme lié à ob. On ne change pas l'état d'équilibre, en appliquant au point o deux forces f' et f'' directement opposées, égales et parallèles à f . Les deux forces f et f' constituent un couple, de bras de levier $oc = l \cos \frac{\alpha}{2}$, en désignant par α la déviation aob, qui est ici de 36° . Ce couple étant égal au couple de torsion et de sens contraire, on a

$$fl \cos \frac{\alpha}{2} = C_t T.$$

On trouve

$$f = 1 \text{ dyne } 616.$$

2° La charge q , que possédait la boule a quand elle a été introduite dans la balance, s'est partagée en deux parties égales à $\frac{q}{2}$, au moment du contact de a avec b; la distance des deux boules a et b', étant $2l \sin \frac{\alpha}{2}$, on a (645)

$$f = \frac{q^2}{4} \frac{1}{4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

d'où l'on tire $q = 16$ unités électrostatiques C.G.S.

(*) Pour déterminer C_t , on emploie préférentiellement un autre procédé susceptible d'une plus grande précision. — Après avoir fixé le fil à son extrémité supérieure, on le tend en suspendant à son extrémité inférieure une tige pesante AB dont on connaît la masse et les dimensions. Quand on écarte cette tige de sa position d'équilibre, elle y est ramenée par la torsion du fil; elle effectue des oscillations isochrones. On mesure la durée d'une oscillation. — Au moyen de ces diverses données, la théorie permet de calculer C_t .

3° Lorsque la boule a, de rayon r , possède une charge q , son potentiel est $V = \frac{q}{r}$; c'est aussi le potentiel du conducteur avec lequel cette sphère était en communication. On a donc $V = \frac{16}{0,5} = 32$ ergs.

LXXXIV. PRINCIPE DE L'ÉLECTROMÈTRE ABSOLU DE SIR W. THOMSON. — Deux disques métalliques, A et BB' (fig. 705), sont disposés horizontalement, à une distance de e^{cm} ; la portion centrale B du disque supérieur porte des poids marqués et constitue l'un des plateaux d'une balance, dont l'autre plateau porte une tare qui a été réglée de telle sorte que le fléau se tiende horizontal quand les deux conducteurs A et BB' sont à l'état neutre. — On met A en communication avec le sol, et on fait communiquer le système BB', par un long fil métallique, avec un conducteur électrisé au potentiel V; le plateau B s'abaisse; pour ramener le fléau à l'horizontalité, on retire p^{gr} du plateau B. — Calculer V en unités électrostatiques C.G.S.

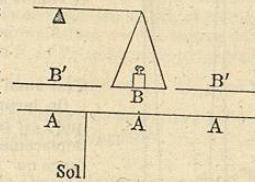


Fig. 705.

Solution. — Soit μ la densité électrique en tous les points de la surface inférieure du plateau BB'; et soit S la surface du plateau B. Ce plateau est sollicité de haut en bas par la résultante $2\pi\mu^2 S$ des tensions électrostatiques (635); cette force remplace le poids pg de la masse p^{gr} qui a été enlevée. On a donc

$$(1) \quad pg = 2\pi\mu^2 S.$$

L'espace compris entre les deux disques constitue un champ électrique uniforme, dans lequel les lignes de force sont verticales, la force électrique ayant la même valeur F en tous les points du champ. En remarquant que les surfaces de niveau BB et A, distantes de e , sont aux potentiels V et zéro, on est conduit à prendre comme valeur de la force électrique (662), l'expression

$$\frac{V-0}{e} \quad \text{ou} \quad \frac{V}{e}.$$

D'autre part, d'après le théorème de Coulomb (634), la force électrique, dans le voisinage de la surface BB', est exprimée par $4\pi\mu$. On a donc l'équation

$$(2) \quad \frac{V}{e} = 4\pi\mu.$$

En éliminant μ entre les équations (1) et (2), il vient

$$V = 2e \sqrt{\frac{2\pi g}{4\pi S}} \sqrt{p}.$$

LXXXV. COUPLE DE TORSION D'UN SYSTÈME BIFILAIRE, POUR UNE PETITE DÉVIATION. — Une tige pesante mn (fig. 704), de masse M^{gr} , est suspendue par deux fils verticaux oa, ob, de longueur l^{cm} , dont la distance est $2a$; sous l'action d'un couple de forces électriques ou magnétiques, la tige mn est déviée d'un petit angle α , et se tient en équilibre en m'n'; on demande d'évaluer le moment du couple qui produit cette déviation.

Solution. — Le poids Mg de la tige peut être remplacé par deux forces verticales p et p' , égales à $\frac{Mg}{2}$, et appliquées aux points a' et b'. La force p se décompose en deux forces: l'une q , dirigée suivant le prolongement de oa', a pour effet de tendre le fil; l'autre q' , horizontale et perpendiculaire à m'n', tend à ramener la tige

enmn. De même la force p' est remplacée par ses deux composantes q' et f' . Ce sont les deux forces f et f' qui constituent le couple antagoniste du couple des forces (électriques ou magnétiques) qui ont produit la déviation α .

Soit β l'angle aoa' , qui est beaucoup plus petit que l'angle α . On a

$$f = p \operatorname{tang} \beta, \quad \text{ou sensiblement} \quad f = \frac{Mg}{2} \beta.$$

Le bras de levier du couple $fa'b'f'$ étant égal à $2a$, le moment de ce couple a pour mesure

$$\frac{Mg}{2} \beta \times 2a, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Mag\beta.$$

C'est aussi la mesure du couple antagoniste.

Or, lorsque l'angle α ne dépasse pas quelques degrés, et lorsque l est très grand par rapport à a , on peut négliger le petit déplacement vertical cc' du milieu de la tige mn . La petite distance aa' peut alors être évaluée de deux manières : dans le triangle aca' , cette distance est exprimée par le produit $a\alpha$; dans le triangle aoa' , elle est exprimée par le produit $l\beta$. De

l'égalité de ces deux expressions on tire $\beta = \frac{\alpha a}{l}$.

Le moment du couple qui produit la torsion a donc pour mesure $\frac{Mga^2}{l} \alpha$. — Il est proportionnel à l'angle de déviation α , tant que cet angle ne dépasse pas quelques degrés.

LXXXVI. Les groupes de secteurs aa' et bb' d'un électromètre à quadrant (fig. 460), sont portés respectivement aux potentiels V_1 et V_2 ; la plaque mobile mn , chargée au potentiel V , se déplace alors d'un angle α . — Démontrer que la déviation α est proportionnelle à l'expression $(V_1 - V_2) \left(V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right)$.

Solution. — Supposons que l'on ait $V > V_1 > V_2$; la plaque mn , électrisée positivement, s'est déplacée d'un angle α , vers les secteurs b et b' , qui sont au plus faible potentiel. Il existe à l'intérieur des quadrants un champ électrique, dans lequel les lignes de force sont dirigées dans le sens des potentiels décroissants, de la plaque à chacun des secteurs; mais la force électrique n'a pas partout la même valeur.

À l'intérieur des quadrants b et b' , les conducteurs électrisés étant aux potentiels V et V_2 , la force électrique est proportionnelle à $V - V_2$; aux divers points de la plaque mn , qui sont dans cette région, la densité électrique ρ , proportionnelle à la force électrique, est donc proportionnelle à $V - V_2$; et enfin la tension électrostatique $2\pi\rho^2$, est, pour chacun des points de mn compris dans cette région, proportionnelle à $(V - V_2)^2$. Or si l'on considère la partie de mn qui est à l'intérieur du quadrant b , la résultante des tensions électrostatiques qui s'exercent sur les deux faces horizontales, supérieure et inférieure, est nulle; mais la résultante des tensions électrostatiques relatives à la surface verticale de très petite hauteur, qui limite mn sur le bord, est une force F , qui tend à accroître la déviation α . — Il en est de même pour la région de mn qui est à l'intérieur du quadrant b' , opposé à b . Une force égale à F , mais de sens contraire, tend aussi à faire décroître la déviation α . — Ces deux forces égales à F et de sens contraires constituent un couple dont le moment est proportionnel à $(V - V_2)^2$.

On démontrerait de même, en considérant les tensions électrostatiques aux points de mn qui sont compris à l'intérieur des quadrants a et a' , qu'un couple proportionnel à $(V - V_1)^2$ s'oppose à la déviation.

Le couple résultant des forces électriques est donc, en définitive, proportionnel à

$$(V - V_2)^2 - (V - V_1)^2 = 2 \left[V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right] (V_1 - V_2).$$

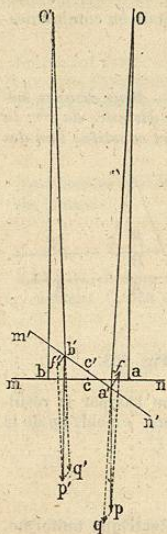


Fig. 704.

Il est neutralisé par le couple de torsion du bifilaire, lequel est proportionnel à α . — On a donc, en désignant par C un coefficient constant pour le même appareil,

$$\alpha = C \left[V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right] (V_1 - V_2).$$

Quand on fait $V_2 = -V_1$ (c'est la disposition (678) qui a été indiquée), il vient

$$\alpha = 2CV_1V.$$

La sensibilité est d'autant plus grande que V_1 est plus grand, c'est-à-dire que la pile qui sert à charger l'électromètre renferme un plus grand nombre d'éléments.

On emploie quelquefois l'électromètre en reliant les secteurs bb' au sol, et en mettant les secteurs aa' , ainsi que la plaque mn , en communication avec la source dont on veut déterminer le potentiel V . On a alors $V_2 = 0$ et $V_1 = V$; la formule précédente donne $\alpha = \frac{C}{2} V^2$. Quel que soit le signe de V , le sens de la déviation est toujours le même. Cette disposition conviendrait pour mesurer la différence de potentiel aux deux bornes d'une machine d'induction, qui fournirait des courants alternatifs.

LXXXVII. Évaluer la capacité d'un microfarad avec l'unité électrostatique C. G. S. de capacité.

Solution. — Dans la relation $Q = VC$, si C représente la capacité du microfarad, V étant 1 volt, Q représente la millionième partie du coulomb. — Avec les unités électrostatiques, $V = \frac{1}{300}$, et $Q = 5 \times 10^5$. On en tire $C = 9 \times 10^5$.

Le microfarad est donc la capacité d'un conducteur sphérique de 900 000 centimètres de rayon, ou de 9 kilomètres de rayon.

LXXXVIII. Calculer la surface d'un condensateur à lame d'air dont la capacité est d'un microfarad; l'épaisseur de la couche d'air est d'un millimètre.

Solution. — On a, pour un pareil condensateur,

$$C = \frac{S}{4\pi e} \quad \text{d'où} \quad S = 4\pi eC.$$

En faisant usage des unités électrostatiques, $e = 0,1$ et $C = 9 \times 10^5$. Il vient alors

$$S = 1\,150\,900 \text{ cent. q.} \quad \text{ou} \quad 115 \text{ mq } 09 \text{ environ.}$$

LXXXIX. Calculer la surface d'un condensateur à lame de mica, dont la capacité est d'un microfarad. — L'épaisseur de la lame de mica est d'un cinquième de millimètre. Le pouvoir inducteur spécifique du mica est $k = 8$.

Solution. — On a

$$C = \frac{kS}{4\pi e} \quad \text{d'où} \quad S = \frac{4\pi eC}{k},$$

$$S = 28\,270 \text{ cent. q.} \quad \text{ou environ } 2 \text{ mq } 827.$$

XC. Un condensateur à lame d'air, dont les plateaux sont distants de 5 cent. a une capacité égale à 200 unités électrostatiques C.G.S. Que deviendra cette capacité si l'on rapproche ces plateaux, en les appliquant sur les deux faces d'une lame isolante de 1^{me} d'épaisseur? — Le pouvoir diélectrique de la substance est égal à 5.

On trouve

$$C = 200 \times \frac{5}{0,1} \times 5 = 50\,000.$$

XCI. Une première sphère conductrice, de 25^{cm} de rayon, est au potentiel 10; une deuxième sphère, de 10^{cm} de rayon, est au potentiel 5; on les met en communication par un fil conducteur long et fin. Quel sera le potentiel commun aux deux sphères? — Quelle était l'énergie électrique initiale, et qu'est-elle devenue après la communication?

Solution. — Les charges initiales des deux sphères sont 250 et 50; après l'établissement de la communication, la charge totale, égale à 500, est répartie sur un conducteur unique, dont la capacité est $25 + 10 = 35$; le potentiel final est donc $\frac{500}{35} = 8,571$.

L'énergie initiale était de

$$\frac{250 \times 10}{2} + \frac{50 \times 5}{2} = 1575 \text{ ergs};$$

après la communication, l'énergie est devenue

$$\frac{500 \times 8,571}{2} = 1285 \text{ ergs.}$$

Elle a diminué de 90 ergs : une quantité de chaleur équivalente a été dégagée dans le fil conducteur, quand l'électricité a passé de la première sphère sur la seconde.

XCII. Les deux armatures d'un condensateur d'un microfarad ont été mises en communication, l'une avec le sol, l'autre avec une source au potentiel de 1000 volts. On recharge ensuite le condensateur à travers un fil métallique fin, dont la capacité calorifique est égale à celle de $0^{\text{r}},00064$ d'eau. Quelle sera l'élévation de la température du fil, en admettant que toute l'énergie électrique qui a disparu après la décharge s'est transformée en chaleur produite dans le fil?

Solution. — La capacité électrique du condensateur étant de C farads, le potentiel étant de V volts, l'énergie électrique avant la décharge est $\frac{CV^2}{2}$ joules. — Soit c la capacité calorifique du fil métallique et t l'accroissement de sa température; $ct \times 4,17$ joules est l'énergie calorifique qui apparaît après la décharge. On a donc

$$ct \times 4,17 = \frac{CV^2}{2} \quad \text{d'où l'on tire} \quad t = 187^{\circ}.$$

XCIII. Une bouteille de Leyde est chargée; soit W son énergie électrique. Elle est montée ensuite avec $(n-1)$ bouteilles semblables, non chargées, de manière à former une batterie. Montrer que l'énergie électrique du système est devenue $\frac{W}{n}$.

XCIV. Deux plateaux A et B , distants de e , sont électrisés à des potentiels différents V_1 et V_2 ; on suppose $V_1 > V_2$. Quel est le potentiel en un point M situé entre les deux plateaux, à une distance d du plateau A ? — On place en ce point une petite sphère conductrice de rayon r , et après l'avoir mise en communication avec le sol, on la retire. Quelle est sa charge?

XCv. Une sphère conductrice, de rayon R , a été chargée à un potentiel V , puis isolée dans une enceinte conductrice, dont les parois reliées au sol sont très éloignées de la sphère. Quel est le potentiel à une distance D du centre de la sphère, et comment pourra-t-on le vérifier?

XCvi. Calculer les quantités d'électricité qui interviennent dans les décharges alternatives d'un condensateur sphérique, à lame d'air.

Solution. — Soit R et $R+e$ les rayons des armatures A et B . Le condensateur ayant été chargé avec une source au potentiel V , les charges égales et contraires de A et B sont telles que le potentiel de A soit égal à V . On a donc

$$V = \frac{Q}{R} - \frac{Q}{R+e}, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{VR(R+e)}{e}.$$

Après avoir isolé le condensateur, on touche A , de manière à l'amener au potentiel zéro; il y restera une charge Q_1 , telle que l'on ait :

$$0 = \frac{Q_1}{R} - \frac{Q}{R+e}, \quad \text{d'où} \quad Q_1 = Q \frac{R}{R+e}.$$

La quantité d'électricité $Q - Q_1$, disparue dans l'étincelle tirée de A , est donc

$$q_1 = Q \frac{e}{R+e} = VR.$$

C'est précisément la charge qu'aurait prise la sphère A , si on l'avait chargée avec la même source, après avoir éloigné le condensateur B .

On isole A , et on touche B ; il ne peut plus rester sur l'enveloppe conductrice B qu'une charge égale et contraire à Q_1 ; la deuxième étincelle tirée de B , fait donc disparaître autant d'électricité négative, qu'il a disparu d'électricité positive dans l'étincelle tirée de A .

Après 2 étincelles, on est ramené à l'état initial; seulement la charge de chaque armature est réduite dans le rapport $\frac{R}{R+e}$.

En résumé, les décharges font disparaître des quantités d'électricité qui vont en décroissant suivant une progression géométrique,

$$q_1, \quad q_1 \frac{R}{R+e}, \quad q_1 \left(\frac{R}{R+e} \right)^2, \dots$$

XCvii. Les deux armatures d'un condensateur sont mises en communication avec deux sources électriques aux potentiels V_1 et V_2 ; la surface du condensateur est S , l'épaisseur de la lame d'air isolante est e . Évaluer la charge prise par chacune des armatures.

Solution. — Puisque les phénomènes électriques ne dépendent que des différences de potentiel (662. Rem.), tout se passera comme si l'une des armatures était au potentiel zéro, et l'autre à un potentiel $V = V_1 - V_2$. La charge prise par chaque armature est donc

$$\pm q = \pm \frac{S}{4\pi e} (V_1 - V_2).$$

La capacité du condensateur est $C = \frac{S}{4\pi e}$; on peut en donner la définition suivante, qui est générale. C'est la grandeur des charges positive et négative qu'il faut donner respectivement aux deux armatures, pour établir entre elles une différence de potentiel égale à l'unité.

On peut obtenir ce résultat directement. Soit F la force électrique, dans l'épaisseur d'air comprise entre les deux armatures; elle est dirigée dans le sens des potentiels décroissants, et est égale à $\frac{V_1 - V_2}{e}$; soit μ la densité sur l'armature qui est au potentiel V_1 ; puisque les lignes de force partent de cette armature, μ est positif, et

$$F = 4\pi\mu, \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

De même, μ' étant la densité en tous les points de l'autre armature, au potentiel V_2 , on aurait

$$\mu' = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e} = -\mu.$$

Les charges des deux armatures, de surface S , sont donc

$$\pm Q = \pm \frac{V_1 - V_2}{4\pi e} S = \pm C (V_1 - V_2),$$

en posant $C = \frac{S}{4\pi e}$.

XCviii. Des bouteilles de Leyde, de même capacité C , au nombre de n , sont disposées en batterie: toutes les armatures extérieures étant reliées au sol, on fait communiquer l'ensemble des armatures intérieures avec une source électrique au potentiel V . Évaluer l'énergie électrique de la batterie chargée à refus.

On réunit ensuite les bouteilles en cascade; c'est-à-dire que l'armature intérieure de chaque bouteille communique avec l'armature extérieure de celle qui précède; ces

deux armatures constituent un conducteur isolé. L'armature extérieure de la dernière bouteille est au sol; on fait communiquer l'armature intérieure de la première bouteille avec la source au potentiel V . Évaluer l'énergie électrique du système chargé à refus.

Solution. — Dans la première disposition, la capacité de l'armature intérieure de la batterie est nC , le potentiel est V , la charge est $Q = nCV$, et par suite, l'énergie

$$\frac{VQ}{2} = \frac{nCV^2}{2}.$$

Dans la deuxième disposition, il est facile de voir que l'énergie du système réside tout entière dans l'armature intérieure de la première bouteille. — En effet, le conducteur constitué par la réunion de l'armature intérieure d'une bouteille et de l'armature extérieure de la bouteille qui précède est à l'état neutre, avant la charge; il est isolé pendant la durée de la charge; donc il ne peut s'électriser que par influence, en prenant deux charges égales et contraires dans deux régions opposées; sa charge totale est donc nulle, et par suite son énergie est nulle. — Quant à l'armature extérieure de la dernière bouteille, puisqu'elle est reliée au sol, la valeur du potentiel est zéro, et l'énergie est nulle, quelle que soit la charge de cette armature.

Soit q la charge de l'armature intérieure de la première bouteille, l'énergie du système est donc $\frac{Vq}{2}$. Il reste à évaluer q .

Lorsque l'équilibre est établi, puisque l'armature extérieure de la première bouteille enveloppe complètement l'armature intérieure, dont la charge est $+q$, il s'est développé, par influence, sur cette armature extérieure, une charge $-q$, égale et contraire à la charge inductrice; par suite, une charge $+q$ a été induite dans l'armature intérieure de la seconde bouteille; et ainsi de suite. On voit ainsi que les armatures intérieures de toutes les bouteilles possèdent une charge $+q$, et que les armatures extérieures possèdent une charge égale et contraire.

Soient V, V_1, V_2, \dots, V_n , zéro, les potentiels décroissants des conducteurs que l'on rencontre successivement dans le système, en allant de l'armature intérieure de la première bouteille, qui est au potentiel V , à l'armature extérieure de la dernière bouteille, qui est au potentiel zéro, ces conducteurs étant séparés par les lames de verre des bouteilles successives. — Les bouteilles étant identiques, les chutes de potentiel $V - V_1, V_1 - V_2$, etc., sont égales; il en résulte que chacune de ces différences est égale à $\frac{V}{n}$.

La grandeur q des charges positive et négative que possèdent les armatures de la première bouteille est donc (Probl. XCVII) $q = C \frac{V}{n}$.

L'énergie du système est $\frac{CV^2}{2n}$.

Remarque. — Soit U la différence de potentiel qu'il faudrait établir entre les deux armatures de l'une des bouteilles, pour que la décharge s'effectuât à travers la lame de verre.

La disposition en batteries convient lorsque la machine fournit de l'électricité à un potentiel V inférieur à U , avec un débit considérable. Pour charger la batterie à refus, la machine doit fournir une quantité d'électricité $Q = nCV$ proportionnelle au nombre des bouteilles; l'énergie électrique acquise, $\frac{nCV^2}{2}$, est aussi proportionnelle à n .

La disposition en cascade s'impose toutes les fois que la machine fournit de l'électricité à un potentiel V supérieur à U . Pour éviter la rupture du verre, on doit faire usage d'un nombre n de bouteilles d'autant plus grand que V est plus grand. On doit avoir, en effet,

$$\frac{V}{n} < U; \quad \text{d'où} \quad n > \frac{V}{U}.$$

La quantité d'électricité fournie par la machine, $\frac{CV}{n}$, étant en raison inverse du nombre

des bouteilles, la durée de la charge diminue à mesure que le nombre des bouteilles augmente; mais l'énergie $\frac{CV^2}{2n}$ communiquée au système diminue également.

XCIX. Un barreau aimanté, suspendu dans la balance de Coulomb, se tient en équilibre dans le méridien magnétique, le fil qui le supporte n'ayant aucune torsion. En faisant tourner progressivement le tambour c (fig. 511), dans le sens des aiguilles d'une montre, on amène le barreau à s'écarter progressivement de la direction du méridien magnétique, mais l'angle qui mesure la déviation du barreau est toujours moindre que l'angle qui mesure la rotation du tambour c ; pour amener le barreau perpendiculairement au méridien magnétique, il a fallu faire tourner le tambour c de N degrés. Connaissant C , le moment du couple de torsion, pour une torsion de un degré (Probl. LXXXII), en déduire le produit MH du moment magnétique M du barreau par la composante horizontale H de l'intensité magnétique terrestre au lieu de l'expérience.

Solution. — Quand le barreau est perpendiculaire au méridien magnétique, le couple des actions magnétiques qui le sollicite est MH ; le couple de torsion est $C_1(N - 90)$. On a donc

$$MH = C_1(N - 90).$$

C. Une petite aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical O , est orientée dans le méridien magnétique OC (fig. 705). Un barreau aimanté AB , est placé perpendiculairement au méridien, à une distance $OC = r$. L'aiguille mobile est déviée d'un angle α . En déduire le rapport $\frac{M}{H}$ du moment magnétique M du barreau AB à la composante horizontale H de l'intensité magnétique terrestre au lieu de l'expérience.

Solution. — Soient A et B les deux pôles, m la masse magnétique de chacun d'eux. Une masse magnétique australe égale à l'unité, et placée au point O , serait sollicitée : 1° par la force H ; 2° par une force répulsive $f = \frac{m}{AO^2}$; 3° par une force attractive f' égale à la précédente. Soit F la résultante de f et de f' ; soit R la résultante de F et de H . C'est dans la direction de R que s'orientera l'aiguille aimantée; la déviation observée α est égale à l'angle HOR . On a donc :

$$\tan \alpha = \frac{F}{H}.$$

Mais les triangles FOF et OAB sont semblables :

$$\frac{F}{AB} = \frac{f}{AO}; \quad \text{par suite,} \quad \tan \alpha = \frac{f}{H} \times \frac{AB}{AO} = \frac{m \times AB}{H \times AO^2},$$

et comme AO ne diffère pas sensiblement de r , on a sensiblement

$$\tan \alpha = \frac{M}{H} \frac{1}{r^3}, \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{H} = r^3 \tan \alpha.$$

Puisque l'on sait mesurer $\frac{M}{H}$ et MH (Problème XCIX), le produit de ces deux nombres donne M^2 ; le quotient du second par le premier donne H^2 . On en déduit M et H . — C'est la méthode de Gauss.

CI. En un point de l'équateur magnétique, l'intensité magnétique du champ terrestre est horizontale; évaluée dans le système d'unité C. G. S., elle est égale à 0,35. En déduire le moment magnétique M de la Terre, et son intensité d'aimantation A . On admettra que la Terre est une sphère dont la circonférence a 40 millions de mètres

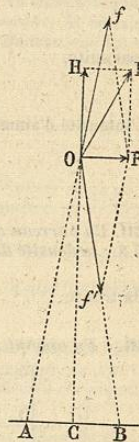


Fig. 705.

Solution. — Supposons que dans la figure 705, les points A et B, distants de $2a$, représentent les pôles de l'aimant terrestre; C étant le centre de la Terre, et O un point de l'équateur magnétique.

L'unité de pôle austral, placée en O, est sollicitée par deux forces f et f' égales à $\frac{m}{AO^2}$, en représentant par m la masse magnétique de chaque pôle. La résultante F de ces deux forces est l'intensité magnétique du champ terrestre, en un point de l'équateur magnétique. Or les triangles semblables FOF' et OAB donnent :

$$\frac{F}{f} = \frac{AB}{AO}, \quad \text{d'où} \quad F = \frac{m \times AB}{AO^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{M}{AO^2};$$

et par suite, en remarquant que AO ne diffère pas sensiblement du rayon de la Terre, on aura

$$M = F.R^3.$$

R doit être évalué en centimètres; le quart de la circonférence de la Terre vaut 10 millions de mètres, ou 10^9 centimètres; on a donc

$$\frac{\pi R}{2} = 10^9 \quad \text{d'où} \quad R = \frac{2 \times 10^9}{\pi};$$

et par suite,

$$M = 0,55 \times \frac{2^3 \times 10^{27}}{\pi^3} = 8,5 \times 10^{25}.$$

L'intensité d'aimantation de la Terre est

$$A = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{ou} \quad A = \frac{5F}{4\pi} = 0,079.$$

CII. Un barreau d'acier, pesant 662^{gr}, a un moment magnétique égal à 15 558 unités C.G.S.; la densité de l'acier est 7,8; évaluer l'intensité d'aimantation de ce barreau.

On trouve $\frac{15558 \times 7,8}{662} = 181.$

CIII. Un aimant AB (fig. 706), de moment magnétique égal à M , est placé dans un champ uniforme, d'intensité magnétique égale à F , et maintenu dans une direction perpendiculaire aux lignes de force. Évaluer le moment du couple qui sollicite l'aimant.

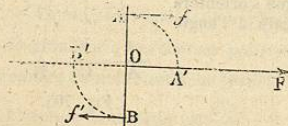


Fig. 706.

Sous l'action de ce couple, l'aimant, devenu entièrement libre, s'oriente dans la direction des lignes de force. Évaluer le travail effectué.

Solution. — Soient m la masse magnétique de chaque pôle, et $2a$ la distance des deux pôles A et B. Chacun des pôles A et B est sollicité par l'une des forces f et f' , égales à mF , et de sens contraires. Le moment du couple $fABf'$, est donc

$$mF \times 2a = MF,$$

en remarquant que $M = 2am$.

Lorsque l'aimant AB devient libre, il tourne autour de son centre O; A vient en A', B vient en B'. Le travail effectué par la force f constante en grandeur et en direction est égal à $f \times OA'$, produit de cette force, par la projection OA' du chemin parcouru AA' sur la direction OF de la force.

De même le travail effectué par la force f' est égal à $f' \times OB'$. Le travail total est donc

$$f \times A'B' = f \times 2a = MF.$$

Remarque. — D'une manière générale, le moment d'un couple mesure le travail effectué par les forces du couple, quand le bras de levier, d'abord perpendiculaire à la direction des forces, s'oriente dans cette direction.

CIV. Une pile de force électromotrice $E = 1,48$ volt a une résistance intérieure $R = 1,5$ ohm; elle est fermée par un fil de cuivre de résistance $r = 2$ ohms. Quelle est la différence de potentiel aux deux pôles de la pile?

Solution. — On a :

$$\frac{v}{r} = \frac{E}{R+r}, \quad \text{d'où} \quad v = 0,9 \text{ volt.}$$

CV. La différence de potentiel prise aux deux pôles d'un élément de pile, en circuit ouvert, est $E = 1,52$ volt; on ferme la pile sur un circuit de résistance $r = 5$ ohms; la différence de potentiel aux deux pôles devient alors $v = 1,55$ volt. Quelle est la résistance R de cet élément de pile?

Solution. — On a :

$$\frac{v}{r} = \frac{E}{R+r} \quad \text{d'où l'on déduit} \quad R = 0,65 \text{ ohm.}$$

CVI. On monte 60 éléments de Bunsen en 5 séries de chacune 12 éléments, puis on réunit ces 5 séries en une batterie; quelle est l'intensité du courant, la résistance du circuit extérieur étant de 10 ohms? Pour chaque élément Bunsen $e = 1,9$ volt, $\rho = 0,1$ ohm.

Solution. — On a :

$$i = \frac{12 \times 1,9}{10 + \frac{12 \times 0,1}{5}} = 2,25 \text{ ampères.}$$

CVII. Un courant fourni par une pile de 10 éléments Daniell passe dans un voltamètre, et dans un appareil à galvanoplastie. Dans le voltamètre, il se dégage 9 centimètres cubes de gaz par minute. On demande :

- 1° Quelle sera la masse de cuivre déposée dans la cuve à galvanoplastie, au bout d'une heure;
- 2° Quelle sera, pendant ce temps, la masse de zinc brûlée dans la pile tout entière;
- 3° Quelle est l'intensité du courant, évaluée en ampères;
- 4° Quelle est la résistance totale du circuit, évaluée en ohms.

Un courant de 1 ampère électrolyse $0,000095$ d'eau par seconde; la force électromotrice d'un élément Daniell est de 1 volt, 08. — La masse spécifique de l'air est $0,001295$; la densité de l'hydrogène est 0,069. — Les équivalents électro-chimiques du cuivre et du zinc sont respectivement 52 et 55.

Solution. — 1° Si dans le voltamètre il se dégage 9 centimètres cubes de gaz par minute, le volume d'hydrogène électrolysé pendant ce temps est de 6 centimètres cubes; et sa masse est $6 \times 0,001294 \times 0,039 = 0,000555$. En une heure, le courant électrolyse donc une quantité d'hydrogène 60 fois plus grande, c'est-à-dire $0,0321$. — Or, d'après les lois de Faraday, les masses d'hydrogène et de cuivre électrolysées pendant le même temps et par le même courant, sont entre elles comme les équivalents chimiques 1 et 52. La masse de cuivre déposée au bout d'une heure, dans l'appareil à galvanoplastie, est donc de $52 \times 0,0321 = 1,67$.

2° D'autre part, au dégagement de 1 gramme d'hydrogène, correspond la dissolution de 55 grammes de zinc dans chacun des éléments de pile : la masse de zinc brûlée, en une heure, dans toute la pile, est donc de $10 \times 55 \times 0,0321 = 10,25$.

3° En multipliant par 9 le nombre $0,000555$, qui représente la masse d'hydrogène déposé par le courant pendant une minute, on obtient la quantité d'eau décomposée par le courant pendant le même temps; et le quotient du produit obtenu par le nombre 60, représente la masse d'eau décomposée en une seconde : ce nombre, exprimé en milligrammes, est $0,08025$. L'intensité du courant, évaluée en ampères, est donc de

$$\frac{0,08025}{0,095} = 0,84,865.$$

4° Pour calculer la résistance totale du circuit, nous remarquerons que l'on a, en