ce moment est généralement atteint quand le poids moteur R a effectué environ les deux tiers de sa descente. — C'est alors que, en tirant sur le cordon *cd*, on dégage le crochet *b*; la masse D se met en mouvement, et le crayon trace sur le papier la courbe qui donne la loi de la chute.

### III. — PENDULE.

51. **Mouvement du pendule simple.** — Nous appellerons *pendule* un corps pesant quelconque, mobile autour d'un axe fixe, appelé *axe de suspension*, cet axe ne passant pas par son centre de gravité.

Dans le pendule ainsi défini, chaque point du corps est assujetti à décrire un arc de cercle dont le centre est sur l'axe de suspension; la perpendiculaire menée du point considéré sur l'axe de suspension demeure toujours dans le même plan (*). — Le pendule est en équilibre stable, lorsque son centre de gravité est au-dessous de l'axe de suspension, dans le plan vertical passant par cet axe (41, 1°); si on le dérange de cette position, il y revient, en exécutant de part et d'autre une série d'oscillations.

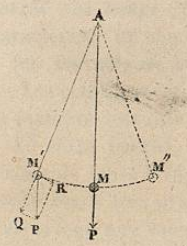


Fig. 43.
Pendule simple.

Pour étudier le phénomène des oscillations, nous imaginerons d'abord un pendule idéal, le *pendule simple*, qui se composerait d'un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil sans poids, flexible, inextensible, l'autre extrémité du fil étant fixe. Pour se rapprocher de ces conditions toutes théoriques, on pourra employer une petite sphère pesante M, suspendue à un fil fin et flexible (*fig.* 43).

Si l'on amène le pendule dans la position AM' et qu'on l'abandonne à lui-même, il ne peut conserver cette position. En effet, le poids P de la sphère, qui est une force verticale, peut se décomposer en deux forces : l'une Q, dirigée suivant le prolongement du fil, et qui n'a d'autre effet que de le tendre; l'autre R, perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire tangente à l'arc de cercle M'M, et qui sollicite la sphère à revenir vers le point M. Comme il en est de même tant que la sphère est à gauche de M, celle-ci parcourt, avec une vitesse croissante, l'arc de cercle M'M. Arrivée en M, elle dépasse la position d'équilibre, en vertu de la vitesse acquise; mais la composante tangentielle du poids, agissant maintenant en sens contraire du mouvement, diminue peu à peu la

(*) On appelle plus généralement *pendule*, un corps pesant mobile autour d'un point fixe, appelé *point de suspension*, ce point étant différent du centre de gravité. Chaque point du pendule peut alors se déplacer sur une sphère dont le centre est le point de suspension; la droite qui joint le point considéré au point de suspension décrit un cône ; c'est pourquoi ce pendule prend le nom de *pendule conique*.



vitesse, et finit par l'annuler. A ce moment, le pendule, parvenu en AM'', a accompli *une oscillation*. — La pesanteur continuant toujours à agir sur le corps, il redescend l'arc M''M, remonte de l'autre côté du point M usqu'à ce que sa vitesse redevienne nulle, puis revient encore sur lui-même, et accomplit ainsi une série d'oscillations, alternativement dans un sens et dans l'autre.

La théorie montre qu'un pendule simple, partant d'une position AM', doit parvenir, de l'autre côté de la verticale, *jusqu'à la position symétrique* AM''; il en résulte que, partant ensuite de AM'', il doit revenir en AM', et ainsi de suite; en d'autres termes, ses oscillations doivent conserver indéfiniment la *même amplitude*, et par suite la *même durée*.

En soumettant la question au calcul, et considérant seulement le cas où *l'amplitude des oscillations est très petite*, on trouve que la durée constante d'une oscillation est donnée par la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

dans laquelle $t$ désigne la durée de l'oscillation, exprimée en secondes; $\pi$ est le rapport de la circonférence au diamètre, égal à 3,1416 environ; $l$ est la longueur du pendule; $g$ est l'accélération du mouvement vertical de la chute libre dans le vide, au lieu même où s'effectue l'oscillation. Ces deux quantités $l$ et $g$ doivent être exprimées au moyen d'une même unité de longueur.

52. **Pendule quelconque, oscillant dans le vide et sans frottement.** — Le raisonnement donné pour un pendule simple subsiste pour un pendule quelconque, dont le point M serait le centre de gravité et dont l'axe de suspension passerait par le point A. — *L'oscillation* est alors le passage d'une position extrême du pendule à l'autre position extrême; la *durée* de l'oscillation est le temps nécessaire pour effectuer ce trajet : l'*amplitude* de l'oscillation est l'angle que forment entre elles les deux positions extrêmes de la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe de suspension.

Un raisonnement simple suffit pour montrer que, quand un pendule oscille *dans le vide*, sans frottement sur son axe, les positions extrêmes du centre de gravité M' et M'' sont dans un même plan horizontal. — Considérons, en effet, les variations qu'éprouvent la force vive et l'énergie potentielle du pendule, pendant une oscillation, de M' en M''. Au point M', le pendule partant du repos, la force vive est nulle : l'énergie potentielle dépend de l'altitude du point M'. Au point M, cette altitude est minima, l'énergie potentielle est minima, et par suite, en vertu de la conservation de l'énergie (32), la force vive est maxima. A la fin de l'oscillation, la force vive est redevenue nulle, l'énergie potentielle doit donc avoir la même valeur qu'au point M', c'est-à-dire que les deux positions extrêmes du centre de gravité, M' et M'', doivent être dans le même plan horizontal. — Il en résulte immédiatement que toutes les oscillations successives doivent avoir même amplitude et même durée.

Il n'en est plus de même quand le pendule oscille *dans l'air*; en raison de la résistance de l'air et du frottement, l'énergie totale diminue d'une oscillation à l'autre; les points M', M''.... se rapprochent peu à peu du point M, l'amplitude des oscillations va en décroissant progressivement.

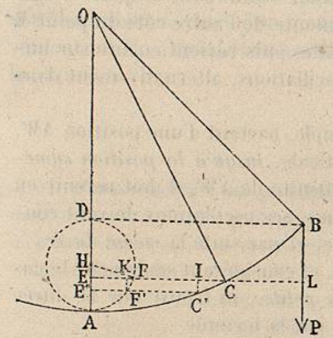


Fig. 44.

53. **Démonstration de la formule du pendule simple.** — Supposons que le pendule simple OA, de masse *m*, soit amené en OB et abandonné sans vitesse initiale, il oscillera du point B au point B' situé sur la ligne horizontale BD. Décrivons sur AD comme diamètre une circonférence dont H est le centre, et divisons cette circonférence en N arcs égaux et très petits; soit FF' l'un de ces arcs. Menons les horizontales EFC, E'F'C'. — En partant du point B, le pendule a une force vive nulle; au point C la vitesse est $v$ et la force vive $\frac{1}{2}mv^2$; d'autre part, le travail effectué par le poids du pendule est égal à $P \times BL$ (22), et, d'après le principe des forces vives (23), on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 = P \times BL = mg \times DE$$

ou

$$v = \sqrt{2g \times DE}.$$

Nous supposerons l'arc FF' assez petit pour que l'on puisse confondre les arcs FF' et CC' avec leurs cordes, et pour que, pendant l'intervalle de temps $\theta$ que met le pendule pour aller de C en C', on puisse considérer la vitesse comme constante et égale à $v$; alors

$$(1) \qquad CC' = \theta\sqrt{2g \times DE}.$$

Les triangles CCI' et OCE donnent :

$$(2) \qquad \frac{CC'}{C'I} = \frac{OC}{CE} = \frac{l}{CE},$$

en désignant par $l$ la longueur du pendule simple. D'autre, part CE est moyenne proportionnelle entre AE et $2l$ — AE. Nous examinerons seulement le cas d'une oscillation de très faible amplitude; alors AE est toujours négligeable vis-à-vis $2l$, et la valeur de CE est donnée par l'égalité :

$$(3) \qquad CE = \sqrt{AE \times 2l}.$$

En combinant les égalités (1) (2) et (3), on obtient la valeur de $\theta$ :

$$\theta = \frac{C'I}{2\sqrt{AE \times DE}}\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{C'I}{2EF}\sqrt{\frac{l}{g}},$$



en remarquant que $AE \times DE = EF^2$. — Enfin les deux triangles HFE et KFF' donnent la proportion :

$$\frac{F'K}{EF} = \frac{FF'}{HF} \text{ ou } \frac{C'I}{2EF} = \frac{FF'}{2HF} = \frac{\pi FF'}{2\pi HF} = \frac{\pi}{N},$$

puisque FF' est la N^me partie de la circonférence DFA. On a donc finalement :

$$\theta = \frac{\pi}{N}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Le pendule met donc le même temps $\theta$ pour parcourir tous les arcs tels que CC'; pour parcourir la trajectoire BB' tout entière, il mettra un temps N fois plus grand; si $t$ désigne la durée de l'oscillation, on aura donc :

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

54. **Pendule composé.** — Tout pendule qui n'est pas un pendule simple est un pendule composé. On démontre, en Mécanique, qu'à un pendule composé quelconque correspond un pendule simple qui lui est *synchrone*. Cela ne veut pas seulement dire que le pendule composé et le pendule simple correspondant ont même durée d'oscillation; cela signifie qu'il existe, dans le pendule composé, une droite parallèle à l'axe de suspension, telle que, si les deux pendules sont abandonnés au même instant sans vitesse initiale, et si leurs oscillations ont même amplitude, un point quelconque de cette droite sera toujours animé de la même vitesse que le pendule simple au même instant. Cette droite s'appelle *axe d'oscillation;* sa distance à l'axe de suspension est précisément égale à la longueur du pendule simple synchrone.

Dans le cas particulier où le pendule est formé d'une sphère pesante, suspendue par un fil très léger, et ayant une longueur très grande par rapport au rayon de la sphère, on démontre qu'on peut prendre, pour longueur du pendule simple synchrone, la distance du centre de la sphère à l'axe de suspension du fil.

55. **Isochronisme des petites oscillations.** — Quand un pendule oscille dans l'air, il éprouve, de la part de l'air, une résistance qui tend à diminuer sa vitesse; les frottements de l'axe de suspension ont un effet semblable; aussi, les amplitudes des oscillations vont-elles en diminuant peu à peu, jusqu'à devenir insensibles.

En observant les mouvements d'une lampe suspendue à la voûte de la cathédrale de Pise, Galilée a remarqué que, malgré la décroissance de l'amplitude, *les oscillations de faible amplitude conservent une même durée.* — Pour vérifier expérimentalement cette loi, on fera osciller un pendule, et quand les oscillations seront devenues suffisamment petites, on déterminera, à l'aide d'une montre à secondes, la durée de 100 oscillations, dont l'amplitude moyenne sera, par exemple, 4 degrés. Quelques minutes après, l'amplitude des oscillations n'étant plus que 2 degrés, on déterminera de nouveau la durée de 100 oscillations; le résultat obtenu concordera avec le précédent.

La loi de Galilée peut s'énoncer ainsi : *En un même lieu, les oscillations de faible amplitude d'un même pendule sont isochrones.*

La loi de l'isochronisme n'est qu'une approximation; elle est d'autant mieux vérifiée que l'amplitude des oscillations est plus petite.

56. **Lois du pendule.** — Les lois du pendule, au nombre de quatre, peuvent se déduire toutes de la formule précédente, $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

1° Dans cette formule, qui n'est exacte que pour les oscillations de faible amplitude, n'entre pas la valeur de l'amplitude elle-même; donc toutes les oscillations de faible amplitude sont isochrones. La loi de l'isochronisme, énoncée précédemment, peut donc être considérée comme une conséquence de la formule du pendule.

2° Dans la valeur de $t$ n'intervient pas non plus la densité de la matière du pendule. Et en effet, si l'on construit divers pendules de même longueur, avec des sphères de plomb, de cuivre, d'ivoire,... ayant même diamètre, et si on les fait osciller dans un même lieu, on trouve que la durée des oscillations est sensiblement la même; dans le vide, les oscillations auraient exactement la même durée. — De là, cette loi : *Dans le vide, la durée de l'oscillation d'un pendule est indépendante de la matière qui le constitue : elle ne dépend que de sa forme.*

Ce résultat, trouvé par Galilée, peut être considéré comme démontrant que *l'accélération $g$, imprimée par la pesanteur à divers corps, en un même lieu, est la même.*

3° D'après la formule du pendule, la valeur de $t$ est proportionnelle à la racine carrée de $l$; d'où cette loi : les durées des oscillations de deux pendules de longueurs différentes, en un même lieu, sont *proportionnelles aux racines carrées des longueurs.* — On peut vérifier ce résultat avec deux pendules formés chacun d'une sphère métallique suspendue à un fil fin, et ayant respectivement pour longueurs 1 mètre et 25 centimètres; le premier, qui bat sensiblement la seconde, ne fait qu'une oscillation pendant que le second en fait deux.

4° Enfin, d'après la même formule, $t$ dépend de $g$ : si $g$ varie, $t$ doit varier en sens inverse. Or, il résulte de nombreuses observations, faites par Borda et par d'autres physiciens, que *la durée de l'oscillation d'un même pendule augmente quand on se rapproche de l'équateur, ou quand on s'élève au-dessus du niveau de la mer.* Il en faut donc conclure que l'accélération de la chute des corps n'est pas la même aux différents points du globe : elle diminue quand on s'approche de l'équateur, ou quand on s'élève au-dessus du niveau de la mer.

57. **Détermination des valeurs de l'intensité de la pesanteur.** — On appelle intensité de la pesanteur, en un point du globe, la force



qui résulte de l'action de la pesanteur sur l'unité de masse. — Dans l'ancien système d'unités, d'après ce qu'on a vu (11), l'unité de masse a pour poids, à Paris, $9^{\text{kil}},81$; c'est l'intensité de la pesanteur à Paris, évaluée en kilogrammes. — Dans le système C. G. S., l'intensité de la pesanteur est la force, évaluée en dynes, qui résulte de l'action de la pesanteur sur la masse d'un gramme. Or, dans la formule $p = mg$, si l'on fait $m = 1$, on a $p = g$ dynes; c'est-à-dire que l'intensité de la pesanteur, évaluée en dynes, et l'accélération de la chute des corps au même lieu, évaluée en centimètres, sont représentées par le même nombre. A Paris, l'accélération de la chute des corps est 981 centimètres; l'intensité de la pesanteur est 981 dynes.

Quant à la détermination de l'accélération $g$ de la chute des corps, que nous venons de supposer connue, de la formule $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, on tire $g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$. — On fera donc osciller un pendule en un lieu déterminé; on mesurera sa longueur en centimètres et la durée de son oscillation en secondes, et on en déduira la valeur de $g$ dans le lieu de l'expérience.

58. **Variations de l'intensité de la pesanteur aux divers points du globe.** — Les mesures effectuées, au moyen du pendule, ont montré que l'intensité de la pesanteur augmente lorsqu'on s'éloigne de l'équateur terrestre pour se rapprocher des pôles (*).

D'après les mesures de Borda et des savants contemporains, la valeur de $g$ est :

| A l'équateur. | A Paris. | A la latitude de 80°. |
|---|---|---|
| $978^{\text{cm}},10$ | $980^{\text{cm}},96$ | $983^{\text{cm}},00$ |

L'intensité de la pesanteur augmente donc, de l'équateur au pôle, d'environ $\frac{1}{200}$ de sa valeur. — On a constaté également que, à latitude égale, l'intensité de la pesanteur diminue à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère; elle est plus grande au niveau de la mer que sur les continents élevés ou sur le sommet des montagnes.

59. **Application du pendule aux horloges.** — L'isochronisme des oscillations du pendule est mis à profit pour régulariser le mouvement des horloges. La disposition qui est le plus ordinairement employée, et qui est connue sous le nom d'*échappement à ancre*, a été imaginée par Huyghens en 1657 (**).

(*) Cette augmentation est déterminée principalement par l'aplatissement de la terre vers ses pôles, mais elle est aussi due, en partie, au mouvement de rotation de la terre autour de son axe, mouvement dans lequel les divers points de la surface du globe ont, sur les circonférences qu'ils décrivent, des vitesses d'autant plus petites qu'ils sont plus voisins des pôles.

(**) C'est à cette époque que Huyghens présenta aux États de Hollande une horloge réglée par le mouvement d'un pendule. — Cette invention se répandit rapidement, et on donna bientôt, par extension, le nom de *pendules*, aux horloges qui furent construites sur le modèle de celle de Huyghens.

Le mouvement de l'horloge est produit, soit par la tension d'un ressort, soit par la chute d'un poids P, supporté par une corde enroulée sur un arbre. Le mouvement de rotation de cet arbre se transmet aux divers rouages de l'horloge; il est clair que ce mouvement tendrait à s'accélérer sans cesse, sous l'action continue du poids ou du ressort. — Dans la figure 45, on n'a représenté, pour simplifier, qu'une seule roue R, dite *roue à rochet*, ou *roue de rencontre*, fixée directement sur l'arbre : cette roue porte, comme le montre la figure, des dents qui sont toutes inclinées dans un même sens.

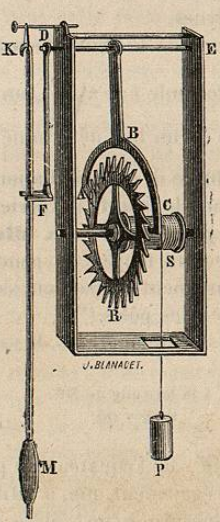


Fig. 45. — Application du pendule aux horloges.

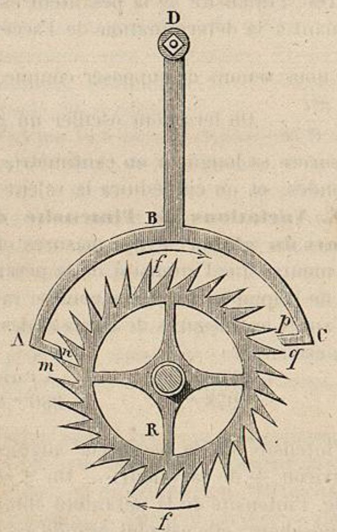


Fig. 46. — Échappement à ancre.

Une pièce ABC, en forme d'*ancre*, fixée à un axe horizontal mobile DE, est placée au-dessus de la roue : ce même axe DE porte une fourchette DF, dans laquelle passe la tige d'un pendule KM, ou *balancier*, parfaitement mobile autour de son point de suspension K. — Quand le balancier est immobile, l'une des dents de la roue R vient appuyer sur la face inférieure A$m$ du crochet A de l'ancre (*fig.* 46), et l'horloge est arrêtée. Mais, une fois le balancier mis en mouvement, il entraîne l'ancre dans son oscillation : le crochet A s'éloignant de la roue vers la gauche, la dent qui appuyait sur ce crochet devient libre ; la roue peut alors tourner sous l'action du poids ou du ressort qui la sollicite, dans le sens de la flèche $f$, jusqu'à ce que l'autre crochet C vienne arrêter la dent qui se trouvait à une petite distance au-dessus de lui, et qui arrive en contact avec sa face supérieure C$p$. — A son oscillation suivante, l'ancre se mettant en mouvement vers la droite, le crochet C abandonne la dent qu'il avait arrêtée, et la roue peut tourner de nouveau, jusqu'à ce que le crochet A de l'ancre vienne rencontrer la dent suivante de la roue, et ainsi de suite. — Dès lors, le mouvement de la roue ne peut plus s'effectuer que par saccades, se succédant à intervalles de temps égaux, comme les oscillations du balancier, et le mouvement de l'horloge est ainsi régularisé. — Ce sont les chocs produits par les crochets de l'ancre, sur les dents de la roue e rencontre, qui produisent le battement de l'horloge.



## IV. — BALANCE.

**60. Mesure des poids et des masses.** — L'intensité $g$ de la pesanteur étant variable avec la latitude et l'altitude, le poids P d'un corps, de masse $m$, c'est-à-dire la résultante des actions de la pesanteur sur la masse du corps, est une quantité variable d'un point à un autre du globe; un même corps, suspendu à un dynamomètre suffisammen sensible, ne lui ferait pas éprouver, aux divers points du globe, une flexion rigoureusement constante.

Mais ce n'est qu'exceptionnellement qu'on cherche à déterminer le poids véritable d'un corps, $P = mg$; le plus souvent, par exemple dans les transactions commerciales, ce qu'on a intérêt à connaître, c'est la quantité de matière contenue dans un corps, c'est-à-dire la *masse* du corps, évaluée en *grammes*. — Pour l'obtenir, on se sert de la *balance* et d'une *boîte de poids marqués*, qui contient des masses échantillonnées, égales au gramme, à ses multiples et à ses sous-multiples. — La balance permet de comparer, en un même lieu, le poids P d'un corps au poids $p$ d'un autre corps pris comme unité. Le rapport de ces poids est indépendant de la valeur de $g$ au lieu considéré; on a, en effet,

$$\frac{P}{p} = \frac{Mg}{mg} = \frac{M}{m}.$$

Le rapport des poids, fourni par la balance, est donc, en réalité, *le rapport des masses*. Si le corps pris comme unité est le gramme, on détermine le nombre de grammes dont le poids est équivalent au poids du corps; et ce nombre de grammes représente exactement la *masse* du corps (*). — Dans le langage usuel, on emploie constamment

(*) Pour avoir le poids du corps, en dynes, il faudrait multiplier le nombre qui mesure la masse par le nombre qui mesure l'intensité de la pesanteur, au point où l'on opère (57) : $P = mg$.

le mot *poids* pour le mot *masse;* c'est ce que nous ferons aussi le plus souvent, pour nous conformer à cet usage.

61. **Balance. — Justesse et sensibilité.** — La balance se compose essentiellement d'une barre rigide ou *fléau* AB (*fig.* 47), traversée, en son milieu C, par un couteau d'acier trempé, qui fait saillie des deux côtés : l'arête inférieure de ce couteau repose, de part et d'autre, sur deux petits plans d'acier trempé ou d'agate, situés l'un en avant, l'autre en arière du fléau, et dans un même plan horizontal; le fléau peut ainsi osciller librement autour de cette arête. Aux extrémités A et B du fléau sont fixés deux couteaux qui tournent en haut leurs arêtes vives, et sur lesquels s'appuient les crochets qui portent les plateaux

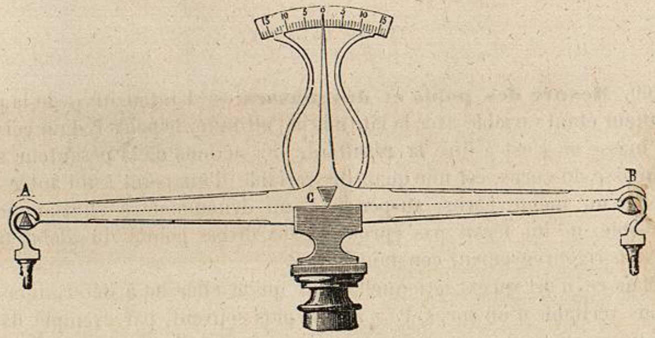


Fig. 47.

destinés à recevoir les corps, ou les poids marqués. — Les arêtes des trois couteaux, A, B, C, sont parallèles et situées dans un même plan; pour simplifier le langage, dans tout ce qui va suivre, nous les supposerons réduites à trois points *situés en ligne droite*, et nous nommerons *ligne du fléau* la droite qui joint ces points; nous appellerons *bras du fléau* les distances AC, BC, des couteaux extrêmes au couteau médian. — Perpendiculairement à la ligne du fléau, et en son milieu, est fixée une aiguille, dont l'extrémité peut parcourir un petit arc de cercle divisé, fixé au support de la balance. On a marqué zéro au point qui correspond à la position horizontale du fléau, et on a tracé des divisions symétriques, de part et d'autre de ce point.

Pour effectuer *une pesée*, la méthode vulgaire consiste à placer le corps dans l'un des plateaux, et des poids marqués dans l'autre plateau, jusqu'à ce que le fléau se tienne en équilibre dans la position horizontale. On fait la somme des poids marqués, et l'on considère cette somme comme exprimant le poids du corps lui-même.

Mais, pour qu'on puisse compter sur l'exactitude du résultat, il faut à la fois : 1° que la balance soit *juste*, c'est-à-dire que le fléau se tienne



horizontal sous la charge des masses égales placées dans les deux plateaux; 2° qu'elle soit *sensible*, c'est-à-dire que l'addition d'une masse très petite, d'un côté ou de l'autre, dérange le fléau de sa position d'équilibre. — Chacune de ces qualités correspond à des conditions géométriques particulières, qu'on cherche à réaliser dans la construction de la balance.

62. **Conditions géométriques de justesse.** — Nous allons démontrer qu'une balance est juste, lorsqu'elle satisfait à la fois aux deux conditions géométriques suivantes :

1° *Que le centre de gravité de la partie mobile (fléau et plateaux) soit sur une perpendiculaire à la ligne du fléau passant par le point de de suspension;*

2° *Que les deux bras du fléau soient d'égale longueur.*

En effet, soit AB (*fig.* 48) la ligne du fléau, et C le point de suspension : soit G le centre de gravité de la partie mobile (*) et supposons que ce point soit sur la perpendiculaire menée à AB par le point C. Si le fléau est placé horizontalement, et que les plateaux soient vides, le centre de gravité G du système sera dans la verticale du point

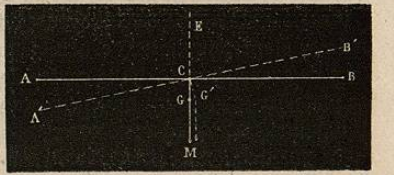


Fig. 48.

de suspension; il y aura donc équilibre (41), et le poids M de la partie mobile n'aura d'autre effet que d'appuyer l'axe sur ses supports. On voit même que, si le centre de gravité G est *au-dessous de l'axe* C, comme le suppose la figure, l'équilibre sera stable; car, si le fléau est écarté en A'B', le poids M de la partie mobile tendra à ramener le point G' en G, dans la verticale du point C et au-dessous de ce point. — Donc, si la première des conditions énoncées est remplie, lorsque les plateaux sont vides, le fléau placé horizontalement se tient en équilibre; et si le centre de gravité est au-dessous de l'axe de suspension, cet équilibre est stable.

Supposons maintenant, en outre, que les deux bras du fléau soient d'égale longueur, et plaçons dans les deux plateaux des masses égales. Les poids de ces masses agiront aux extrémités A et B comme deux forces verticales P,P (*fig.* 49), égales et parallèles : leur résultante sera une force égale à leur somme, et passant par le milieu de AB, c'est-à-dire

(*) D'après le mode de suspension des plateaux, quelle que soit l'inclinaison du fléau, les poids des plateaux seront toujours deux forces verticales *a*, *b*, appliquées respectivement aux points A et B. Pour définir le centre de gravité de la partie mobile, il faut donc considérer le centre de gravité du système solide, de forme invariable, constitué par le fléau, dont les divers points ont chacun un poids déterminé, et dont, en outre les points A et B auraient des poids supplémentaires *a* et *b*.

par le point C lui-même; elle pourra être considérée comme appliquée en C, et n'aura d'autre effet que de produire une pression de l'axe sur ses supports; donc le fléau restera horizontal. On voit même que, si le point G est placé au-dessous de l'axe C, le fléau écarté en A'B' sera encore ramené à la position AB par le poids M de la partie mobile. — Donc, si la seconde condition énoncée est remplie en même temps que la première, le fléau placé horizontalement reste en équilibre sous la charge de poids égaux; cet équilibre est stable, si le centre de gravité est au-dessous de l'axe de suspension.

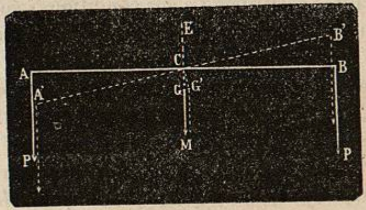

Fig. 49.

Il nous reste à dire quelques mots des cas où, les deux conditions de justesse étant remplies, le centre de gravité ne serait pas au-dessous de l'axe de suspension. — Si le centre de gravité était *sur l'axe lui-même*, les plateaux étant vides ou chargés de poids égaux, le fléau placé horizontalement serait en équilibre; mais s'il venait à être amené dans une autre position, il y demeurerait encore : il serait donc dans un état d'équilibre indifférent (41, 3°). — Enfin, si le centre de gravité était *au-dessus de l'axe*, la balance, vide ou chargée de poids égaux, serait encore en équilibre lorsque la ligne du fléau serait horizontale ; mais on voit que cet équilibre serait instable, c'est-à-dire que l'instrument se renverserait dès qu'on viendrait à l'écarter de cette position (41, 2°). Une semblable balance est dite *folle*. — Donc, pour qu'une balance remplissant les conditions de justesse soit d'un usage commode, il faut que le centre de gravité de la partie mobile soit *au-dessous de l'axe de suspension*, seul cas où la position horizontale du fléau constitue une position d'équilibre stable.

63. **Réalisation pratique des conditions de justesse.** — Pour réaliser les conditions de justesse, le constructeur cherche à faire le fléau et les plateaux aussi symétriques que possible, quant aux poids et aux dimensions de leurs diverses parties (*). — C'est pour conserver l'égalité des bras dans toutes les positions de l'instrument, qu'on fait reposer sur des arêtes vives les crochets qui supportent les plateaux :

(*) Si le fléau est absolument symétrique, par rapport à un plan passant par l'axe de suspension, et perpendiculaire à la ligne du fléau, le centre de gravité *du fléau considéré seul* est situé dans ce même plan. Si, en outre, les deux plateaux ont des poids rigoureusement égaux, on voit qu'on peut suspendre indifféremment chacun d'eux d'un côté et de l'autre, sans que le centre de gravité *du système* cesse d'être dans le même plan, c'est-à-dire sans que la première condition de justesse cesse d'être réalisée.



les points de contact de ces crochets avec le fléau restent ainsi toujours les mêmes, quelle que soit l'inclinaison du fléau.

64. **Constatation expérimentale de la justesse.** — La balance une fois construite, on peut vérifier si elle est juste, sans qu'il soit nécessaire d'avoir des poids dont l'égalité ait été préalablement constatée. Pour cela, on fait successivement les deux opérations suivantes :

1° On abandonne la balance à elle-même, les plateaux étant vides. Si le fléau s'arrête dans la position horizontale, on en peut conclure que le centre de gravité est convenablement placé (c'est la première condition de justesse). — S'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours corriger ce défaut de l'instrument, en ajoutant d'un côté, *une fois pour toutes*, une charge suffisante pour ramener le fléau à l'horizontalité.

2° Pour vérifier ensuite l'égalité des deux bras (seconde condition de justesse), on place un corps quelconque dans l'un des plateaux, et de la grenaille de plomb ou du sable dans l'autre, en quantité telle que l'aiguille s'arrête au zéro: l'équilibre étant établi, on transporte dans le plateau de droite la charge qui était à gauche, et dans le plateau de gauche celle qui était à droite : si l'aiguille revient encore au zéro, on peut affirmer que les bras sont égaux. — En effet, si l'un d'eux AC était plus petit que l'autre, on aurait été conduit à mettre d'abord du côté A une charge plus grande que du côté B; donc, en intervertissant les charges sans les modifier, on aurait placé la plus petite charge à l'extrémité du bras le plus court, et l'équilibre aurait été détruit. — Donc, si le fléau reste horizontal, les bras sont égaux, et la balance est définitivement juste.

65. **Conditions géométriques de sensibilité.** — 1° On dit qu'une balance a une sensibilité *constante*, lorsque l'équilibre étant établi, l'addition d'une surcharge déterminée, dans l'un des plateaux, fait toujours incliner le fléau d'un même angle, quelle que soit la charge primitive. — Pour qu'il en soit ainsi, la condition géométrique est *que les trois couteaux soient en ligne droite.*

2° Si l'on veut que la sensibilité soit *aussi grande que possible*, c'est-à-dire que, l'équilibre étant établi, l'addition d'une surcharge déterminée dans l'un des plateaux produise une inclinaison du fléau aussi grande que possible, il faut *que les bras soient aussi longs que possible, que le poids de la balance soit aussi petit que possible, et que son centre de gravité soit aussi voisin que possible de l'axe de suspension.*

Considérons, en effet, une balance dont les trois couteaux A,C,B soient en ligne droite (*fig.* 50). Cette balance étant supposée juste, et l'équilibre étant d'abord établi au moyen de poids égaux P,P', placés dans les plateaux, ajoutons dans le plateau de gauche, par exemple, une surcharge déterminée *p* : le fléau prend une nouvelle position A'B'; cherchons quel doit être l'angle de A'B' avec la position primitive AB. — La résultante des forces P et P' passant toujours par le point fixe C, il suffira d'exprimer que la force $p$, appliquée en A', fait équilibre au poids M de la balance elle-même, appliqué maintenant suivant G'M', ou, en d'autres termes, que la résultante des deux forces $p$ et M' passe par le point C. Or, transportons les points d'application des deux forces $p$

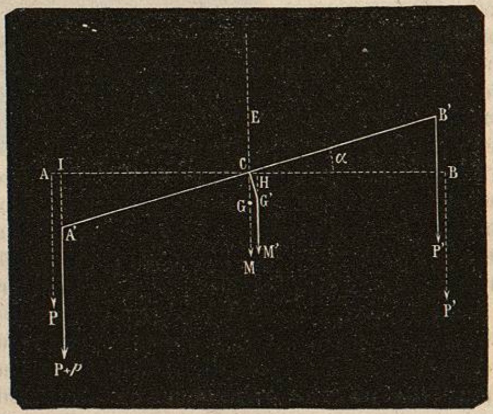


Fig. 50.

et M' aux deux points I et H où leurs directions prolongées vont rencontrer la direction AB, ces deux points étant supposés liés invariablement au fléau (13); pour que la résultante de ces deux forces parallèles passe par le point C, il faut et il suffit (15, 1°) que l'on ait :

$$\frac{CH}{CI} = \frac{p}{M}.$$

Désignons par $l$ la longueur du bras A'C; par $d$ la distance CG' du centre de gravité au point de suspension, et par $\alpha$ l'angle dont le fléau s'est incliné. Les triangles rectangles A'IC et G'HC donnent $CH = d \sin \alpha$ et $CI = l \cos \alpha$; en substituant ces valeurs dans la relation précédente, on a :

$$\frac{d \sin \alpha}{l \cos \alpha} = \frac{p}{M},$$

d'où

$$\tang \alpha = \frac{pl}{Md}.$$

On voit : 1° que cette expression est indépendante de la charge primitive; 2° que, pour une même valeur de la surcharge $p$, la tangente de l'angle $\alpha$ est *proportionnelle à la longueur* $l$ du bras du fléau, *en raison inverse du poids* M de la balance, *et en raison inverse de la distance* $d$ *de son centre de gravité à l'axe de suspension.*



Enfin, dans la pratique, l'inclinaison $\alpha$ étant toujours très petite, on peut prendre l'angle lui-même pour sa tangente. Dès lors, *pour une même balance*, les quantités $l$, M et $d$ étant constantes, les valeurs de l'inclinaison $\alpha$ sont proportionnelles aux valeurs de la surcharge $p$.

66. **Réalisation pratique des conditions de sensibilité.** — Il résulte de ce qui précède que, pour rendre une balance très sensible, le constructeur doit chercher à faire le fléau très long et très léger, et cependant assez rigide pour que, la balance étant chargée, la ligne du fléau reste toujours droite. — Ces conditions sont difficiles à concilier; cependant, on peut allier jusqu'à un certain point la légèreté à la rigidité, en taillant le fléau en forme de losange, dans une règle plate de bronze ou d'acier, et en évidant une grande partie de son intérieur, comme le montre la figure 51. — On appelle *limite de charge* d'une balance, le poids le plus grand qu'on puisse lui faire porter, sans faire fléchir sensiblement le fléau.

Enfin, on dit qu'une balance est sensible au *milligramme* ou au *centigramme*, selon qu'il suffit d'une surcharge d'un milligramme ou d'un centigramme pour faire incliner le fléau d'un angle appréciable.

Pour les besoins de la pratique, on construit des balances de dimensions très diverses, selon la nature des pesées qu'elles doivent effectuer. — Les unes sont destinées aux corps très légers; elles ont un fléau très faible, et peuvent être rendues sensibles au demi-milligramme. — D'autres sont destinées aux corps plus pesants : elles ont un fléau plus résistant et peuvent supporter, sans fléchir, des poids assez considérables. Ces dernières ne sont généralement guère sensibles qu'au centigramme; mais une erreur d'un centigramme sur un poids de plusieurs kilogrammes a peu d'importance, en sorte que la *sensibilité relative* de ces balances peut être comparable à celle des balances les plus délicates, à la condition qu'on les emploie à évaluer des poids suffisamment considérables.

67. **Méthode de la double pesée.** — Les conditions de justesse sont très rarement réalisées. La méthode de la double pesée, ou *méthode de Borda*, permet de faire une pesée exacte, même avec une balance qui n'est pas juste, pourvu que cette balance soit sensible. — Voici en quoi consiste cette méthode :

On place dans l'un des plateaux le corps à peser, et on lui fait équilibre en mettant du sable ou de la grenaille de plomb dans l'autre plateau : c'est ce qu'on appelle faire la *tare* du corps. On enlève ensuite le corps et on met des *poids marqués* à sa place, dans le même plateau, jusqu'à ce que l'aiguille revienne s'arrêter au zéro. Lors même que la balance ne serait pas juste, la somme de ces masses échantillonnées représente exactement la masse du corps, puisque le corps et les poids marqués, placés successivement *dans un même plateau*, ont fait équilibre à une même tare placée dans l'autre. — Il importe seulement que a balance soit sensible, afin qu'il n'y ait pas d'indécision quant à la valeur exacte du nombre de poids nécessaire pour rétablir l'équilibre.

C'est toujours à la méthode de la double pesée que l'on a recours, même avec les meilleures balances, quand on veut effectuer une pesée dont on puisse garantir l'exactitude.

68. **Balances de précision.** — Les balances précises offrent des détails de construction, variables d'un modèle à un autre, et destinés à assurer et à conserver la sensibilité. La figure 51 représente l'une des meilleures dispositions.

La balance est supportée par une colonne de fonte MN, établie sur une caisse reposant sur des vis calantes; la colonne porte à sa partie supérieure un support horizontal C, qui vient (en traversant une ouverture pratiquée dans le fléau) recevoir le couteau sur un plan d'agate. Le fléau a la forme d'un losange évidé ; il porte, à ses deux extrémités, des couteaux d'acier trempé, sur lesquels s'appuient des étriers E, E′ destinés à soutenir les plateaux (*fig.* 51). — Une pièce de fonte FF′, qu'on nomme la *fourchette*, peut s'élever ou s'abaisser à volonté, au moyen d'un système de leviers qui est contenu dans la colonne MN, et qu'on met en mouvement par la rotation du bouton G placé hors de la cage. Lorsque, en tournant ce bouton dans un sens convenable, on fait monter la fourchette, elle saisit d'abord par ses extrémités les étriers E, E′, qu'elle soulève un peu au-dessus de leurs couteaux ; puis, par les deux appendices H, H′, elle soulève le fléau, de façon que le couteau du milieu ne repose plus sur le plan C ; aucun des trois couteaux ne peut donc s'émousser par les frottements, quand la balance n'est pas en expérience. — Quand on veut faire une pesée, on fait descendre la fourchette en tournant le bouton G en sens contraire ; elle replace alors successivement le fléau sur le plan C, puis les étriers sur leurs couteaux, et la balance oscille librement (*).

Les oscillations du fléau étant accusées par les mouvements de l'aiguille sur son cadran, elles sont d'autant plus faciles à apprécier que l'aiguille est plus longue. Or, lorsque l'aiguille est placée au-dessus du fléau, comme dans la figure 47, on ne peut en accroître la longueur sans augmenter la hauteur de l'instrument; les balances de précision portent une aiguille *ab*, placée au-dessous du fléau (*fig.* 51), et dont l'extrémité se meut sur un petit cadran d'ivoire, fixé à la partie inférieure de la colonne.

(*) La figure 51 représente une disposition particulière, dans laquelle le premier étrier E en supporte un second *e*, mobile sur lui autour d'un axe qui passe par les pointes des deux vis V : les mouvements de ces deux étriers, qui s'effectuent respectivement autour de deux axes horizontaux, perpendiculaires entre eux, permettent aux plateaux d'obéir librement à la pesanteur, en quelque point de leur surface qu'on place les poids.



La sensibilité de l'instrument dépendant de la distance du centre de gravité à l'axe de suspension (65), on fait en sorte de pouvoir, pour les recherches précises, déplacer un peu ce centre de gravité. Pour cela,

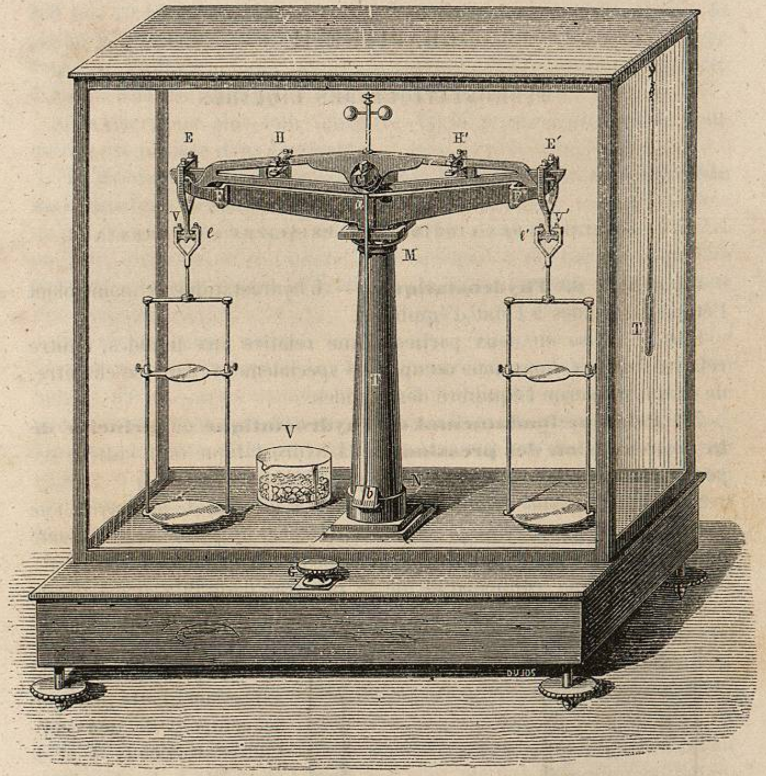


Fig. 51. — Balance de précision.

on fixe, au milieu du fléau, une tige verticale sur laquelle on peut faire mouvoir, au moyen d'un pas de vis, soit une virole métallique, comme on le voit dans un grand nombre de balances, soit une tige horizontale portant à ses extrémités de petites boules massives, comme dans la figure 51 (*).

(*) La balance est entourée d'une cage de verre, qui la préserve des mouvements dus aux courants d'air. Pour éviter l'oxydation des pièces d'acier, on dessèche l'air intérieur de la cage en y plaçant un vase V qui contient, soit de la chaux vive, soit du chlorure de calcium.