parhélies. — Ordinairement, on observe aussi une image blanche de l'astre, au point du cercle parhélique qui est diamétralement opposé au soleil; on lui donne le nom d'*anthélie* ou de *faux-soleil.* — Lorsque l'arc AA′ enveloppe

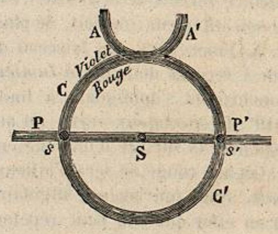

Fig. 704.

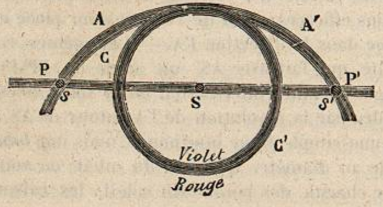

Fig. 705.

le halo de 23° (*fig.* 705), les parhélies *s* et *s′* apparaissent aux intersections de cet arc AA′ avec le cercle parhélique.

Le cercle parhélique est dû à la réflexion de la lumière solaire, sur les faces des prismes de glace qui sont placées verticalement.

941. **Couronnes.** — Les *couronnes* sont encore des cercles colorés, qui apparaissent autour du soleil ou autour de la lune. Elles se distinguent des halos par une disposition inverse des couleurs : le rouge est toujours *à l'extérieur*, le violet *à l'intérieur;* leur diamètre est d'ailleurs bien moindre que celui des halos. — On observe fréquemment plusieurs couronnes concentriques : l'angle sous lequel on voit le rayon de la couronne intérieure varie depuis 1°30′ jusqu'à 4°.

Le phénomène des couronnes est dû à l'action exercée sur les rayons solaires par les nuages formés de gouttelettes sphériques, sensiblement égales entre elles. — On peut le reproduire artificiellement, en saupoudrant de lycopode une lame de verre, à travers laquelle on regarde la flamme d'une bougie placée à une certaine distance

PROBLÈMES

PROBLÈMES SUR LA PESANTEUR ET L'HYDROSTATIQUE

I. *Dans une machine d'Atwood, chacune des masses égales pèse 240 grammes, la masse additionnelle pèse 10 grammes. On sait que l'accélération de la chute libre des corps est égale à 9m,80. — Évaluer, en faisant usage du système d'unités C, G, S. : 1° la force qui met le système en mouvement; 2° la masse mise en mouvement; 3° la hauteur de chute, pour une durée de la chute égale à 5 secondes.*

Solution. — 1° Puisque l'accélération de la chute libre est égale à 980 centimètres, l'intensité de la pesanteur est de 980 *dynes :* c'est la force qui sollicite à tomber le *gramme-masse.* Or, dans le cas actuel, la force qui met le système en mouvement est le poids de la masse additionnelle; cette force est donc égale à $10 \times 980 = 9800$ dynes.

2° La masse mise en mouvement est évidemment $2 \times 240 + 10 = 490$ grammes.

3° L'accélération γ du mouvement, évaluée en centimètres, s'obtient en faisant le quotient de la force, évaluée en dynes, par la masse, évaluée en grammes : on a donc $\gamma = \frac{9800}{490} = 20$ centimètres. — L'espace parcouru pendant la première seconde de la chute est la moitié de l'accélération, 10 centimètres; l'espace parcouru pendant les cinq premières secondes est 25 fois plus grand, c'est-à-dire 250 centimètres.

II. *Le fil qui s'enroule sur la poulie d'une machine d'Atwood supporte, à ses deux extrémités, deux masses égales chacune à 240 grammes; l'une de ces masses, ramenée à la division zéro, est surchargée d'une masse additionnelle cylindrique de 5 grammes, et d'une masse de forme allongée, égale aussi à 5 grammes. On dispose le curseur annulaire de manière à arrêter la masse de forme allongée au bout de 2 secondes de chute. On demande de trouver l'équation du mouvement : 1° quand la durée de la chute est inférieure à deux secondes; 2° quand la durée de la chute dépasse 2 secondes. — On sait que l'accélération de la chute libre est de 9m,80. — On fera usage des unités C, G, S.*

Solution. — La force qui sollicite le système, évaluée en dynes, est égale à $10 \times 980 = 9800$ dynes, dans la première partie de la chute; elle n'est plus que $5 \times 980 = 4900$ dynes, dans la seconde partie. — La masse entraînée est d'abord de $2 \times 240 + 10 = 490$ grammes : elle n'est plus ensuite que de $2 \times 240 + 5 = 485$ grammes. — L'accélération du mouvement s'obtient, dans les deux cas, en faisant le quotient de la force par la masse : $\gamma = \frac{F}{m}$. On trouve ainsi, avant que le curseur annulaire ait arrêté la masse de forme allongée, $\gamma = 20$ centimètres; après que cette masse a été arrêtée, c'est-à-dire au bout de 2 secondes, $\gamma' = 10^{cm},10$.

Si t est inférieur à 2 secondes, la vitesse et l'espace parcouru sont donnés par les deux équations :

$$v = 20 \times t, \qquad e = 10 \times t^2. \tag{1}$$

En particulier, quand $t = 2$, on a $e = 40$, $v = 40$. Le curseur annulaire est donc placé à 40 centimètres du zéro, et quand le système mobile abandonne la masse de forme allongée, sa vitesse est de 40 centimètres. Cette vitesse est la vitesse initiale v_0 du second mouvement, uniformément accéléré, qui succède au premier; l'accélération devient alors $10^{cm},10$; et si l'on compte toujours l'espace parcouru à partir du zéro de la règle, les deux équations du mouvement sont :

$$(2) \qquad v = 40 + 10,10\,(t-2), \qquad e = 40 + 40\,(t-2) + 5,05\,(t-2)^2.$$

III. *On a laissé tomber une pierre au fond d'un puits, et l'on a entendu le bruit de la chute au bout de 4 secondes et demie. Quelle est la profondeur du puits? — On supposera que le son se propage d'un mouvement uniforme, avec une vitesse de 340 mètres par seconde.*

Solution. — Représentons par T le temps écoulé entre le départ de la pierre et le moment où le bruit de la chute est parvenu à l'oreille : soient t la durée de la chute, et x la profondeur inconnue du puits. En désignant par g l'intensité de la pesanteur, on aura

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2}gt^2.$$

D'autre part, le bruit de la chute a mis, pour parvenir à l'oreille, un temps $T - t$; donc, si v est la vitesse de propagation du son, on a

$$x = v\,(T - t); \qquad \text{d'où} \qquad t = T - \frac{x}{v};$$

en substituant cette valeur de t dans l'équation (1), on arrive à l'équation du second degré

$$x^2 - 2\left(vT + \frac{v^2}{g}\right)x + v^2T^2 = 0;$$

d'où l'on tirera, réductions faites,

$$x = vT + \frac{v^2}{g} \pm \sqrt{\left(2vT + \frac{v^2}{g}\right)\frac{v^2}{g}}.$$

Or, remarquons que la hauteur x du puits doit être inférieure au produit vT, qui exprimerait l'espace parcouru par le son dans le temps T : donc la valeur de x qui correspond au signe négatif du radical est la seule qui convienne au problème actuel. En remplaçant les lettres par leurs valeurs numériques, on trouve $x = 88^m,2$.

IV. *Calculer la vitesse acquise par un corps pesant qui tombe d'une hauteur égale à 20 mètres, en un lieu de la Terre où la longueur du pendule qui bat la seconde est de 98 centimètres. — On négligera la résistance de l'air.*

Solution. — Représentons par g l'accélération de la chute, exprimée en mètres, et par v la vitesse. On a

$$v = \sqrt{2\,g \times 20}.$$

Quant à la valeur de g, elle est donnée par la formule du pendule ; la longueur du pendule simple est $0^m,98$, la durée de l'oscillation est 1 seconde ; on a donc

$$1 = \pi\sqrt{\frac{0,98}{g}} \qquad g = \pi^2 \times 0,98.$$

En portant cette valeur de g dans l'expression de la vitesse, il vient :

$$v = \pi\sqrt{2 \times 0,98 \times 20} = 19^m,67.$$

V. *Sur un couteau ayant son arête horizontale, on dispose, perpendiculairement à cette arête, une tige pesante de poids* p *et de longueur* l, *supportant à ses extrémités des poids* P *et* Q. *Calculer les distances* x *et* y *du couteau aux extrémités de la tige, lorsque celle-ci se tient horizontalement en équilibre.*

Solution. — Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la résultante des trois forces P, Q, et p passe par l'arête du couteau. — Or, on peut remplacer cette dernière force p,

appliquée au milieu de la tige, par deux forces égales à $\frac{p}{2}$, dont les points d'application sont les deux extrémités de la tige. Il suffit alors d'exprimer que la résultante des forces $P + \frac{p}{2}$ et $Q + \frac{p}{2}$, appliquées à distances x et y de l'arête du couteau, doit passer par cette arête ; on aura donc

$$\frac{P + \frac{p}{2}}{Q + \frac{p}{2}} = \frac{y}{x}, \qquad \text{et } x + y = l.$$

En résolvant ces deux équations, on trouve :

$$x = l\,\frac{Q + \frac{p}{2}}{P + Q + p} \qquad y = l\,\frac{P + \frac{p}{2}}{P + Q + p}.$$

VI. *Deux mobiles sont lancés successivement de bas en haut, avec la même vitesse initiale* a : *l'intervalle de temps qui s'écoule entre le départ du premier et le départ du second est égal à* θ. — *On demande : 1° à quelle hauteur et à quel instant ils se rencontreront; 2° de quelles vitesses ils seront animés à l'instant de leur rencontre.*

Solution. — Représentons par t le temps qui s'écoule entre le départ du premier mobile et l'instant de la rencontre, par e la hauteur à laquelle les deux mobiles se rencontrent, par v et v' leurs vitesses au moment de la rencontre, ces deux quantités étant comptées positivement de bas en haut. En désignant par g l'accélération de la chute libre, et remarquant que le mouvement des deux mobiles est uniformément retardé, on aura, pour le premier mobile,

$$(1) \qquad e = at - \frac{1}{2}gt^2, \qquad v = a - gt.$$

La considération du mouvement du second mobile nous donnera une deuxième expression de e, et la valeur de v', en remplaçant, dans les équations (1), t par $t - \theta$; on a ainsi

$$(2) \qquad e = a\,(t - \theta) - \frac{1}{2}g\,(t - \theta)^2 \qquad v' = a - g\,(t - \theta)$$

En égalant les deux expressions (1) et (2) de la même quantité e, on obtient une équation du premier degré, qui donne la valeur de t; en portant cette valeur dans les expressions de e, v, et v', on obtient les résultats suivants :

$$t = \frac{2\,a + g\,\theta}{2\,g}, \qquad e = \frac{4\,a^2 - g^2\,\theta^2}{8\,g}, \qquad v = -\,g\,\frac{\theta}{2}, \qquad v' = +\,g\,\frac{\theta}{2}.$$

On voit que, à l'instant de la rencontre, les deux mobiles sont animés de vitesses égales et de signes contraires : le premier mobile descend, tandis que le second s'élève. — La hauteur e doit être positive, c'est-à-dire que l'on doit avoir $\theta < \frac{2\,a}{g}$; en d'autres termes, le second mobile doit être lancé avant que le premier mobile soit revenu au point de départ.

VII. *Le petit piston d'une presse hydraulique a une section de 15 centimètres carrés la pression qu'on exerce sur lui est de 40 kilogrammes. On demande : 1° quelle pression exercera le gros piston quand il cessera de pouvoir s'élever, en supposant que sa section soit de 3 décimètres carrés; 2° quelle section on devrait donner au gros piston, pour qu'il pût exercer une pression de 2000 kilogrammes.*

Solution. — 1° La pression exercée par le petit piston sur chaque centimètre carré est $\frac{40^{kil}}{15}$ donc la pression transmise à la surface inférieure du gros piston sera

$\frac{40^{kil}}{15} \times 300$, ou 800 kilogrammes ; ce sera aussi la pression que ce piston pourra exercer sur le corps soumis à son action.

2° Pour que le gros piston pût exercer une pression de 2000 kilogrammes, il faudrait que sa section contînt autant de centimètres carrés que 2000 kilogrammes contiennent de fois $\frac{40^{kil}}{15}$, c'est-à-dire que sa section fût égale à $2000 : \frac{40}{15}$, ou 750 centimètres carrés.

VIII. *On a un cylindre d'acier, de 22 centimètres de longueur, qu'on voudrait lester avec un cylindre de platine de même diamètre, de manière qu'il se tînt verticalement flottant dans du mercure, la partie non plongée du cylindre d'acier n'étant que de 2 centimètres : quelle longueur faut-il donner au cylindre de platine?*

Solution. — Désignons par d la densité du platine, par d' celle de l'acier et par d'' celle du mercure; appelons x la longueur du cylindre de platine. Exprimons que le poids du corps plongé et le poids du mercure déplacé sont égaux entre eux; nous aurons

$$dx + 22d' = (20 + x)d'' ;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{20d'' - 22d'}{d - d''} ;$$

et il suffira de remplacer d, d' et d'' par leurs valeurs, pour avoir la valeur numérique de x.

IX. *Quel est le rapport des poids* x *et* y *de deux cylindres de fer et de platine qu'il faudrait fixer l'un à l'autre, pour que le système pût se maintenir en équilibre au milieu du mercure? — Densité du fer,* 7,8; *densité du platine,* 21; *densité du mercure,* 13,6.

Solution. — Les poids des cylindres étant x et y, leurs volumes seront respectivement $\frac{x}{7,8}$ et $\frac{y}{21}$. Le volume du mercure déplacé sera égal à la somme de ces volumes, et le poids du mercure déplacé sera $\left(\frac{x}{7,8} + \frac{y}{21}\right) 13,6$. — Ce poids devant être égal à la somme des poids des deux cylindres, on aura

$$\left(\frac{x}{7,8} + \frac{y}{21}\right) 13,6 = x + y ;$$

d'où

$$x\left(\frac{13,6}{7,8} - 1\right) = y\left(1 - \frac{13,6}{21}\right),$$

ce qui donne

$$\frac{x}{y} = 0,474.$$

X. *Un morceau de platine et une boule de cire se font équilibre dans les plateaux d'une balance parfaitement juste. Calculer le rapport des masses de ces deux corps, en tenant compte de la poussée qu'ils éprouvent de la part de l'air. — Densité du platine,* 21; *densité de la cire,* 0,96; *densité absolue de l'air,* 0,0013.

Solution. — Soit m la masse du platine; son volume, exprimé en centimètres cubes, est $\frac{m}{21}$, et par suite la masse de l'air qu'il déplace est $\frac{m}{21} \times 0,0013$. De même, m' étant la masse de la cire, la masse de l'air qu'elle déplace est $\frac{m'}{0,96} \times 0,0013$. Or, les poids apparents de ces deux corps dans l'air étant égaux, on a, en désignant par g l'intensité de la pesanteur,

$$\left(m - \frac{m}{21} \times 0,0013\right) g = \left(m' - \frac{m'}{0,96} \times 0,0013\right) g ;$$

d'où l'on déduira facilement

$$\frac{m}{m'} = \frac{21\,(0,96 - 0,0013)}{0,96\,(21 - 0,0013)} = \frac{20,132700}{20,158752} = 0,9987.$$

XI. *Une sphère de platine et un cylindre de cuivre, ayant même diamètre, sont suspendus aux deux extrémités d'une balance parfaitement juste, et plongent, la première, dans du mercure; le second, dans l'eau. Quelle doit être la hauteur du cylindre pour que le fléau se tienne horizontal? — Poids spécifique du platine,* 22; *poids spécifique du cuivre,* 8,8; *poids spécifique du mercure,* 13,6.

Solution. — Soient d le diamètre commun de la sphère et du cylindre, h la hauteur inconnue du cylindre; on verra facilement que le poids apparent de la sphère de platine dans le mercure est $\frac{1}{6}\pi d^3(22 - 13,6)$; le poids apparent du cylindre de cuivre dans l'eau est $\frac{1}{4}\pi d^2 h(8,8 - 1)$. En égalant ces deux expressions, supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}\pi d^2$, et effectuant les calculs, on arrive à l'équation

$$h \times 3,9 = d \times 2,8 ; \quad \text{d'où} \quad h = d \times 0,718.$$

L'équilibre aura lieu, pour une valeur quelconque du diamètre commun de la sphère et du cylindre, si la hauteur du cylindre est égale aux 0,718 de ce diamètre.

XII. *On fait passer de l'acide chlorhydrique gazeux dans l'eau, jusqu'à ce qu'on obtienne l'hydrate de formule* $HCl + 16HO$, *dont la densité est* 1,12. *Trouver l'accroissement de volume de l'eau, et le volume du gaz dissous dans un litre d'eau. On sait que* 1 *litre d'acide chlorhydrique gazeux pèse* $1^{gr},614$.

Solution. — Supposons que l'on fasse passer le gaz dans 1 litre d'eau, et cherchons la masse de gaz chlorhydrique qui entre en combinaison avec 1000 grammes d'eau pour former l'hydrate $HCl + 16HO$. D'après la formule même, $36^{gr},5$ de gaz se combinent avec 144 grammes d'eau; donc 1000 grammes d'eau absorbent $253^{gr},472$ de gaz chlorhydrique. Puisque 1 litre de ce gaz pèse $1^{gr},614$, le volume de gaz absorbé par 1 litre d'eau est égal à $\frac{253,472}{1,614} = 157$ litres.

La masse de l'hydrate obtenue est de $1253^{gr},472$, et le volume, évalué en centimètres cubes, est $\frac{1253,472}{1,12} = 1119$. — Le volume de l'eau s'est accru de $0^{lit},119$.

XIII. *Un vase cylindrique, de section* S *renferme un liquide de densité* D, *à la surface duquel on fait flotter un cylindre de bois, de section* s, *de hauteur* h *et de densité* d. *On demande : 1° la hauteur de la partie du cylindre immergée; 2° de combien le niveau s'est élevé dans le vase; 3° l'accroissement de la pression sur le fond du vase.*

Solution. — 1° Soit x la hauteur de la partie immergée; exprimons que le poids du cylindre de bois est égal au poids du liquide qu'il déplace, nous aurons

$$sxD = shd, \quad \text{d'où} \quad x = h\frac{d}{D}.$$

2° Le niveau du liquide s'est élevé comme si l'on avait versé dans le vase un volume de liquide $sx = sh\frac{d}{D}$; l'addition de ce volume du liquide, dans un vase cylindrique de section S, produira une élévation du niveau exprimée par $y = h\frac{sd}{SD}$.

3° La pression sur le fond du vase s'est accrue du poids de la colonne liquide ayant pour base le fond du vase et pour hauteur l'accroissement du niveau; l'augmentation de la pression est donc $SyD = shd$. La pression sur le fond du vase a donc augmenté du poids du cylindre qui flotte à la surface du liquide.

XIV. *Un aréomètre de Baumé, destiné aux liquides plus denses que l'eau, marque 66 degrés dans l'acide sulfurique concentré. Quelle est la densité de cet acide, sachant que la densité de la solution saline qui a servi à marquer le 15e degré de l'instrument est 1,1136?*

Solution. — Soit l'aréomètre représenté par la figure 95; appelons V le volume de liquide, exprimé en centimètres cubes, qu'il déplace quand il affleure au zéro, et v le volume de liquide que déplace une division de l'instrument. Quand l'aréomètre flotte dans l'eau, il affleure au zéro; le volume de l'eau déplacée est donc V centimètres cubes, et le poids de cette eau est V grammes; ce nombre exprime aussi le poids du corps flottant (91). Quand l'aréomètre flotte dans l'acide sulfurique, il affleure au 66e degré; le volume de l'acide déplacé est donc $V - 66v$, et le poids de cet acide, exprimé en grammes, est $(V-66v)x$, x désignant la densité cherchée, ce nombre $(V-66v)x$ exprime aussi le poids du corps flottant. Enfin, quand l'aréomètre flotte dans la solution saline dont la densité est 1,1136, et qu'il affleure au 15e degré, le poids du liquide déplacé est $(V-15v)\,1{,}1136$; c'est encore une expression du poids du corps flottant.

Si l'on égale successivement la première de ces expressions du poids de l'aréomètre à chacune des deux autres, on aura deux équations, savoir

$$V = (V - 66v)x,$$
$$V = (V - 15v)1{,}1136.$$

Chaque terme de ces équations renfermant soit V, soit v, nous n'avons en réalité que deux inconnues, x et $\frac{v}{V}$; en posant $\frac{v}{V} = r$ et divisant les deux membres de chaque équation par V, nous aurons

$$1 = (1 - 66r)x,$$
$$1 = (1 - 15r)1{,}1136.$$

La seconde donne $r = \frac{0{,}1136}{16{,}7040}$ ou $r = \frac{1136}{167040}$; en substituant dans la première, et résolvant par rapport à x, il vient

$$x = \frac{167040}{92064} = \frac{5220}{2877} = 1{,}814.$$

La densité cherchée est donc 1,814.

XV. *Un aréomètre de Baumé, destiné aux liquides moins denses que l'eau (fig. 96), est plongé dans l'alcool absolu ayant pour densité 0,804. A quel degré affleure-t-il dans ce liquide, sachant que la densité de la solution qui a servi à marquer le zéro est 1,0855?*

Solution. — Ce problème se traitera comme celui qui précède. — L'aréomètre plongé dans l'alcool absolu, marque 30°,9.

XVI. *Un ballon contenant de l'air à la pression de 770 millimètres de mercure est ajusté, au moyen d'une monture à robinet, à la partie supérieure d'un baromètre à cuvette, dont le tube a une section de 2 centimètres carrés et une longueur de 90 centimètres au-dessus du niveau du mercure dans la cuvette. La pression extérieure étant de 760 millimètres, on ouvre le robinet; le mercure s'abaisse dans le tube, de telle sorte que sa surface ne se trouve plus qu'à 10 centimètres au-dessus du niveau dans la cuvette. On demande d'en déduire la capacité du récipient, en supposant que la température soit restée invariable pendant l'expérience.*

Solution. — Soit x le volume du récipient, exprimé en centimètres cubes. Avant l'ouverture du robinet, le volume d'air contenu dans l'appareil est x, sa pression est 770 millimètres; quand le robinet est ouvert, le volume de cet air devient $x + 2(90-10)$, ou $x + 160$, et sa pression est $760 - 100$ millimètres, ou 660 millimètres. D'après la loi de Mariotte, le produit de chacun de ces volumes par la pression correspondante étant constant (141), on a :

$$x \times 770 = (x + 160)660;$$

d'où l'on tirera $x = 960^{cc}$.

XVII. *On a construit un baromètre à cuvette sans se préoccuper d'en chasser complètement l'air, de sorte que la chambre barométrique contient une quantité inconnue de ce gaz. On fait une première observation, dans laquelle on mesure successivement la hauteur de la colonne de mercure, qui est 748 millimètres, et la longueur de la chambre barométrique, qui est 122 millimètres. On soulève alors un peu le tube et l'on constate que la hauteur du liquide devient 750 millimètres, la chambre barométrique acquérant une longueur de 141 millimètres. Quelle est la pression atmosphérique au moment de l'expérience, en supposant que le tube soit bien cylindrique, au moins dans sa partie supérieure?* (*)

Solution. — Soit x la pression atmosphérique inconnue. Dans la première observation, le volume de l'air, représenté par la longueur qu'il occupe dans le tube, est 122; sa force élastique est $x - 748$. Dans la seconde observation, le volume de cet air est 141; sa force élastique est $x - 750$. On a donc :

$$(x - 748)122 = (x - 750)141;$$

d'où l'on tirera $x = 762^{mm},8$.

XVIII. *Un eudiomètre à mercure, de section uniforme dans toute sa longueur, est placé sur la cuve à mercure; il contient du gaz ammoniac, sur une longueur de 10 centimètres; le mercure s'élève dans le tube à 25 centimètres au-dessus de sa surface libre dans la cuvette. On fait passer dans l'eudiomètre une série d'étincelles électriques (fig. 340), jusqu'à ce que le gaz soit complètement décomposé; trouver la longueur occupée par le gaz. — Le baromètre marque 76 centimètres.*

Solution. — Soit s la section du tube; le volume du gaz ammoniac est égal à $10 \times s$, sous la pression $76 - 25 = 51$; si le gaz était sous la pression atmosphérique, son volume serait donc $s\frac{10 \times 51}{76}$. — Après le passage des étincelles, le volume du mélange d'azote et d'hydrogène est $x \times s$, en désignant par x la longueur cherchée, exprimée en centimètres; la longueur de la partie de l'eudiomètre, qui est en dehors de la cuve à mercure, est $10 + 25 = 35$ centimètres; la hauteur occupée par le mercure est donc $35 - x$, et par suite la pression du mélange gazeux est $76 - (35 - x) = 41 + x$. Si le gaz était sous la pression 76, il occuperait le volume $s\frac{x(41+x)}{76}$. — Or, on sait que le volume du mélange d'azote et d'hydrogène est le double du volume primitif du gaz ammoniac, ces deux volumes étant mesurés sous la même pression; on a donc

$$2 \times s\frac{10 \times 51}{76} = s\frac{x(41+x)}{76},$$

ou

$$x^2 + 41x - 1020 = 0.$$

On doit rejeter la racine négative; on prendra donc le signe + devant le radical :

$$x = -20{,}5 + \sqrt{20{,}5^2 + 1020};$$

en faisant le calcul, on trouve $x = 17^{cm},2$.

(*) Cette méthode est applicable à la construction de baromètres dont on pourrait enlever le liquide, en voyage, pour éviter les chances de rupture, et qu'on remplirait seulement au moment de l'observation, sans se préoccuper d'en expulser complètement l'air : le tube pourrait être complètement métallique, en fer par exemple, sauf la partie supérieure, qui serait formée par un tube de verre assez court et parfaitement cylindrique (ARAGO, *Astronomie populaire*).

XIX. *Un tube cylindrique vertical, de longueur* l *et de section* b, *est rempli de mercure; l'extrémité supérieure est bouchée, l'autre extrémité est effilée, et communique avec un cylindre de longueur* L *et de section* B, *rempli d'air sec sous la pression atmosphérique. On débouche le tube, et on demande quelle sera la hauteur du mercure dans le tube, quand l'écoulement s'arrêtera. La hauteur barométrique est* H.

Solution. — Puisque le tube fermé à sa partie supérieure est rempli de mercure, sa longueur l doit être inférieure à la hauteur barométrique H.

Le volume de la masse gazeuse isolée dans le cylindre est BL, sous la pression H. — Quand on débouche le tube, le mercure s'écoule : le volume de l'air étant réduit, sa force élastique augmente, et l'équilibre s'établit quand il ne reste plus dans le tube qu'une hauteur x de mercure. Alors la force élastique de l'air est $H+x$; le volume de mercure qui a passé dans le cylindre est $b(l-x)$, et le volume occupé par l'air est $BL-b(l-x)$. On a donc, en appliquant la loi de Mariotte :

$$(BL - bl + bx)(H + x) = BLH.$$

Les deux racines de cette équation sont de signes contraires; la racine positive convient seule.

XX. *Dans un récipient rempli d'air sec sous la pression de 750 millimètres, on fait le vide jusqu'à une pression* x, *et on fait entrer de l'hydrogène dans le récipient, jusqu'à ce que le mélange soit sous la pression de 750 millimètres. On fait encore une fois le vide, sous la pression* x, *et on fait de nouveau entrer de l'hydrogène jusqu'à ce que la pression du mélange soit de 750 millimètres. Trouver quelle doit être la valeur de* x, *pour que le poids de l'hydrogène soit la dixième partie du poids de l'air avec lequel il est mélangé. — La densité de l'hydrogène est* 0,069.

Solution. — Après la première opération, il reste dans le récipient une fraction de l'air initial égale à $\frac{x}{750}$. — Quand on fait le vide la seconde fois, on laisse dans le récipient cette même fraction du mélange, et par conséquent, on laisse dans le récipient la fraction $\left(\frac{x}{750}\right)^2$ de l'air qui primitivement remplissait le récipient : la pression de l'air dans le récipient est donc : $750 \times \left(\frac{x}{750}\right)^2 = \frac{x^2}{750}$. Par suite, la pression de l'hydrogène est : $750 - \frac{x^2}{750}$. Si l'on désigne par V le volume du récipient, et par a le poids de l'unité de volume d'air, les poids de l'air et de l'hydrogène sont alors respectivement :

$$\frac{Va}{760} \times \frac{x^2}{750}, \qquad \frac{Va \times 0{,}069}{760}\left(750 - \frac{x^2}{750}\right)$$

Ces deux poids doivent être dans le rapport de 10 à 1 : l'inconnue est donc déterminée par l'équation

$$x^2 = 10 \times 0{,}069\,[750^2 - x^2].$$

On trouve, en effectuant les calculs, $x = 479$ millimètres.

XXI. *Dans une éprouvette graduée, placée sur la cuve à mercure, et contenant un volume* v *d'eau, sans air, on introduit un volume* V *d'un mélange d'acide carbonique et d'oxyde de carbone, sous la pression* H. — *Après un certain temps, le volume occupé par le gaz est devenu* V_1, *sous la pression* H_1. *De ces données, et des coefficients de solubilité* c' *et* c'' *des deux gaz, déduire la composition du mélange.*

Solution. — Soient x' et x'' les pressions de l'acide carbonique et de l'oxyde de carbone dans le mélange, occupant le volume V avant la dissolution. On a :

$$x' + x'' = H. \tag{1}$$

Après la dissolution d'une partie de chacun des gaz, la force élastique de l'acide carbonique au-dessus de l'eau est f', celle de l'oxyde de carbone est f''; et l'on a

$$f' + f'' = H_1. \tag{2}$$

Avant la dissolution, l'acide carbonique occupait un volume V, sous la pression x'; après la dissolution, une partie de ce gaz occupe le volume V_1 sous la pression f', et l'autre partie peut être considérée comme occupant le volume $c'v$ sous la même pression f'; on a donc

$$(V_1 + c'v)\, f' = Vx'. \tag{3}$$

On aurait de même, en considérant l'oxyde de carbone,

$$(V_1 + c''v)\, f'' = Vx''. \tag{4}$$

Des équations (3) et (4) on tire les valeurs de f' et de f''; en les portant dans l'équation (2), on a une équation en x' et x'', qui, combinée avec l'équation (1), donne les valeurs de x' et de x'' :

$$x' = \frac{(V_1 + c'v)(VH - V_1H_1 - c''vH_1)}{Vv\,(c' - c'')}; \qquad x'' = \frac{(V_1 + c''v)(VH - V_1H_1 - c'vH_1)}{Vv\,(c'' - c')}$$

XXII. *Un gros tube cylindrique vertical* M, *ouvert à sa partie supérieure, et un petit tube cylindrique vertical* m, *fermé à sa partie supérieure, communiquent entre eux, par leurs parties inférieures, au moyen d'un tube de jonction; le premier,* M, *a une section de 50 centimètres carrés; le second,* m, *a une section quelconque. On a versé du mercure dans l'appareil, et l'on a enfermé ainsi dans le tube* m *un certain volume d'air qui y occupe une longueur de* $2^m,15$, *les niveaux du liquide dans les deux branches étant dans le même plan horizontal. Quelle pression, en kilogrammes, devrait-on exercer sur le liquide du tube* M, *à l'aide d'un piston qui s'adapterait exactement dans ce tube, pour que l'air n'occupât plus, dans le tube* m, *qu'une longueur de* $0^m,52$? — *Le tube* m *est supposé assez étroit, par rapport à* M, *pour que le niveau du mercure n'ait pas sensiblement baissé dans* M; *la température reste invariable pendant l'expérience, et la pression barométrique est de 760 millimètres.*

Solution. — Menons un plan horizontal par la face inférieure du piston, quand l'air du tube m est réduit au volume indiqué dans l'énoncé : deux surfaces égales, prises dans ce plan, et situées l'une dans le cylindre M, l'autre dans le tube m, doivent supporter des pressions égales. Or, une surface de 1 centimètre carré, prise à ce niveau dans le tube, supporte : 1° la pression due au poids du mercure dont la hauteur est $2^m,15 - 0^m,52$, ou 163^c; 2° la pression exercée par l'air comprimé, qui équivaut au poids d'une colonne de mercure ayant pour hauteur $76^c \times \frac{215}{52}$. Cette surface supporte donc une pression totale exprimée par le poids d'une colonne de mercure ayant pour base 1 centimètre carré, et pour hauteur $163 + 76 \times \frac{215}{52}$, ou $\frac{24816^c}{52}$. La valeur de cette pression, en grammes, est donc $\frac{24\,816 \times 13{,}6}{52}$ ou $\frac{337497^{gr},6}{52}$. Donc enfin, le piston du tube M, qui a une surface de 50 centimètres carrés, supportera une pression de $\frac{337\,497^{gr},6 \times 50}{52}$, ou approximativement de $324^{kil},5$.

XXIII. *Un corps de pompe cylindrique, auquel on veut donner une hauteur de 90 centimètres, est terminé inférieurement par un tuyau d'aspiration cylindrique, dont le diamètre intérieur est 35 millimètres, et dont la hauteur est* $4^m,80$ *au-dessus du niveau de l'eau dans laquelle il plonge; quel diamètre devra-t-on donner à ce corps de pompe, pour que l'eau s'élève, au premier coup de piston, jusqu'au sommet du tuyau d'aspiration? — On supposera la pression atmosphérique égale à 10 mètres d'eau.*

Solution. — Soit x le diamètre du corps de pompe : supposons qu'il satisfasse à la condition exprimée dans l'énoncé; l'air qui, avant le premier coup de piston, occupait le volume du tuyau d'aspiration et avait une force élastique représentée par une colonne d'eau de 10 mètres, occupera, quand le piston sera en haut de sa course, le volume du corps de pompe, et aura une force élastique représentée par une colonne d'eau de $10^{m} - 4^{m},8$. Si l'on exprime que le produit de chacun de ces volumes de l'air par la pression correspondante est constant (141), on a

$$(10 - 4.8)\,\frac{\pi x^2}{4} \times 90 = 10\,\frac{\pi\,(3,5)^2}{4} \times 480\;;$$

d'où l'on tire, en supprimant les facteurs communs, et effectuant les calculs :

$$x = \sqrt{\frac{(3,5)^2 \times 480 \times 10}{(10 - 4,8) \times 90}} = 11^{c},2.$$

XXIV. *Une fontaine de compression (fig. 157), de forme cylindrique, ayant une base de 5 décimètres carrés et une hauteur de 50 centimètres, contient de l'eau jusqu'à la moitié de sa hauteur; on y adapte, pour y comprimer de l'air, une pompe à main dont le corps de pompe a une section de 12 centimètres carrés et une hauteur de 40 centimètres. On a donné 20 coups de piston; trouver : 1° à quelle hauteur l'eau s'élèverait dans un tube étroit, ouvert à sa partie supérieure, qu'on substituerait à la pompe; 2° quelle pression en kilogrammes on devrait exercer sur une soupape placée à la partie supérieure du cylindre et ayant une surface de 15 centimètres carrés, pour la maintenir fermée.*

Solution. — 1° Le volume de la partie du cylindre qui est comprise au-dessus de l'eau et occupée par l'air est, en centimètres cubes, 500×25 ou 12 500. Le volume du corps de pompe de la pompe à main est, en centimètres cubes, 12×40, et puisqu'on a donné 20 coups de piston, on a introduit dans le cylindre une quantité d'air qui occuperait, sous la pression atmosphérique, un volume de $12 \times 40 \times 20$ ou 9600 centimètres cubes. Cet air acquiert, dans le cylindre, une force élastique représentée par une hauteur H de mercure qui, évaluée en centimètres, est

$$H = 76 \times \frac{9600}{12500} = \frac{7296}{125}.$$

Cette force élastique s'ajoute, dans le cylindre, à la pression de l'air qui s'y trouvait d'abord (150), pression qui est égale à la pression atmosphérique; mais, quand on ouvre le robinet pour laisser l'eau s'élever dans le tube adapté à l'appareil, la pression atmosphérique s'exerce aussi sur la surface du liquide dans ce tube : on peut donc considérer la colonne d'eau comme faisant simplement équilibre à la force élastique de l'air introduit dans le cylindre par la pompe à main. De là résulte que la hauteur de cette colonne sera

$$\frac{7296}{125} \times 13,6 = 793^{cm},8, \quad \text{ou} \quad 7^{m},938.$$

2° Sur une soupape ayant une surface de 15 centimètres carrés, l'excès de la pression intérieure sur la pression extérieure est exprimé, en kilogrammes, par

$$79,38 \times 0,15 = 11^{kil},907.$$

Telle sera aussi la pression qu'on devra exercer sur la soupape, pour la maintenir fermée.

XXV. *Sous le récipient d'une machine pneumatique contenant de l'air sec à 0° et à la pression de 760 millimètres, on place un fléau de balance dont les bras sont égaux, et aux deux extrémités duquel sont suspendus deux cubes : l'un a 3 centimètres de côté et pèse dans l'air $26^{gr},3240$, et l'autre, qui a 5 centimètres de côté, pèse dans l'air $26^{gr},2597$; par suite de cette inégalité de poids, le fléau n'est pas horizontal. On raréfie l'air dans l'appareil et on demande quelle sera la pression*

sous le récipient quand l'horizontalité sera établie. — La température sera supposée égale à 0° pendant toute l'expérience.

Solution. — Soit x la pression cherchée. Pour obtenir le poids apparent du premier cube, au moment où l'horizontalité sera établie, il suffira de déterminer d'abord son poids dans le vide, et d'en retrancher le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient: or, le poids spécifique de l'air par rapport à l'eau, à 0° et sous la pression de 760 millimetres, est 0,0013; le poids du premier cube dans le vide est donc $26^{gr},3240 + 3^3 \times 0,0013$; le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient à la fin de l'expérience est $3^3 \times \frac{0,0013 \times x}{760}$: son poids apparent sous le récipient est donc définitivement

$$26^{gr},3240 + 3^3 \times 0,0013\left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

De même, le poids apparent du second cube, sous le récipient, est

$$26^{gr},2597 + 5^3 \times 0,0013\left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

En égalant entre elles ces deux expressions, on trouve $x = 376^{mm}$

PROBLÈMES SUR LA CHALEUR

XXVI. *Une sphère de platine, pesée dans le mercure, a perdu de son poids 50 grammes à zéro, et $49^{gr},5415$ à 60°. On demande de trouver, d'après ces données, le coefficient de dilatation cubique du platine, sachant que la densité du mercure à zéro est 13,6 et que le coefficient de dilatation absolue de ce liquide est $\frac{1}{5550}$.*

Solution. — Désignons par V le volume de la sphère de platine à zéro, et par x le coefficient de dilatation cubique du métal; le poids du mercure à zéro que cette sphère déplace étant 50 grammes, on a

$$V \times 13,6 = 50.$$

A 60 degrés, le volume de la sphère est devenu $V(1 + 60x)$; d'autre part, la densité du mercure est devenue

$$\frac{13,6}{1 + 60 \times \frac{1}{5550}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{13.6 \times 185}{187};$$

et comme la perte de poids est maintenant de $49^{gr},5415$, il vient

$$V(1 + 60x)\frac{13.6 \times 185}{187} = 49,5415.$$

En remplaçant, dans cette équation, $V \times 13,6$ par 50, et tirant la valeur de x, on aura

$$x = \frac{49,5415 \times 187 - 50 \times 185}{50 \times 185 \times 60} = \frac{14.2605}{555000} = 0,00002569.$$

XXVII. *Quel est le rapport des poids* x *et* y *de mercure et de platine qu'il faut introduire, à la température de zéro degré, dans un vase de fer, pour que, dans ce vase, la dilatation apparente soit nulle, de zéro à une température quelconque* t, *cette dernière température étant inférieure à 100 degrés? — Densité du mercure, 13,6. Densité du platine, 21. Coefficient de dilatation cubique de mercure, entre zéro et 100 degrés, 0,0001815. Coefficient de dilatation cubique du platine, 0,0000257. Coefficient de dilatation cubique du fer, 0.0000366.*