condition exprimée dans l'énoncé; l'air qui, avant le premier coup de piston, occupait le volume du tuyau d'aspiration et avait une force élastique représentée par une colonne d'eau de 10 mètres, occupera, quand le piston sera en haut de sa course, le volume du corps de pompe, et aura une force élastique représentée par une colonne d'eau de $10^{m} - 4^{m},8$. Si l'on exprime que le produit de chacun de ces volumes de l'air par la pression correspondante est constant (141), on a

$$(10 - 4.8)\,\frac{\pi x^2}{4} \times 90 = 10\,\frac{\pi\,(3,5)^2}{4} \times 48^{0}\,;$$

d'où l'on tire, en supprimant les facteurs communs, et effectuant les calculs :

$$x = \sqrt{\frac{(3\;5)^2 \times 480 \times 10}{(10 - 4,8) \times 90}} = 11^{c},2.$$

**XXIV.** *Une fontaine de compression (fig. 157), de forme cylindrique, ayant une base de 5 décimètres carrés et une hauteur de 50 centimètres, contient de l'eau jusqu'à la moitié de sa hauteur; on y adapte, pour y comprimer de l'air, une pompe à main dont le corps de pompe a une section de 12 centimètres carrés et une hauteur de 40 centimètres. On a donné 20 coups de piston; trouver : 1° à quelle hauteur l'eau s'élèverait dans un tube étroit, ouvert à sa partie supérieure, qu'on substituerait à la pompe; 2° quelle pression en kilogrammes on devrait exercer sur une soupape placée à la partie supérieure du cylindre et ayant une surface de 15 centimètres carrés, pour la maintenir fermée.*

*Solution.* — 1° Le volume de la partie du cylindre qui est comprise au-dessus de l'eau et occupée par l'air est, en centimètres cubes, $500 \times 25$ ou 12 500. Le volume du corps de pompe de la pompe à main est, en centimètres cubes, $12 \times 40$, et puisqu'on a donné 20 coups de piston, on a introduit dans le cylindre une quantité d'air qui occuperait, sous la pression atmosphérique, un volume de $12 \times 40 \times 20$ ou 9600 centimètres cubes. Cet air acquiert, dans le cylindre, une force élastique représentée par une hauteur H de mercure qui, évaluée en centimètres, est

$$H = 76 \times \frac{9600}{12500} = \frac{7296}{125}.$$

Cette force élastique s'ajoute, dans le cylindre, à la pression de l'air qui s'y trouvait d'abord (150), pression qui est égale à la pression atmosphérique; mais, quand on ouvre le robinet pour laisser l'eau s'élever dans le tube adapté à l'appareil, la pression atmosphérique s'exerce aussi sur la surface du liquide dans ce tube : on peut donc considérer la colonne d'eau comme faisant simplement équilibre à la force élastique de l'air introduit dans le cylindre par la pompe à main. De là résulte que la hauteur de cette colonne sera

$$\frac{7296}{125} \times 13,6 = 793^{cm},8, \quad \text{ou} \quad 7^{m},938.$$

2° Sur une soupape ayant une surface de 15 centimètres carrés, l'excès de la pression intérieure sur la pression extérieure est exprimé, en kilogrammes, par

$$79,38 \times 0,15 = 11^{kil},907.$$

Telle sera aussi la pression qu'on devra exercer sur la soupape, pour la maintenir fermée.

**XXV.** *Sous le récipient d'une machine pneumatique contenant de l'air sec à 0° et à la pression de 760 millimètres, on place un fléau de balance dont les bras sont égaux, et aux deux extrémités duquel sont suspendus deux cubes : l'un a 3 centimètres de côté et pèse dans l'air $26^{gr},3240$, et l'autre, qui a 5 centimètres de côté, pèse dans l'air $26^{gr},2597$; par suite de cette inégalité de poids, le fléau n'est pas horizontal. On raréfie l'air dans l'appareil et on demande quelle sera la pression*



*sous le récipient quand l'horizontalité sera établie. — La température sera supposée égale à 0° pendant toute l'expérience.*

*Solution.* — Soit $x$ la pression cherchée. Pour obtenir le poids apparent du premier cube, au moment où l'horizontalité sera établie, il suffira de déterminer d'abord son poids dans le vide, et d'en retrancher le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient: or, le poids spécifique de l'air par rapport à l'eau, à 0° et sous la pression de 760 millimetres, est 0,0013; le poids du premier cube dans le vide est donc $26^{gr},3240 + 3^3 \times 0,0013$; le poids de l'air qu'il déplace sous le récipient à la fin de l'expérience est $3^3 \times \frac{0,0013 \times x}{760}$ : son poids apparent sous le récipient est donc définitivement

$$26^{gr},3240 + 3^3 \times 0,0013\left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

De même, le poids apparent du second cube, sous le récipient, est

$$26^{gr},2597 + 5^3 \times 0,0013\left(1 - \frac{x}{760}\right).$$

En égalant entre elles ces deux expressions, on trouve $x = 376^{mm}$

## PROBLÈMES SUR LA CHALEUR

**XXVI.** *Une sphère de platine, pesée dans le mercure, a perdu de son poids 50 grammes à zéro, et $49^{gr},5415$ à 60°. On demande de trouver, d'après ces données, le coefficient de dilatation cubique du platine, sachant que la densité du mercure à zéro est 13,6 et que le coefficient de dilatation absolue de ce liquide est $\frac{1}{5550}$.*

*Solution.* — Désignons par V le volume de la sphère de platine à zéro, et par $x$ le coefficient de dilatation cubique du métal; le poids du mercure à zéro que cette sphère déplace étant 50 grammes, on a

$$V \times 13,6 = 50.$$

A 60 degrés, le volume de la sphère est devenu $V(1 + 60x)$; d'autre part, la densité du mercure est devenue

$$\frac{13,6}{1 + 60 \times \frac{1}{5550}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{13,6 \times 185}{187};$$

et comme la perte de poids est maintenant de $49^{gr},3415$, il vient

$$V(1 + 60x)\,\frac{13,6 \times 185}{187} = 49,5415.$$

En remplaçant, dans cette équation, $V \times 13,6$ par 50, et tirant la valeur de $x$, on aura

$$x = \frac{49,5415 \times 187 - 50 \times 185}{50 \times 185 \times 60} = \frac{14.2605}{555000} = 0,00002569.$$

**XXVII.** *Quel est le rapport des poids* x *et* y *de mercure et de platine qu'il faut introduire, à la température de zéro degré, dans un vase de fer, pour que, dans ce vase, la dilatation apparente soit nulle, de zéro à une température quelconque* t, *cette dernière température étant inférieure à 100 degrés? — Densité du mercure,* 13,6. *Densité du platine,* 21. *Coefficient de dilatation cubique de mercure, entre zéro et 100 degrés,* 0,0001815. *Coefficient de dilatation cubique du platine,* 0,0000257. *Coefficient de dilatation cubique du fer,* 0.0000366.

*Solution.* — Le volume de mercure est $\frac{x}{13,6}$; sa dilatation, de 0° à la température $t$, est donc $\frac{x}{13,6} \times 0,0001815\, t$. De même, la dilatation du platine, de zéro degré à $t$, est $\frac{y}{21} \times 0,0000257\, t$. Enfin, le volume du vase de fer, occupé par le platine et le mercure, est égal à la somme $\frac{x}{13,6} + \frac{y}{21}$; la dilatation de ce volume, de 0 degré à $t$, est donc $\left(\frac{x}{13,6} + \frac{y}{21}\right) \times 0,0000366\, t$. — La différence entre la somme des deux premières dilatations et la dernière devra être nulle; on a donc

$$\frac{x}{13,6} \times 0,0001815\, t + \frac{y}{21} \times 0,0000257\, t - \left(\frac{x}{13,6} + \frac{y}{21}\right) \times 0,0000366\, t = 0.$$

Dans cette équation, $t$ disparaît comme facteur commun, ainsi qu'on pouvait le prévoir et on tire finalement

$$\frac{x}{y} = 0,0487.$$

**XXVIII.** *Un thermomètre est plongé, jusqu'au 20e degré de son échelle, dans un liquide chaud; le mercure s'élève dans la tige jusqu'au 130e degré. Cette indication ne donnant pas la température exacte du liquide, puisque la portion de la colonne mercurielle comprise entre les divisions 20 et 130 n'est pas plongée dans le bain, on demande de calculer la correction qu'elle devra subir, en supposant que la température de la portion extérieure de la colonne mercurielle soit égale à celle de l'atmosphère environnante, savoir 15 degrés; on prendra pour coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre le nombre* $\frac{1}{6480}$.

*Solution.* — Désignons par $x$ la température réelle du bain, c'est-à-dire celle que marquerait le thermomètre si toute la tige était plongée; $x$ se compose évidemment de 130 degrés, plus la dilatation *apparente* qu'éprouvent 130—20 ou 110 divisions de mercure, lorsque leur température s'élève de 15 degrés à $x$ degrés. Donc

$$x = 130 + 110(x - 15)\frac{1}{6480};$$

d'où l'on tire

$$637\, x = 84075,$$

ou

$$x = 131°,99.$$

**XXIX.** *Trouver quel rapport on doit établir entre la hauteur du mercure et la longueur de la tige, dans le pendule de Graham (fig. 204), pour que la compensation ait lieu. — On considérera le poids de la tige et celui du cylindre de verre comme négligeables par rapport au poids du mercure.*

*Solution.* — Représentons par $L_0$ la longueur à zéro de la tige du pendule, augmentée de la hauteur de l'étrier, et par $h_0$ la hauteur du mercure à zéro qu'il faut introduire dans l'éprouvette, pour que la distance du point de suspension au centre de gravité du liquide soit la même à zéro et à une température déterminée $t$. L'expression de cette distance, ou la *longueur* du pendule à zéro, est évidemment $L_0 - \frac{h_0}{2}$, en négligeant l'épaisseur du fond de l'éprouvette.

Soient $l$ le coefficient de dilatation linéaire de l'acier, $y$ la hauteur encore inconnue du mercure dans l'éprouvette, à la température de $t$ degrés. La longueur du pendule à cette température sera $L_0(1 + lt) - \frac{y}{2}$; pour qu'elle soit égale à la longueur à zéro, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \qquad L_0 - \frac{h_0}{2} = L_0(1 + lt) - \frac{y}{2}.$$



Cette équation renferme deux inconnues, savoir $h_0$ et $y$ : nous allons chercher à exprimer la seconde en fonction de la première et des coefficients de dilatation du verre et du mercure. Soit $r$ le rayon de la section intérieure de l'éprouvette à zéro; $\pi r^2 h_0$ est le volume du mercure à cette température; il devient $\pi r^2 h_0(1 + mt)$ à $t$ degrés, $m$ étant le coefficient de dilatation absolue du mercure. Soit $\delta$ le coefficient de dilatation linéaire du verre; en passant de zéro à $t$ degrés, le rayon $r$ devient $r(1 + \delta t)$, et la section $\pi r^2$ devient $\pi r^2(1 + \delta t)^2$ ou $\pi r^2(1 + 2\delta t + \delta^2 t^2)$. On peut ici négliger $\delta^2 t^2$ à côté de $2\delta t$, à cause de l'extrême petitesse de $\delta$, et prendre simplement $\pi r^2(1 + 2\delta t)$ pour l'expression de la section intérieure de l'éprouvette à $t$ degrés. Mais, à cette température, la hauteur du mercure est $y$; le volume du liquide est donc $\pi r^2(1 + 2\delta t)y$. — Nous avons ainsi deux expressions du volume du mercure à $t$ degrés; en les égalant, nous obtiendrons une équation qui permettra de déterminer $y$. Cette équation est

$$\pi r^2 h_0(1 + mt) = \pi r^2(1 + 2\delta t)y;$$

on en tire immédiatement

$$y = h_0 \frac{1 + mt}{1 + 2\delta t}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on a :

$$L_0 - \frac{h_0}{2} = L_0(1 + lt) - \frac{h_0}{2}\frac{1 + mt}{1 + 2\delta t}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, qu'on fasse toutes les réductions, et qu'on néglige tous les termes qui renferment le produit des deux coefficients de dilatation, on arrive à la relation bien plus simple :

$$\frac{h_0}{L_0} = \frac{2l}{m - 2\delta}.$$

Ce résultat est indépendant de la température particulière $t$, pour laquelle nous avons mis le problème en équation. Donc la compensation aura lieu *pour toute température*, pourvu que, à zéro, le rapport entre la hauteur du mercure et la longueur de la tige, augmentée de celle de l'étrier, soit égal à la fraction $\frac{2l}{m - 2\delta}$, fraction dont la valeur est environ $\frac{1}{6}$.

**XXX.** *Quel doit être le rayon d'un ballon sphérique, formé d'un taffetas qui pèse 250 grammes le mètre carré, pour que, plein d'hydrogène sec à 20 degrés et à la pression de 750 millimètres, il ait une force ascensionnelle nulle, lorsqu'il se trouve dans l'air sec à la même température et à la même pression? — Poids du litre d'air sec à zéro et sous la pression de 760 millimètres,* $1^{gr},295$; *densité de l'hydrogène par rapport à l'air,* 0,0695.

*Solution.* — Désignons par $r$ le rayon du ballon exprimé en mètres : la surface de l'enveloppe étant $4\pi r^2$, le poids de l'enveloppe en grammes sera $250 \times 4\pi r^2$. Le poids de l'hydrogène, en grammes, dans les conditions données par l'énoncé, sera, en remarquant que, dans les circonstances normales, un mètre cube d'air pèse 1293 grammes,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times 1293 \times 0,0693 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1 + 0,00367 \times 20}.$$

Enfin le poids de l'air déplacé sera, en grammes,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times 1293 \times \frac{750}{760} \times \frac{1}{1 + 0,00367 \times 20}.$$

Si maintenant on exprime que la somme des poids de l'enveloppe et de l'hydrogène diminuée du poids de l'air, donne un résultat nul, on obtient l'équation

$$250-\frac{1}{3}r\times1293\times\frac{750}{760}\times\frac{1}{1{,}0734}(1-0{,}0693)=0\,;$$

d'où l'on tirera $r=0^{m},678$.

**XXXI.** *On a, dans deux éprouvettes, d'une part 4 centimètres cubes d'un gaz à 7 degrés sous la pression de 56 centimètres de mercure; d'autre part, 6 centimètres cubes d'un autre gaz à 17 degrés sous la pression de 58 centimètres. On introduit ces deux gaz dans une troisième éprouvette, où le mélange prend une température de 15 degrés. On demande à quelle hauteur le mercure s'élèvera dans l'éprouvette, dont la section est de 1 centimètre carré, et dont la hauteur au-dessus du mercure est de 21 centimètres. — Le baromètre marque 76 centimètres. — On prendra pour coefficient de dilatation des gaz* $\frac{1}{273}$, *et on négligera les dilatations du mercure et du verre.*

*Solution.* — Si le premier gaz était ramené à zéro, son volume, 4 centimètres cubes, demeurant invariable, sa pression deviendrait $\dfrac{56}{1+\dfrac{7}{273}}=\dfrac{273\times56}{280}=\dfrac{273}{5}$. — Le volume du deuxième gaz, 6 centimètres cubes, demeurant constant, sa pression, si on le refroidissait à zéro, deviendrait $\dfrac{58}{1+\dfrac{17}{273}}=\dfrac{273\times58}{290}=\dfrac{273}{5}$. — Les deux gaz, mélangés à la température zéro, et sous la pression $\dfrac{273}{5}$, qui leur est commune, occuperaient un volume égal à la somme de leurs volumes respectifs, c'est-à-dire 10 centimètres cubes.

Soit $x$ la hauteur à laquelle s'élève le mercure, dans l'éprouvette qui contient le mélange à une température de 15 degrés; le volume du mélange est $21-x$, et la pression $76-x$. D'après la formule de Gay-Lussac, on doit avoir

$$10\times\frac{273}{5}=\frac{(21-x)\,(76-x)}{1+\dfrac{15}{273}},$$

ou, en simplifiant,

$$(21-x)\,(76-x)=576.$$

Cette équation a deux racines, l'une supérieure à 76, qui est inadmissible, et l'autre inférieure à 21. On doit donc prendre le signe — devant le radical : on trouve $x=12$ centimètres.

**XXXII.** *Dans une cloche graduée en centimètres cubes, à 0 degré, pleine de mercure, et placée sur une cuvette à mercure, on a introduit* $0^{gr},75$ *d'éther : la température de la cloche étant portée à 80 degrés, on constate que tout le liquide s'est réduit en vapeur et que le volume occupé par cette vapeur est* $366^{cc},48$*; le mercure s'élève à une hauteur de* $152^{mm},16$*; la pression barométrique, ramenée à 0 degré, est* $750^{mm}$*. Quelle est, à cette température, la densité de la vapeur d'éther par rapport à l'air? — Le coefficient de dilatation du mercure est* $\frac{1}{5550}$ *; le coefficient de dilatation cubique du verre est* 0,0000276 (*).

*Solution.* — La pression barométrique étant ramenée à 0°, ramenons de même à 0° la colonne de mercure qui s'élève dans la cloche, et dont la température est 80 degrés : la valeur de cette colonne deviendra

$$152^{mm},16\times\frac{1}{1+\dfrac{80}{5550}}=150^{mm}.$$

(*) Cette méthode de détermination de la densité d'une vapeur, est connue sous le nom de méthode de Gay-Lussac.



Donc la force élastique de la vapeur d'éther, évaluée par la hauteur d'une colonne de mercure qui serait à 0 degré, est $750^{mm}-150^{mm}=600$ millimètres. — Le volume de cette vapeur qui occupe, à 80 degrés, un nombre de divisions égal à 366,48, est, en centimètres cubes, $366{,}48\,(1+0{,}0000276\times80)$; le poids du même volume d'air, dans les mêmes conditions de température et de pression, est

$$366{,}48\,(1+0{,}0000276\times80)\times0{,}0013\times\frac{600}{760}\times\frac{1}{1+0{,}00367\times80}.$$

La densité de la vapeur par rapport à l'air est donc

$$\frac{0{,}75}{366{,}48\,(1+0{,}0000276\times80)\times0{,}0013}\times\frac{760}{600}\times(1+0{,}00367\times80)=2{,}573.$$

**XXXIII.** *Un récipient est rempli d'oxygène liquide à la température de — 130°. On élève la température à + 500°. Calculer la pression à l'intérieur du récipient, en supposant que la loi de Mariotte soit applicable. — On négligera la dilatation du récipient. — La densité de l'oxygène gazeux par rapport à l'air est* 1,10; *la densité absolue de l'oxygène liquide à — 130° est* 1,05.

*Solution.* — Soit V le volume du récipient, exprimé en centimètres cubes. La masse de l'oxygène liquide qui le remplit est $V\times1^{gr},05$.

Soit $x$ la pression de l'oxygène gazeux à la température de 500°, cette pression étant évaluée en atmosphères. La masse de un centimètre cube d'oxygène, à 0°, sous la pression d'une atmosphère, est $0{,}0013\times1{,}10=0^{gr},00143$; à 500°, et sous la pression $x$, la masse de V centimètres cubes est $V\times\dfrac{0{,}00143\times x}{1+\dfrac{500}{273}}$.

On a donc :

$$1{,}05=\frac{0{,}00143\times273\times x}{773},$$

d'où on tire $x=2081$ atmosphères.

Il serait facile d'évaluer en kilogrammes la pression supportée par chaque centimètre carré de la paroi du récipient. On sait, en effet, que la pression d'une atmosphère est de $1^{kilg},033$ par centimètre carré.

**XXXIV.** *Un espace de 1 mètre cube de capacité, entretenu à la température de 20 degrés, renferme de l'air humide dont l'état hygrométrique est* $\frac{3}{4}$. *La température venant à s'abaisser jusqu'à zéro, on demande de trouver le poids de la vapeur qui devra se liquéfier. — On prendra pour poids du mètre cube d'air, dans les conditions normales de température et de pression,* $1^{kil},293$; *pour densité de la vapeur,* 0,622; *on sait, d'ailleurs, que la tension maximum de la vapeur est, à 20 degrés, de* $17^{mm},391$; *à zéro, de* $4^{mm},6$.

*Solution.* — Le poids de la vapeur qui devra se liquéfier s'obtiendra en retranchant du poids de la vapeur contenue à 20 degrés dans l'espace donné, le poids de la vapeur que ce même espace contient à zéro quand il est saturé. — Or, à 20 degrés, l'état hygrométrique étant $\frac{3}{4}$, la force élastique de la vapeur est $\frac{3}{4}\times17^{mm},391$, c'est-à-dire $13^{mm},04325$; le poids de cette vapeur est donc

$$1^{kil},293\times\frac{1}{1+0{,}00367\times20}\times\frac{13{,}04325}{760}\,;\ \times0{,}622\,;$$

d'autre part, le poids de la vapeur contenue dans 1 mètre cube d'air saturé à zéro est

$$1^{kil},293\times\frac{4{,}6}{760}\times0{,}622\,;$$

en retranchant l'une de l'autre ces deux quantités, et ayant égard aux facteurs communs, on trouve, pour le poids cherché,

$$\frac{1^{\text{kil}},293\times 0,622}{760}\left(\frac{13,04525}{1,0734}-4,6\right),$$

expression qui se réduit à

$$\frac{1^{\text{kil}},293\times 0,622\times 8,10561}{760\times 1,0734}.$$

En calculant cette expression par logarithmes, on trouve que le poids de la vapeur qui devra se liquéfier à zéro est de $0^{\text{kil}},007991$, ou de $7^{\text{gr}},991$.

**XXXV.** *A la température de 20 degrés et sous la pression de 760 millimètres, on a introduit, dans un récipient, de l'air sec et du gaz hydrogène saturé d'humidité. On a fait passer ensuite une portion de ce mélange dans l'eudiomètre à eau, où elle s'est saturée de vapeur : l'analyse a montré que cette portion renfermait des volumes égaux d'air et d'hydrogène. Trouver, d'après ce résultat, quelle était la force élastique de la vapeur dans le récipient. — On supposera que l'analyse eudiométrique ait été faite sous la pression barométrique de 760 millimètres et à la température de 20 degrés; on prendra $17^{\text{mm}},4$ pour la tension maximum de la vapeur à cette température.*

*Solution.* — Désignons par V le volume qu'occuperait, sous la pression de 760 millimètres, l'air sec contenu dans le récipient, et par V' le volume qu'occuperait l'hydrogène saturé, sous la même pression; V + V' représentera la capacité du récipient. Soit $f$ la tension de la vapeur renfermée dans cette capacité; si, du volume V + V' sous lequel sa tension est $f$, on réduisait la vapeur au volume V', elle atteindrait son point de saturation; sa tension serait alors $17^{\text{mm}},4$. Or on a, d'après la loi de Mariotte,

$$(1)\quad \frac{f}{17^{\text{mm}},4}=\frac{V'}{V+V'};$$

cherchons donc, d'après les données de l'analyse, à déterminer $\frac{V'}{V+V'}$ ; il sera facile d'en déduire $f$.

Soit 1 le volume du mélange saturé, dans l'eudiomètre; la tension de la vapeur étant de $17^{\text{mm}},4$, on peut regarder ce mélange comme contenant le volume 1 de gaz sec, sous la pression de $760^{\text{mm}}-17^{\text{mm}},4$; sous la pression de 760 millimètres, ce volume deviendrait $\frac{760-17,4}{760}$ ; et si l'on en prend la moitié, on aura, pour la pression de 760 millimètres, le volume d'air, supposé sec, que contient l'eudiomètre. En résumé, on peut dire que, dans l'eudiomètre et sous la pression de 760 millimètres,

Le volume de l'air sec était.............. $\frac{1}{2}\,\frac{760-17,4}{760}$,

Le volume de l'hydrogène saturé était..... $\frac{1}{2}$.

Le rapport de ces deux quantités est évidemment égal à $\frac{V}{V'}$ ; donc :

$$\frac{V}{V'}=\frac{760-17,4}{760};$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{V'}{V+V'}\ \text{ou}\ \frac{f}{17^{\text{mm}},4}=\frac{760}{760\times 2-17,4},$$

et enfin

$$f=17^{\text{mm}},4\times\frac{760}{760\times 2-17,4}=8^{\text{mm}},80.$$

**XXXVI** *L'enveloppe d'un ballon de baudruche pèse 200 grammes: la pression atmosphérique étant de 760 millimètres, et la température de 20 degrés, on a introduit dans ce ballon 500 litres d'hydrogène saturé de vapeur d'eau, à la même température et sous la même pression. Quelle est la force ascensionnelle de ce ballon, en supposant que la fraction de saturation de l'air extérieur soit $\frac{1}{2}$ ? — Densité de l'hydrogène par rapport à l'air, 0,069; densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air, 0,622. Force élastique maximum de la vapeur d'eau à 20 degrés, $17^{\text{mm}},4$.*



*Solution.* — La force élastique maximum de la vapeur d'eau à 20 degrés étant $17^{\text{mm}},4$ et l'hydrogène étant saturé de vapeur, la force élastique du gaz, supposé sec, est $760-17,4=742^{\text{mm}},6$ : donc, en observant que le poids d'un litre d'air, à 0 degré et sous la pression de 760 millimètres, est $1^{\text{gr}},293$, on a pour le poids de l'hydrogène sec,

$$1^{\text{gr}},293\times 0,069\times 500\times\frac{742,6}{760}\times\frac{1}{1+0,00367\times 20},$$

en prenant pour coefficient de dilatation du gaz le nombre 0,00367. De même, le poids de la vapeur d'eau qui sature le gaz, et dont la pression est $17^{\text{mm}},4$, est

$$1^{\text{gr}},293\times 0,622\times 500\times\frac{17,4}{760}\times\frac{1}{1+0,00367\times 20}.$$

La somme de ces deux poids et du poids de l'enveloppe donnera le poids total du ballon.

Pour obtenir le poids de l'air déplacé, on remarquera que, la fraction de saturation de l'air extérieur étant $\frac{1}{2}$, la tension de la vapeur d'eau est $\frac{17^{\text{mm}},4}{2}$ ou $8^{\text{mm}},7$ : la force élastique de l'air lui-même est donc $760-8,7=751^{\text{mm}},3$. De là résulte que le poids de l'air déplacé, supposé sec, est

$$1^{\text{gr}},293\times 500\times\frac{751,3}{760}\times\frac{1}{1+0,00367\times 20}.$$

De même, le poids de la vapeur d'eau contenue dans l'air déplacé sera

$$1^{\text{gr}},293\times 0,622\times 500\times\frac{8,7}{760}\times\frac{1}{1+0,00367\times 20}.$$

La somme de ces deux poids donnera la poussée éprouvée par le ballon dans l'air.

En retranchant maintenant le poids total du ballon de la poussée qu'il éprouve, on obtiendra la valeur de la force ascensionnelle. On trouvera :

$$350^{\text{gr}},542.$$

**XXXVII.** *Une masse d'air qui occupe 50 mètres cubes, à la température de 5 degrés, et dont la fraction de saturation est 0,572, se mélange à une autre masse d'air dont le volume est 75 mètres cubes, la température 15 degrés, et la fraction de saturation 0,480; le volume du mélange est 125 mètres cubes, et sa température est 11 degrés. Quelle sera la fraction de saturation du mélange? — Les valeurs de la force élastique maximum de la vapeur d'eau à 5 degrés, 15 degrés, 11 degrés, sont respectivement $6^{\text{mm}},53$ ; $12^{\text{mm}},70$; $9^{\text{mm}},79$.*

*Solution.* — Dans la première masse d'air, avant le mélange, la force élastique de la vapeur d'eau est, d'après les conditions de l'énoncé, $6,53\times 0,572$. Donc, lorsque le mélange sera effectué, c'est-à-dire lorsque cette vapeur se sera échauffée de 5 degrés à 11 degrés, et qu'elle aura acquis, au lieu du volume de 50 mètres cubes, un volume de 125 mètres cubes, sa force élastique sera

$$6,53\times 0,572\left[1+0,00367\,(11-5)\right]\frac{50}{125}=1^{\text{mm}},527.$$

De même la force élastique de la vapeur contenue dans la seconde masse d'air deviendra, lorsque le mélange sera effectué,

$$12{,}7 \times 0{,}48 \left[1 + 0{,}00367\,(15-11)\right] \frac{75}{125} = 5^{\text{mm}}{,}711.$$

En faisant la somme de ces deux forces élastiques, on obtient la force élastique totale de la vapeur d'eau dans le mélange, savoir : $5^{\text{mm}},238$. Puisque la force élastique maximum à cette température est $9^{\text{mm}},79$, la fraction de saturation est

$$\frac{5{,}238}{9{,}79} = 0{,}535.$$

**XXXVIII.** *Quelle est la masse de la quantité de mercure, qui, dans l'air, pèse* $375^{\text{gr}},185$ ? — *La densité du mercure est* 13,596; *la densité du laiton des poids marqués est* 8,5; *le coefficient de dilatation cubique du laiton est* 0,000051; *le coefficient de dilatation absolue du mercure est* 0,000180. *La hauteur barométrique est* 764 *millimètres; la température est* 10 *degrés; la tension maximum correspondante est* $9^{\text{mm}},17$; *enfin l'état hygrométrique actuel est* 0,8.

*Solution.* — Désignons par $a$ la masse du centimètre cube d'air, dans les circonstances actuelles, par D la densité du mercure à la température actuelle, par $\Delta$ celle des poids marqués, nous avons vu (159) que la masse exacte du mercure est :

$$x = 375{,}185\,\frac{1-\dfrac{a}{\Delta}}{1-\dfrac{a}{D}}.$$

Il suffira de remplacer $a$, D et $\Delta$ par leurs valeurs, qui sont :

$$a = \frac{0{,}001293}{1+\dfrac{10}{273}} \times \frac{764 - \dfrac{3}{8}\times 0{,}8 \times 9{,}17}{760}, \qquad D = \frac{13{,}596}{1+10\times 0{,}000180},$$

$$\Delta = \frac{8{,}5}{1+10\times 0{,}000051}.$$

**XXXIX.** *La terre étant couverte d'une couche de neige à zéro, de* 2 *centimètres d'épaisseur, quelle est l'épaisseur de la couche de pluie tombant à* $12^{\circ},5$ *qui serait nécessaire pour en déterminer la fusion?* — *Densité de la neige par rapport à l'eau de pluie,* 0,78; *chaleur de fusion de la neige,* 79,25.

*Solution.* — Si la densité de la neige était égale à celle de l'eau, une couche de neige de 1 centimètre d'épaisseur exigerait, pour se fondre, une couche de pluie à 1 degré ayant $79^{\text{cent}},25$ d'épaisseur : donc 2 centimètres de neige exigeraient $79^{\text{cent}},25 \times 2$ de pluie à 1 degré, ou $\frac{79^{\text{cent}},25\times 2}{12,5}$ de pluie à $12^{\circ},5$. Mais la neige ne pesant, à volume égal, que les 0,78 de ce que pèse la pluie, on voit en définitive que, pour fondre la même couche, il suffira d'une quantité de pluie à $12^{\circ},5$ représentée par

$$0{,}78 \times \frac{79^{\text{cent}}{,}25\times 2}{12{,}5} = 9^{\text{cent}}{,}89.$$

**XL.** *Une couche de neige à zéro, de* 1 *centimètre d'épaisseur, étant donnée, combien devra-t-elle recevoir de chaleur du soleil, par mètre carré de superficie, pour se répandre dans l'air sous forme de vapeur saturante à* 10 *degrés?* — *Densité de la neige,* 0,78; *chaleur de vaporisation à* 10 *degrés,* 600.

*Solution.* — Une couche de neige de 1 centimètre d'épaisseur et de 1 mètre carré de superficie, ayant pour densité 0,78, pèse $7^{\text{k}},8$ : pour la fondre à zéro, il faut lui donner $79^{\text{calor}},25 \times 7,8$. Pour échauffer, de zéro à 10 degrés, l'eau provenant de la fusion, il faut $10^{\text{cal}} \times 7,8$; enfin, pour convertir cette eau en vapeur, il faut encore



$600^{\text{cal}} \times 7,8$. En ajoutant ces trois nombres, on obtient la quantité de chaleur demandée, savoir :

$$(79{,}25 + 10 + 600)\ 7{,}8 \text{ ou } 567^{\text{calor}}{,}15.$$

**XLI.** *On verse* 600 *grammes d'un liquide dont la température est* 85 *degrés, dans une masse d'eau pesant* 3 *kilogrammes, et dont la température est* 8 *degrés; cette eau est contenue dans un calorimètre en laiton, du poids de* 300 *grammes. On trouve que la température finale du mélange est* 15 *degrés.* — *On sait d'ailleurs, par des expériences préliminaires, qu'il s'est perdu* 3 *calories par rayonnement ou par conductibilité, pendant la durée de l'expérience; la chaleur spécifique du laiton est* 0,1. — *On demande de calculer la chaleur spécifique du liquide?*

*Solution.* — En se refroidissant de 85 à 15 degrés, le liquide soumis à l'expérience a abandonné $600 \times c \times 70$ calories, en désignant par $c$ la chaleur spécifique cherchée. La capacité calorifique de l'enveloppe du calorimètre est $300 \times 0,1 = 30$, et la capacité calorifique du calorimètre tout entier est 3030; en s'échauffant de 8 à 15 degrés, le calorimètre a donc absorbé $3030 \times 7 = 21210$ calories. — La quantité de chaleur abandonnée par le liquide est égale à la somme de la quantité de chaleur absorbée par le calorimètre et de la quantité de chaleur perdue par rayonnement ou conductibilité; on a donc :

$$600 \times c \times 70 = 21210 + 3,$$

d'où l'on tire

$$c = 0{,}505.$$

**XLII.** *Dans un vase plat, large et horizontal, on répand* 500 *grammes d'eau à* 100 *degrés. Il s'en dégage* 30 *grammes par évaporation subite: que devient la température de cette eau?* — *La chaleur de vaporisation de l'eau est de* 537 *calories.*

*Solution.* — En se vaporisant, les 30 grammes d'eau ont absorbé $30 \times 537 = 16110$ calories, et cette quantité de chaleur a été cédée par les 470 grammes d'eau qui sont demeurés à l'état liquide; ils se sont ainsi refroidis de $\frac{16110}{470} = 34^{\circ},3$. La température devient donc $100 - 34,3 = 65^{\circ},7$.

**XLIII.** *Sur une plaque de liège, enduite de noir de fumée et disposée sur la platine d'une machine pneumatique, au-dessus d'une cuvette contenant de l'acide sulfurique (fig. 224), on a placé une masse d'eau pesant* 10 *grammes, à la température de* 15 *degrés; on a recouvert d'une cloche de verre, et on a fait le vide. Au bout d'un certain temps, il reste sur la plaque un résidu de glace à* 0 *degré. Quelle est la masse de cette glace?* — *La chaleur de vaporisation de l'eau, à basse température, est* 600 *calories; la chaleur de fusion de la glace est* 80 *calories. On négligera les pertes de chaleur par rayonnement ou par conductibilité.*

*Solution.* — Soit $x$ la masse de glace obtenue; l'évaporation de $(10-x)$ grammes d'eau a absorbé $(10-x)$ 600 calories. D'autre part, le refroidissement de 15 à 0 degré et la solidification de l'eau ont dégagé, pour chaque gramme d'eau, $15 + 80 = 95$ calories; le refroidissement et la solidification de $x$ grammes d'eau correspondent donc à un dégagement de $x \times 95$ calories. On a donc

$$x \times 95 = (10-x)\,600,$$

d'où

$$x = 8^{\text{gr}}{,}633.$$

## PROBLÈMES SUR L'ÉLECTRICITÉ

**XLIV.** *Deux sphères métalliques, dont les rayons sont respectivement* 1 *centimètre et* 2 *centimètres, ont été électrisées, puis mises en communication par un fil métallique long et fin. Cette communication étant interrompue et les centres des deux* *sphères étant à une distance de 10 centimètres, la répulsion mutuelle des deux sphères est de 18 dynes. — Trouver le potentiel et les charges des deux sphères.*

*Solution.* — Soit $x$ la valeur du potentiel cherché ; la charge de la sphère de rayon 1 est $x$ ; celle de la sphère de rayon 2 est $2x$ ; et l'on a, d'après la loi de Coulomb,

$$\frac{2x^2}{100}=18, \quad \text{d'où} \quad x=30.$$

Le potentiel est donc égal à 30 ; les charges des deux sphères sont respectivement 30 et 60.

**XLV.** *Un courant fourni par une pile de 10 éléments Daniell passe dans un voltamètre, et dans un appareil à galvanoplastie. Dans le voltamètre, il se dégage 9 centimètres cubes de gaz par minute. On demande :*

1° *Quelle sera la masse de cuivre déposée dans la cuve à galvanoplastie, au bout d'une heure ;*

2° *Quelle sera, pendant ce temps, la masse de zinc brûlée dans la pile tout entière ;*

3° *Quelle est l'intensité du courant, évaluée en ampères ;*

4° *Quelle est la résistance totale du circuit, évaluée en ohms.*

*Un courant de 1 ampère électrolyse* $0^{mmg},093$ *d'eau par seconde ; la force électromotrice d'un élément Daniell est de* $1^{volt},08$. — *La masse spécifique de l'air est* $0^{gr},001293$ ; *la densité de l'hydrogène est* 0,069. — *Les équivalents du cuivre et du zinc sont respectivement 32 et 33.*

*Solution.* — 1° Si dans le voltamètre il se dégage 9 centimètres cubes de gaz par minute, le volume d'hydrogène électrolysé pendant ce temps est de 6 centimètres cubes ; et sa masse est $6\times 0{,}001293\times 0{,}069=0^{gr},000535$. En une heure, le courant électrolyse donc une quantité d'hydrogène 60 fois plus grande, c'est-à-dire $0^{gr},0321$. — Or, d'après les lois de Faraday, les masses d'hydrogène et de cuivre électrolysées, pendant le même temps et par le même courant, sont entre elles comme les équivalents chimiques 1 et 32. La masse de cuivre déposée au bout d'une heure dans l'appareil à galvanoplastie est donc de $32\times 0{,}0321=1^{gr},027$.

2° D'autre part, au dégagement de 1 gramme d'hydrogène, correspond la dissolution de 33 grammes de zinc dans chacun des éléments de pile : la masse de zinc brûlée, en une heure, dans toute la pile, est donc de $10\times 33\times 0{,}0321=10^{gr},593$.

3° En multipliant par 9 le nombre 0,000535, qui représente la masse d'hydrogène dégagée par le courant pendant une minute, on obtient la quantité d'eau décomposée par le courant pendant le même temps ; et le quotient du produit obtenu par le nombre 60, représente la masse d'eau décomposée en une seconde : ce nombre, exprimé en milligrammes, est $0^{mmgr},08025$. L'intensité du courant, évaluée en ampères, est donc de

$$\frac{0{,}08025}{0{,}093}=0^{amp},863.$$

4° Pour calculer la résistance totale du circuit, nous remarquerons que l'on a, en général, $i=\frac{E}{R}$. En désignant par $i$, E et R l'intensité du courant évaluée en ampères, la force électromotrice de la pile qui le produit, évaluée en volts, et la résistance totale du circuit, évaluée en ohms. Nous connaissons $i=0^{amp},863$ ; la force électromotrice de chaque élément Daniell étant de $1^{volt},08$, celle de la pile entière est $10^{volt},8$ ; on a donc, pour la résistance du circuit,

$$R=\frac{10{,}8}{0{,}863}=12^{ohms},5.$$



## PROBLÈMES SUR L'ACOUSTIQUE

**XLVI.** *Les plateaux d'une sirène portent chacun 25 trous ; le plateau supérieur fait 2349 tours en deux minutes. Quelle est la note donnée par la sirène, sachant que le* $la_3$ *correspond à 435 vibrations doubles par seconde ? — Quelle est la longueur du tuyau ouvert, dont le son fondamental est à l'unisson avec celui de la sirène ?*

*Solution.* — Le nombre des vibrations effectuées en deux minutes est $2349\times 25$ ; en divisant ce nombre par 120, on obtient le nombre de vibrations effectuées en une seconde, qui caractérise la note donnée par la sirène : on trouve 489,375. L'intervalle de cette note au *la* normal est mesuré par la fraction $\frac{489{,}375}{435}=1{,}125=\frac{9}{8}$. La note est donc *un ton* au-dessus du $la_3$ ; c'est un $si_3$.

La longueur d'onde $\lambda$, correspondante à cette note, s'obtient en faisant le quotient de la vitesse du son $340^m$, par le nombre de vibrations en une seconde (676) ; on a $\lambda=\frac{340}{489{,}375}$. Mais quand un tuyau ouvert donne le son fondamental, la longueur de l'onde sonore est le double de la longueur du tuyau (700). La longueur du tuyau, dont le son fondamental est le $si_3$, est donc : $\frac{340}{2\times 489{,}375}=0^m,347$.

**XLVII.** *La densité du platine étant prise égale à 22 et celle du fer à 7,8, on demande quel rapport il doit y avoir entre les longueurs de deux cordes, l'une en platine, l'autre en fer, et toutes les deux de même section, pour qu'elles soient à l'unisson quand on les tend également.*

*Solution.* — Le nombre de vibrations que rend la première corde peut être représenté par $\frac{K}{l\sqrt{22}}$ ; le nombre de vibrations que rend la seconde par $\frac{K}{l'\sqrt{7{,}8}}$. Dans ces deux expressions, la constante K est la même.

Exprimons que ces deux quantités sont égales : il vient

$$\frac{l}{l'}=\sqrt{\frac{7{,}8}{22}}=\frac{\sqrt{7{,}8\times 22}}{22}.$$

On trouve pour valeur approchée de ce rapport 0,5954.

**XLVIII.** *Une corde tendue par un poids* P *est à l'unisson d'un tuyau ouvert donnant le son fondamental. — 1° Quel doit être le poids tenseur* P', *pour que le son de la corde soit à l'octave aiguë du son fondamental du tuyau ? — 2° Quel doit être le poids tenseur* P'' *pour que le son de la corde soit à la quinte de l'octave aiguë du son fondamental du tuyau ? — 3° Pourrait-on faire rendre au tuyau les trois sons que donne la corde, tendue successivement par les poids* P, P' *et* P'' ?

*Solution.* — Soient $n$, $n'$ et $n''$ les nombres de vibrations effectuées en une seconde par la corde tendue successivement par les poids P, P' et P''. D'après les lois des vibrations des cordes, on a :

$$\frac{n}{\sqrt{P}}=\frac{n'}{\sqrt{P'}}=\frac{n''}{\sqrt{P''}}.$$

D'autre part, d'après l'énoncé, ces trois nombres de vibrations sont entre eux comme 1, 2 et 3, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{n}{1}=\frac{n'}{2}=\frac{n''}{3};$$

par conséquent,

$$P'=4P, \quad \text{et} \quad P''=9P.$$

Les trois sons que rend successivement la corde sont le son fondamental et les deux premiers harmoniques du tuyau ouvert (700) : ces harmoniques peuvent s'obtenir en réglant convenablement la pression de la soufflerie.

## PROBLÈMES SUR L'OPTIQUE

**XLIX.** *Deux sources lumineuses* S *et* S', *dont les intensités propres sont* I *et* I', *ont été placées à une distance* d *l'une de l'autre. En quel point faut-il placer un écran en ligne droite avec les deux sources, pour qu'il reçoive autant de lumière de l'une que de l'autre? — Application :* $I'=4I$, $d=3$ *mètres.*

*Solution.* — Représentons par $x$ la distance de l'écran à la source S, que nous supposons de plus faible intensité que S'. Si l'écran est placé entre les deux sources, sa distance à la source S' est $(d-x)$; et on doit avoir

$$\frac{I}{x^2}=\frac{I'}{(d-x)^2},$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{I'}{I}}}=\frac{3}{1+\sqrt{4}}=1 \text{ mètre.}$$

Mais l'écran peut aussi être placé en dehors des deux sources, du côté de la source la moins intense. Soit alors $y$ la distance de S à l'écran; la distance de l'écran à S' est $d+y$, et l'on a

$$\frac{I}{y^2}=\frac{I'}{(d+y)^2},$$

d'où

$$y=\frac{d}{\sqrt{\frac{I'}{I}}-1}=\frac{3}{\sqrt{4}-1}=3 \text{ mètres.}$$

**L.** *Deux miroirs plans* AB *et* CD (*fig.* 706), *inclinés l'un sur l'autre, ont leurs faces réfléchissantes en regard; un rayon lumineux* SI *se réfléchit d'abord sur* AB, *suivant* IH; *puis sur* CD, *suivant* HR. *Démontrer que l'angle* $\delta$, *formé par la direction du rayon incident avec celle du rayon deux fois réfléchi, est toujours double de l'angle* $\alpha$ *des deux miroirs.*

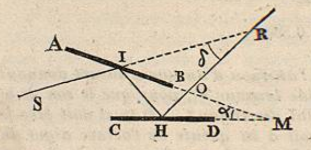

Fig. 706.

*Solution.* — Les triangles IOR et HOM ont leurs angles en O égaux comme opposés par le sommet; donc :

$$\text{OIR}+\delta=\text{OHM}+\alpha.$$

Mais OHM est égal à IHC, à cause de la réflexion sur le miroir CD; IHC est égal à la somme des angles intérieurs $\alpha$ et HIM; enfin ce dernier angle, à cause de la réflexion sur le miroir AB, est égal à SIA, qui lui-même est égal à OIR. On voit donc que

$$\text{OHM}=\alpha+\text{OIR};$$

en ajoutant membre à membre ces deux égalités, et supprimant les parties communes, il vient enfin

$$\delta=2\alpha.$$

**LI.** *Devant un miroir sphérique concave, de* 2 *mètres de rayon, on place une flèche lumineuse de* 1 *décimètre de longueur, perpendiculairement à l'axe principal et à* 5 *mètres du miroir. Où se forme l'image, et quelle en est la grandeur?*



*On met ensuite un petit miroir plan au foyer principal du miroir sphérique, incliné de* 45 *degrés sur l'axe principal, et la face réfléchissante tournée vers ce miroir. Quelle image formeront les rayons réfléchis par le grand miroir sphérique, en tombant sur le petit miroir plan? Quelles en seront la grandeur et la situation? Où placer un écran pour la recevoir, ou bien une loupe pour l'observer et pour l'agrandir?*

*Solution.* — En appliquant la formule générale (1) qui a été donnée (759), on trouve que l'image se forme à $1^m,25$ du miroir, ou à $0^m,25$ du foyer principal. D'autre part, la grandeur de l'image s'obtiendra à l'aide de la proportion (759)

$$\frac{i}{0,1}=\frac{1,25}{5}.$$

La grandeur de l'image est donc de

$$0^m,025.$$

Plaçons maintenant le petit miroir plan au foyer F. L'image, au lieu de se former dans une position perpendiculaire à l'axe principal du miroir sphérique, à $0^m,25$ au delà du foyer, sera renvoyée, par le miroir plan, dans une position symétrique de la première par rapport à ce miroir. Au point F, menons la perpendiculaire à l'axe du miroir sphérique; l'image se trouvera à $0^m,25$ du point F, sur cette perpendiculaire : elle sera parallèle à l'axe, et sa grandeur sera toujours $0^m,025$.

Pour la recevoir sur un écran, il suffit de placer cet écran à l'endroit où cette image est renvoyée par le miroir plan, c'est-à-dire parallèlement à l'axe du miroir sphérique, à $0^m,25$ du foyer F.

Pour la grossir avec une loupe, il faut disposer cette loupe de façon que l'image soit placée entre la lentille et son foyer principal; cette dernière opération est facile, dès que l'on a déterminé la position de l'image renvoyée par le miroir plan.

**LII.** *Deux miroirs concaves* MN *et* M'N' (*fig.* 707), *dont les rayons sont respectivement de* 1 *mètre et de* $1^m,50$, *sont disposés en regard l'un de l'autre, de manière que leurs axes coïncident. La distance* OO' *est de* 3 *mètres. En quel point de l'axe commun devra-t-on placer un objet lumineux, pour que les images réelles de cet objet données par les deux miroirs soient égales?*

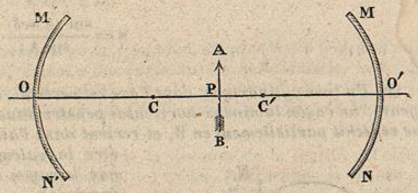

Fig. 707.

*Solution.* — Il est facile de voir que l'égalité des deux images réelles ne peut être obtenue, dans les conditions du problème, que si l'objet est placé dans l'intervalle des deux centres C et C'. La longueur de l'image donnée par le miroir O, à une distance $p_1$ du point O, est alors déterminée par les deux équations (759)

$$\frac{i}{\text{AB}}=\frac{p_1}{\text{OP}}, \qquad \frac{1}{\text{OP}}+\frac{1}{p_1}=\frac{2}{\text{CO}},$$

d'où l'on déduit

$$i=\text{AB}\times\frac{\text{OC}}{2\times\text{OP}-\text{OC}}=\text{AB}\,\frac{\text{OC}}{\text{PO}+\text{PC}}.$$

Quant à la longueur de l'image donnée par le miroir O', on trouverait de même

$$\text{AB}\,\frac{\text{O'C'}}{\text{PO'}+\text{PC'}}.$$

Pour que les deux images soient égales, il suffit qu'on ait

$$\frac{\text{OC}}{\text{PO}+\text{PC}}=\frac{\text{O'C'}}{\text{PO'}+\text{PC'}}.$$