premiers harmoniques du tuyau ouvert (700) : ces harmoniques peuvent s'obtenir en réglant convenablement la pression de la soufflerie.

PROBLÈMES SUR L'OPTIQUE

XLIX. *Deux sources lumineuses* S *et* S', *dont les intensités propres sont* I *et* I', *ont été placées à une distance* d *l'une de l'autre. En quel point faut-il placer un écran en ligne droite avec les deux sources, pour qu'il reçoive autant de lumière de l'une que de l'autre? — Application :* $I' = 4I$, $d = 3$ *mètres.*

Solution. — Représentons par x la distance de l'écran à la source S, que nous supposons de plus faible intensité que S'. Si l'écran est placé entre les deux sources, sa distance à la source S' est $(d-x)$; et on doit avoir

$$\frac{I}{x^2} = \frac{I'}{(d-x)^2},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{I'}{I}}} = \frac{3}{1+\sqrt{4}} = 1 \text{ mètre.}$$

Mais l'écran peut aussi être placé en dehors des deux sources, du côté de la source la moins intense. Soit alors y la distance de S à l'écran; la distance de l'écran à S' est $d+y$, et l'on a

$$\frac{I}{y^2} = \frac{I'}{(d+y)^2},$$

d'où

$$y = \frac{d}{\sqrt{\frac{I'}{I}}-1} = \frac{3}{\sqrt{4}-1} = 3 \text{ mètres.}$$

L. *Deux miroirs plans* AB *et* CD (*fig.* 706), *inclinés l'un sur l'autre, ont leurs faces réfléchissantes en regard; un rayon lumineux* SI *se réfléchit d'abord sur* AB, *suivant* IH; *puis sur* CD, *suivant* HR. *Démontrer que l'angle* δ, *formé par la direction du rayon incident avec celle du rayon deux fois réfléchi, est toujours double de l'angle* α *des deux miroirs.*

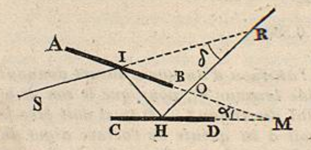

Fig. 706.

Solution. — Les triangles IOR et HOM ont leurs angles en O égaux comme opposés par le sommet; donc :

$$\text{OIR} + \delta = \text{OHM} + \alpha.$$

Mais OHM est égal à IHC, à cause de la réflexion sur le miroir CD; IHC est égal à la somme des angles intérieurs α et HIM; enfin ce dernier angle, à cause de la réflexion sur le miroir AB, est égal à SIA, qui lui-même est égal à OIR. On voit donc que

$$\text{OHM} = \alpha + \text{OIR};$$

en ajoutant membre à membre ces deux égalités, et supprimant les parties communes, il vient enfin

$$\delta = 2\alpha.$$

LI. *Devant un miroir sphérique concave, de* 2 *mètres de rayon, on place une flèche lumineuse de* 1 *décimètre de longueur, perpendiculairement à l'axe principal et à* 5 *mètres du miroir. Où se forme l'image, et quelle en est la grandeur?*

On met ensuite un petit miroir plan au foyer principal du miroir sphérique, incliné de 45 degrés sur l'axe principal, et la face réfléchissante tournée vers ce miroir. Quelle image formeront les rayons réfléchis par le grand miroir sphérique, en tombant sur le petit miroir plan? Quelles en seront la grandeur et la situation? Où placer un écran pour la recevoir, ou bien une loupe pour l'observer et pour l'agrandir?

Solution. — En appliquant la formule générale (1) qui a été donnée (759), on trouve que l'image se forme à $1^m,25$ du miroir, ou à $0^m,25$ du foyer principal. D'autre part, la grandeur de l'image s'obtiendra à l'aide de la proportion (759)

$$\frac{i}{0,1} = \frac{1,25}{5}.$$

La grandeur de l'image est donc de

$$0^m,025.$$

Plaçons maintenant le petit miroir plan au foyer F. L'image, au lieu de se former dans une position perpendiculaire à l'axe principal du miroir sphérique, à $0^m,25$ au delà du foyer, sera renvoyée, par le miroir plan, dans une position symétrique de la première par rapport à ce miroir. Au point F, menons la perpendiculaire à l'axe du miroir sphérique; l'image se trouvera à $0^m,25$ du point F, sur cette perpendiculaire : elle sera parallèle à l'axe, et sa grandeur sera toujours $0^m,025$.

Pour la recevoir sur un écran, il suffit de placer cet écran à l'endroit où cette image est renvoyée par le miroir plan, c'est-à-dire parallèlement à l'axe du miroir sphérique, à $0^m,25$ du foyer F.

Pour la grossir avec une loupe, il faut disposer cette loupe de façon que l'image soit placée entre la lentille et son foyer principal; cette dernière opération est facile, dès que l'on a déterminé la position de l'image renvoyée par le miroir plan.

LII. *Deux miroirs concaves* MN *et* M'N' (*fig.* 707), *dont les rayons sont respectivement de* 1 *mètre et de* $1^m,50$, *sont disposés en regard l'un de l'autre, de manière que leurs axes coïncident. La distance* OO' *est de* 3 *mètres. En quel point de l'axe commun devra-t-on placer un objet lumineux, pour que les images réelles de cet objet données par les deux miroirs soient égales?*

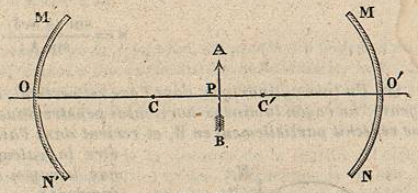

Fig. 707.

Solution. — Il est facile de voir que l'égalité des deux images réelles ne peut être obtenue, dans les conditions du problème, que si l'objet est placé dans l'intervalle des deux centres C et C'. La longueur de l'image donnée par le miroir O, à une distance p_1 du point O, est alors déterminée par les deux équations (759)

$$\frac{i}{AB} = \frac{p_1}{OP}, \qquad \frac{1}{OP} + \frac{1}{p_1} = \frac{2}{CO},$$

d'où l'on déduit

$$i = AB \times \frac{OC}{2 \times OP - OC} = AB\,\frac{OC}{PO + PC}.$$

Quant à la longueur de l'image donnée par le miroir O', on trouverait de même

$$AB\,\frac{O'C'}{PO' + PC'}.$$

Pour que les deux images soient égales, il suffit qu'on ait

$$\frac{OC}{PO + PC} = \frac{O'C'}{PO' + PC'}.$$

En ajoutant ces deux rapports terme à terme, et égalant le résultat au premier rapport, il vient

$$\frac{OC}{PO+PC}=\frac{OC+OC'}{OO'+CC'};$$

si l'on substitue dans cette égalité les longueurs des différentes lignes qui y entrent, et si l'on remarque que PC est égal à PO — OC, on a

$$\frac{1,5}{2PO-1,5}=\frac{2,5}{3,5}=\frac{5}{7};$$

d'où l'on déduit facilement

$$PO=1^m,8.$$

LIII. *Un prisme* BAC (*fig.* 708), *dont l'angle réfringent* A *est connu, est rencontré perpendiculairement à l'une de ses faces par un rayon lumineux* RI *qui se réfracte en* H *suivant* HS. *On mesure la déviation* δ *que le rayon subit par cette réfraction. Déduire, de la connaissance des angles* A *et* δ, *la valeur de l'indice de réfraction de la substance du prisme.*

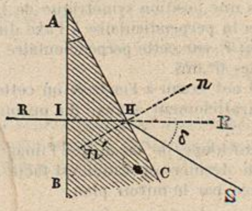

Fig. 708.

Solution. — Soit nn' la normale au point H; on a :

$$\frac{\sin SHn}{\sin RHn'}=n,$$

or, l'angle SHn se compose de deux parties, l'une SHK, égale à δ; l'autre KHn, égale à A, puisque les angles KHn et A ont leurs côtés respectivement perpendiculaires. D'autre part, l'angle RHn', égal à KHn comme opposé par le sommet, est aussi égal à A; en substituant, il vient donc

$$n=\frac{\sin(A+\delta)}{\sin A}.$$

LIV. *Un tube cylindrique, dont l'axe est vertical, est rempli d'une substance réfringente : un rayon lumineux horizontal pénètre dans ce cylindre sous une incidence* i, *se réfléchit partiellement en* H, *et revient dans l'air suivant* KR (*fig.* 709). *Quelle doit être la valeur de l'angle d'incidence* i *pour que le rayon émergent soit parallèle au rayon incident?*

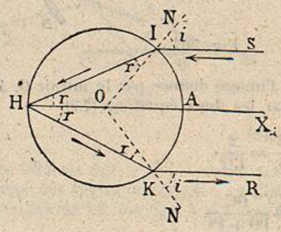

Fig. 709.

Solution. — Supposons qu'un faisceau de rayons homogènes tombe dans la direction SI, perpendiculaire à l'axe du cylindre; il est facile de voir que les réfractions et la réflexion successives ne feront pas sortir le rayon lumineux du plan de la figure, qui est perpendiculaire à l'axe du cylindre. — Les triangles isocèles OHI et OHK sont égaux, comme ayant leurs côtés égaux, et les angles en H égaux; les quatre angles OIH, IHO, OHK et HKO, ont donc une valeur commune r, et si l'on désigne par i l'angle d'incidence SIN, par n l'indice de réfraction de la substance du cylindre, on a

$$\sin i=n\sin r.$$

L'égalité des angles d'incidence et d'émergence est une conséquence de l'égalité des angles HIO et HKO; la figure est donc symétrique par rapport à la droite OX. Pour que les droites SI et KR soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles soient parallèles à HO.

L'angle d'incidence cherché i doit être égal à l'angle IOA, dont la valeur est $2r$; on a donc $r=\frac{i}{2}$, et la relation précédente devient

$$2\sin\frac{i}{2}\cos\frac{i}{2}=n\sin\frac{i}{2},\qquad \sin\frac{i}{2}\left(\cos\frac{i}{2}-\frac{n}{2}\right)=0.$$

Le problème comporte donc, en général, deux solutions :

1re *solution.* — $\sin\frac{i}{2}=0$, ou $i=0$. — Quel que soit l'indice du cylindre réfringent, le rayon XA, dont le prolongement passe par l'axe du cylindre, revient toujours sur lui-même, après avoir subi la réflexion au point H. Cette solution particulière ne fait jamais défaut.

2^e *solution.* — $\cos\frac{i}{2}=\frac{n}{2}$. — D'une part, pour que la valeur de i soit réelle, on doit avoir $\frac{n}{2}<1$, ou $n<2$. — D'autre part, cette condition étant satisfaite, la valeur réelle de i ne convient à la question que si l'on a $i<90^\circ$, et par suite $\frac{i}{2}<45^\circ$, ou enfin $\cos\frac{i}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour que le problème admette cette seconde solution, il faut donc qu'on ait

$$n>\sqrt{2}\qquad\text{ou}\qquad n>1,42.$$

L'indice n étant compris entre ces deux limites, 1,42 et 2, plus la substance est réfringente, plus l'angle i est petit; n variant de 1,42 à 2, l'angle i décroît de 90 à 0 degré.

Les conditions du problème peuvent être réalisées avec un cylindre de verre massif, ayant pour indice 1,5. — Il serait impossible d'obtenir un rayon tel que SI, revenant sur lui-même, si on opérait avec un tube rempli d'eau, d'indice $1,33<1,42$, ou avec un cylindre taillé dans du diamant d'indice 2,45.

LV. *Une droite lumineuse, de* 1 *centimètre de longueur, est placée à* 2 *mètres d'une lentille convergente, perpendiculairement à l'axe principal de cette lentille; la grandeur de l'image est alors égale à celle de l'objet. A quelle distance de la droite lumineuse faudrait-il rapprocher la lentille, pour que la nouvelle image eût* 10 *centimètres de hauteur?*

Solution. — Lorsque l'image est égale à l'objet, la distance de la lentille à l'objet est le double de la longueur focale; on a donc $f=1$ mètre. Approchons la lentille à une distance p de l'objet, telle que l'image, se formant à une distance p' de la lentille, ait 10 centimètres de longueur; nous avons (795) les deux relations

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{1},\qquad \frac{p'}{p}=\frac{10}{1}.$$

En résolvant, on trouve $p=1^m,1$.

LVI. *Un myope voit distinctement les objets situés à une distance au moins égale à* $0^m,20$, *et n'aperçoit pas aisément les objets éloignés. Avec des besicles, il voit distinctement les objets dont la distance est comprise entre* $0^m,60$ *et l'infini. Quelle est la distance focale des verres de ces besicles, et à quelle distance de l'œil se forme l'image des objets placés à l'infini?*

Solution. — Les besicles du myope sont formées de lentilles divergentes, qui donnent d'un objet une image virtuelle rapprochée; soient f la longueur focale de ces lentilles, p la distance de l'objet, p' celle de l'image. On a, en général (798),

$$\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}=\frac{1}{f}.$$

A l'objet situé à $0^m,60$, les besicles substituent une image virtuelle, située à $0^m,20$; on a donc

$$\frac{1}{0,20}-\frac{1}{0,60}=\frac{1}{f}; \quad \text{d'où} \quad f=0^m,30.$$

C'est à cette distance de $0^m,30$ que se forme l'image virtuelle des objets placés à l'infini.

LVII. *Deux lentilles convergentes égales, ayant une distance focale de 1 mètre, sont placées à 1 mètre l'une de l'autre. Quelle position faut-il donner à un objet linéaire, perpendiculaire à l'axe commun des deux lentilles, pour que leur système forme : 1° une image réelle et renversée égale à l'objet, 2° une image réelle deux fois plus grande?*

Solution. — Soient O et O' les centres optiques des deux lentilles L et L' (*fig.* 710); F et O' les foyers de la première, O et F' les deux foyers de la seconde. Construisons l'image d'un point A. Le rayon AI, mené parallèlement à l'axe principal, se réfracte à travers L suivant IO'; et ne subit aucune déviation en traversant la lentille L'. — Le rayon AOH traverse la première lentille sans déviation, et se réfracte suivant HA', parallèlement à l'axe principal de la seconde lentille. A'B' est donc l'image de AB. — Les deux triangles OAB et OO'H sont semblables, et donnent la relation

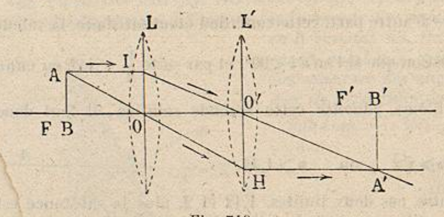

Fig. 710.

$$\frac{O'H}{AB}=\frac{OO'}{OB} \quad \text{ou} \quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{OO'}{OB}.$$

Si l'on veut que l'image A'B' soit égale à l'objet AB, il faut que l'on ait $OB=OO'$; c'est-à-dire qu'il faut placer l'objet au foyer F.

Si l'on veut que $A'B'=2AB$, il faut que $OB=\frac{OO'}{2}$; l'objet sera alors placé à égale distance de la première lentille et de son foyer.

LVIII. *Deux lentilles, l'une convergente et l'autre divergente, dont les distances focales sont respectivement 1 et 2 mètres, sont placées l'une contre l'autre, de manière que leurs axes principaux coïncident. Un objet lumineux, de 10 centimètres de hauteur, est disposé à 4 mètres du système des deux lentilles, perpendiculairement à leur axe commun. Quelle sera la position et la grandeur de l'image?*

Solution. — Soit p la distance de l'objet au groupe des deux lentilles. Supposons que les rayons issus d'un point de l'objet traversent d'abord la lentille divergente, de longueur focale F : ils sortiront de cette lentille en divergeant du point correspondant P_1 de l'image virtuelle, située du même côté que l'objet, à une distance p_1, donnée (798) par l'équation :

$$(1) \qquad \frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}=\frac{1}{F}.$$

Ces rayons traversent la lentille convergente, de longueur focale f, comme s'ils émanaient réellement du point P_1; et ils vont converger en un point P', qui appartient à l'image de l'objet dans le sytème des deux lentilles : soit p' la distance de cette image au groupe des deux lentilles; on a (795) :

$$(2) \qquad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}.$$

Si nous retranchons l'équation (1) de l'équation (2), membre à membre, il vient :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{F}.$$

A la condition que l'on ait $f<F$, on voit que le système des deux lentilles accolées se comporte comme une lentille convergente, dont la longueur focale φ s'obtiendrait par la relation

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{f}-\frac{1}{F}.$$

D'après les conditions de l'énoncé, $f=1$ et $F=2$; on a donc

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \quad \text{et } \varphi=2 \text{ mètres.}$$

L'objet étant situé à une distance de 4 mètres, la distance p' de l'image est déterminée par la relation

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}; \quad \text{d'où } p'=4 \text{ mètres.}$$

La grandeur de l'image est égale à celle de l'objet.

LIX. *Un objet éclairé est à une distance* s *d'un tableau blanc, sur lequel on veut projeter son image. En essayant une lentille, on trouve qu'on peut lui donner deux positions pour lesquelles la projection a lieu, et que la distance de ces deux positions est* d; *quelle est la longueur focale de cette lentille?*

Solution. — Soit p la distance de la lentille à l'objet, lorsque la projection est effectuée par la lentille dans sa première position; la distance de la lentille à l'écran est alors $s-p$, et on a (795) :

$$(1) \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{s-p}=\frac{1}{f}.$$

D'après cette même relation, il est évident que la lentille sera dans la deuxième position, lorsqu'elle sera à la distance $s-p$ de l'objet et à la distance p de l'écran. Pour passer de la première position à la seconde, on aura donc déplacé la lentille, par rapport à l'objet éclairé, de la distance p à la distance $s-p$; le chemin parcouru par la lentille est donc $(s-p)-p=s-2p$, et l'on a :

$$(2) \qquad d=s-2p, \quad \text{ou} \quad p=\frac{s-d}{2}.$$

En portant cette valeur de p dans l'équation (1), on trouve :

$$\frac{1}{f}=\frac{2}{s-d}+\frac{2}{s+d}=\frac{4s}{s^2-d^2},$$

d'où l'on tire

$$f=\frac{s^2-d^2}{4s}.$$

LX. *Un rayon lumineux, provenant d'un point fixe* P (*fig.* 711), *traverse une glace à faces parallèles* G *placée près de la source et inclinée à 45 degrés sur la direction du rayon; il se réfléchit sur un miroir plan* m *qui est situé au centre* C *d'un miroir concave* M; *le rayon suit donc le trajet* PCICHQ, *subissant, au retour, la réflexion sur la glace à faces parallèles; on le reçoit sur un écran* E *situé à une distance* HQ = HP. *On imprime alors au miroir plan* m *un rapide mouvement de rotation autour d'un axe passant par le centre* C *du miroir concave, et situé dans le plan du miroir* m; *on constate que le point* Q, *où le rayon réfléchi vient rencontrer l'écran,* *s'est déplacé en Q'. Connaissant le rayon R du miroir concave, la distance PC = D, la durée T de la rotation du miroir et le déplacement d = QQ', calculer la vitesse de la lumière.*

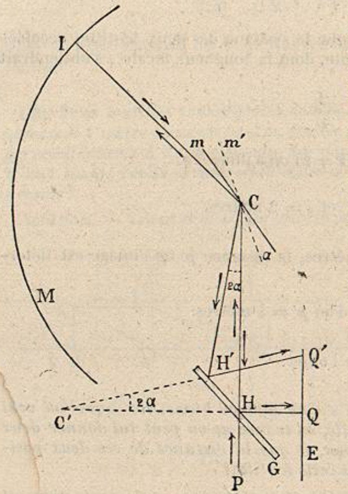

Fig. 711.

Solution. — Quand le rayon lumineux issu de P arrive au point C, le miroir occupe, par exemple, la position *m*; quand il a parcouru deux fois le chemin CI, une fois pour aller, une fois pour revenir, le miroir occupe la position *m'*; le rayon se réfléchit suivant CH'Q'. Soit V la vitesse de la lumière; si l'on désigne par θ le temps qu'a mis le miroir pour se déplacer de *m* en *m'*, c'est-à-dire pour tourner de l'angle α, que nous supposerons évalué en minutes, on a $\theta = \frac{2R}{V}$. Or, pendant la durée T d'une rotation du miroir, celui-ci a tourné de 360 degrés, c'est-à-dire de 21 600 minutes. On a donc la proportion

$$(1) \quad \frac{\theta}{T} = \frac{\alpha}{21\,600} \quad \text{ou} \quad \frac{2R}{VT} = \frac{\alpha}{21\,600}.$$

Cette équation fera connaître la valeur de V, si l'angle α est connu.

Or il est facile de voir que, si un miroir tourne d'un angle α autour d'un axe situé dans son plan, le rayon réfléchi est dévié d'un angle double; on a donc

$$HCH' = 2\alpha, \quad \text{et par suite} \quad QC'Q' = 2\alpha.$$

Cet angle QC'Q' peut se calculer, puisque, dans le triangle rectangle QC'Q', on connaît la base $QQ' = d$, et la hauteur $C'Q = CP = D$. On a exactement $tg\, 2\alpha = \frac{d}{D}$; et en remarquant que le petit angle 2α, évalué en minutes, est proportionnel à sa tangente, et que d'autre part tang $1' = \frac{1}{3438}$, on a

$$2\alpha = 3438' \times \frac{d}{D}, \qquad \alpha = 1719 \times \frac{d}{D}.$$

En remplaçant α par cette valeur dans l'équation (1), on en tire

$$V = \frac{43200}{1719} \cdot \frac{RD}{Td} \text{ (*)}.$$

(*) Cette méthode de détermination de la vitesse de la lumière, qui permet d'opérer sur une distance de quelques mètres seulement, est celle qui avait été employée par Foucault en 1850. Elle l'avait conduit à assigner à la vitesse de la lumière *dans l'air* la valeur 298,000 kilomètres, assez peu différente du résultat obtenu par Fizeau (853). Elle offre surtout l'avantage de s'appliquer également à la détermination de la vitesse de la lumière *dans l'eau*. Il suffit d'interposer sur le trajet CI (*fig.* 711), un tube plein d'eau; on observe alors que le déplacement QQ' devient les quatre tiers de ce qu'il était primitivement; par suite, la vitesse de propagation dans l'eau n'est que les trois quarts de la vitesse dans l'air. — Ce résultat présente, au point de vue du choix entre la théorie de *l'émission* et celle des *ondulations*, une importance capitale.

TABLE DES MATIÈRES

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

LIVRE PREMIER

PESANTEUR ET HYDROSTATIQUE