anda la base AB, de donde resulta $P \times AB = R \times BC$; $P : R :: BC : AB$, que nos dice que *la potencia es á la resistencia, como la altura es á la base.*

112. La *cuña* es un plano inclinado que se introduce para alzar los cuerpos, ó para separar sus partes (*fig.* 26). La diferencia entre el plano inclinado propiamente dicho y la cuña está reducida á que en el plano éste se halla fijo, y el cuerpo marcha á lo largo del mismo; y en la cuña el cuerpo solo tiene movimiento ascensional, y la máquina se desliza por la parte inferior del cuerpo que se quiere elevar. En la cuña se verifican diferentes ciscunstancias que penden de la naturaleza de los cuerpos á que se aplica, y que hace variar notablemente las condiciones del equilibrio ó del movimiento; hay cuerpos en los que el filo ó corte C de la cuña no ejerce accion, pasados los primeros momentos, porque el cuerpo se abre delante del corte, como se ve en la figura, al paso que en otros el filo va produciendo siempre efecto útil, y sufriendo el aparato un gran rozamiento y presion en toda la extension de sus caras. La potencia P se aplica siempre sobre la cabeza AB de la cuña, y la accion se trasmite en las direcciones Q y S sobre las partes laterales.

Tal vez no hay un aparato de uso mas comun, pues que los clavos, los alfileres, los cuchillos, y en general todo instrumento punzante ó cortante, no son otra cosa que cuñas que se introducen para verificar la separacion de las moléculas de los cuerpos segun la necesidad.

LECCION XVII.

Generacion del tornillo y leyes para el equilibrio en el mismo.—Explicacion del tornillo sin fin.—De las cuerdas ó máquinas funiculares.

113. El *tornillo* es un cilindro recto, rodeado de un filete uniforme y saliente, que hace en todas sus posiciones un mismo ángulo con la generatriz.

Se llama *paso del tornillo ó de la rosca* el intérvalo AB (*fig.* 27) comprendido entre dos filetes consecutivos medido paralelamente al eje del cilindro. Si sobre AB se construye un triángulo rectángulo en B, cuya base BM sea igual á la circunferencia del cilindro, y hacemos que el triángulo se arrolle al mismo, el punto M vendrá á confundirse con B; la hipotenusa AEB conservará constantemente la misma inclinacion sobre AB y sus paralelas, y marcará la posicion del filete sobre el cilindro, cuyo filete en las vueltas sucesivas debe ser hipotenusa de triángulos, como BFI, perfectamente iguales al primero, para que la inclinacion sobre la generatriz sea la misma, y los filetes sean por consiguiente paralelos; de donde se sigue que todos pasos de rosca son iguales.

Un punto pesado en equilibrio sobre el filete del tornillo se encuentra sobre un plano inclinado, cuya altura es el paso de la rosca, y la base la rectificacion de la circunferencia del cilindro. Se puede concebir el filete del tornillo como compuesto de tantas líneas paralelas entre sí, como puntos tenga la seccion del mismo,

suponiendo que cada una de éstas rodea un cilindro de un rádio igual á la distancia que existe entre ella y el eje del tornillo.

114. La *tuerca* es un sólido horadado cilíndricamente y rodeado en lo interior por un filete igual al que exteriormente lleva el tornillo á que se aplica. Podemos representarnos la parte interior de la tuerca como el molde de la parte de tornillo que abraza. La potencia actúa en la extremidad de una palanca, colocada en la tuerca ó en el cilindro perpendicularmente al eje.

115. Si imaginamos el tornillo fijo y vertical (*fig.* 28), la tuerca, abandonada á la accion de la gravedad, debe recorrer todos los filetes inferiores; á lo que solo puede oponerse una potencia horizontal F aplicada á la tuerca misma. Supongamos que el peso P de la tuerca se descomponga en tantos mas pequeños representados por *p* como puntos de los filetes de ésta se apoyen en los correspondientes del tornillo, y al mismo tiempo imaginemos que la potencia F se descomponga en tantas otras horizontales como puntos hemos considerado. Sea *f* la fuerza elemental que ha de hacer equilibrio al pequeño peso *p* colocado en A. Tírese por el eje la horizontal IAD, pasando por el punto A, y supongamos que la fuerza *f* actúa perpendicularmente á ID, y ademas, que el peso *p* esté detenido por una fuerza paralela á F: llamemos H el paso de la rosca como altura del plano inclinado que consideramos; hagamos IA=r, como rádio del cilindro, é ID=R, como rádio de la circunferencia que ha de describir la potencia. Puesto que la fuerza *s* sostiene al peso *p* por medio de un plano inclinado, en el que *s*, siendo horizontal, es paralela á la base tendremos $s : p :: H : 2 \pi r$.

Considerando á IAD como una palanca, cuyo punto de apoyo es I, y observando que la fuerza *f* ha de producir el mismo efecto que *s*, tendremos $f : s :: r : R$.

Multiplicando ambas proporciones $f : p :: H : 2 \pi R$ vemos que esta relacion es independiente de *r*, y por tanto será la misma entre la totalidad de las fuerzas *f* ó F y la de los pesos *p* ó P; luego $F : P :: H : 2 \pi R$; lo que nos dice, que *la potencia es á la resistencia, como el paso de la rosca es á la circunferencia descripta por la potencia.*

De aquí se deduce que podemos favorecer á la potencia aumentando el brazo de palanca, ó disminuyendo el paso de la rosca.

116. Si tenemos un torno cuya rueda sea dentada, y que engrane en el paso de rosca ó tornillo, al cual se aplica la potencia por medio de un manubrio, tendremos lo que se llama *tornillo sin fin.*

Para determinar la relacion entre la potencia y la resistencia en el tornillo es lo que constituye la potencia en el torno. En la primera máquina la potencia es á la resistencia que se opone uno de los dientes de la rueda, como el paso de la rosca es á la circunferencia descripta por la potencia; y en la segunda la resistencia del diente de la rueda, que aquí es la potencia, es al peso ó resistencia aplicada al cilindro, como el rádio de este cilindro es al rádio de la rueda. Multiplicando ordenadamente, tendremos que en esta máquina *la potencia es á la resistencia, como el paso de la rosca multiplicado por el rádio del cilindro es al rádio de la rueda multiplicado por la circunferencia que describe la potencia.*

117. Las *cuerdas* ó máquinas funiculares tienen muy poco uso consideradas en sí mismas; pero le tienen muy frecuente acompañando, como hemos visto, al torno

y á la polea. Una cuerda no puede estar perfectamente tensa mas que en la posicion vertical; pues en toda otra situacion la accion de la gravedad sobre cada uno de sus puntos, acompañada de la flexilibilidad de la cuerda, da lugar á una curva, lo cual produce una descomposicion de fuerzas, que es causa de que no se trasmita toda entera la accion de la potencia cuando la cuerda no es vertical. Hemos considerado las cuerdas como líneas matemáticas, ó como si la accion de las fuerzas se ejerciese solo en el eje; pero bien se conoce que en la práctica no es absolutamente cierto el que así se verifique, y ya tratando del torno hemos tenido ocasion de notar la influencia del grueso ó diámetro de la cuerda en la relacion de las fuerzas que allí considerábamos.

LECCION XVIII.

Exposicion de la influencia del rozamiento, y principios generales acerca de la cantidad de movimiento.

118. Hemos considerado la relacion entre la potencia y la resistencia en las máquinas en el caso de equilibrio; y prescindiendo de todas las circunstancias que mas ó menos concurren á alterar esta misma relacion. Bien se echa de ver desde luego que la fuerza que aplicada á una máquina es suficiente para el equilibrio, no lo será para el movimiento, si no recibe un aumento que pueda vencer la inercia de todo el sistema, la rigidez de las cuerdas y el frotamiento.

La rigidez de las cuerdas produce una resistencia considerable, y es una de las causas de que no puedan emplearse poleas ó cilindros de pequeño diámetro, puesto que, debiendo ajustarse las cuerdas perfectamente á las superficies de estos cuerpos, es muy dificil de conseguir sin un grande esfuerzo y detrimento de la cuerda misma. El uso disminuye la rigidez de la cuerda, pero es á expensas de la resistencia que presenta la misma.

El *rozamiento* proviene de las asperezas que los cuerpos presentan en su superficie, asperezas que pueden disminuirse por el pulimento, pero nunca aniquilarse; porque siendo los cuerpos porosos, han de tener por precision cavidades ó intersticios, y por consiguiente partes salientes ó asperezas. Cuando se ponen en contacto las superficies de dos cuerpos, las partes salientes de cada uno se acomodan con mas ó menos exactitud en las cavidades del otro; de donde resulta que si han de resbalar estas superficies, no podrán verificarlo sino doblando ó rompiendo las asperezas.

El rozamiento aumenta hasta cierto punto con la presion que se ejerce sobre las superficies en contacto, puesto que esta fuerza determina una mayor adherencia entre los cuerpos. La extension de las superficies presenta tambien su influencia sebre el rozamiento, principalmente cuando estas superficies no están aplanadas ó pulimentadas. La naturaleza del cuerpo ejerce tambien influencia sobre el rozamiento, observándose que éste es mas considerable en cuerpos homogéneos que en los de naturaleza diferente, por cuanto en aquellos, siendo sensiblemente iguales los poros, y por consiguiente las partes salientes, se acomodan unas en otros, no solo mas fácilmente, sino en mayor número; de donde se sigue la necesidad de un mayor erfuerzo para vencer esta resistencia.

El rozamiento no es el mismo cuando un cuerpo desliza ó resbala, que cuando rueda sobre una superficie: se ha llamado al primero, que es mas considerable, rozamiento de primera especie, y de segunda al que tiene lugar en otro caso. El rozamiento en todos los casos se disminuye con el pulimento de las superficies, puesto que el pulimento no es otra cosa que privar á la superficie hasta donde es posible de las desigualdades ó asperezas que presenta. Ademas del pulimento, el rozamiento disminuye por la interposicion de cuerpos mas ó menos fluidos entre ambas superficies, porque estas sustancias no solo tapan los poros de ambos cuerpos, sino que dejan interpuesta una capa fluida, en la cual por consiguiente gozan las moléculas de una gran movilidad; y en esto está fundado el colocar en los parajes de gran rozamiento en las máquinas sustancias crasas que producen el efecto conocido de la disminucion del rozamiento.

El rozamiento se aumenta por consiguiente erizando de asperezas las superficies; lo cual se observa en algunas herramientas y armas, cuyo asidero lleva esta disposicion para que no se escapen de la mano, en las asperezas del pavimento, indispensables casi á nuestra marcha, ó al menos á nuestro equilibrio, pues sabido es lo que se verifica y la dificultad de marchar sobre el hielo ó sobre un piso de mármol pulimentado. Tambien el rozamiento se aumenta haciendo que el de segunda especie se convierta en rozamiento de primera, y se disminuye procediendo al contrario.

119. Considerada ya la accion de las fuerzas y su aplicacion á las máquinas, así como la influencia de los obstáculos que en todo caso se encuentran, nos falta considerar el efecto útil de estas mismas fuerzas, puesto que de todo lo expuesto se deduce que una fuerza dada no puede producir el mismo efecto aplicada á cuerpos diferentes; así vemos que el hombre pone fácilmente en movimiento algunos cuerpos, y que se halla en la imposibilidad de verificar lo mismo con todos.

La accion de una fuerza aplicada á un cuerpo debe descomponerse en tantas fuerzas iguales y paralelas, cuantas sean las moléculas del cuerpo mismo. Probaremos que han de ser iguales observando que todas se mueven del mismo modo, sin atrasarse ni adelantarse unas á otras, conservando el cuerpo por lo tanto su forma primitiva; y se probará que son paralelas viendo que no se alteran de ningun modo las relaciones de posicion entre las moléculas. Esto nos dice ya por qué una fuerza produce un efecto tanto mas considerable, cuanto menor es la masa á que se aplica; y al contrario, produce un efecto que puede llegar á ser nulo si la masa es muy considerable. En el primer caso será corto el número de fuerzas en que la dada haya de descomponerse, lo que dará para cada una un valor tal vez considerable; en el segundo caso siendo en gran número las moléculas, y por lo tanto las fuerzas parciales en que ha de descomponerse la primitiva, corto será el valor que á cada una corresponda; y si bien es cierto que nunca será nulo, y que la inercia quedará vencida por pequeño que á este valor le supongamos, tam-

bien se verifica que la resistencia de los intermedios y el rozamiento pueden ser suficientes para aniquilar aquella pequeña cantidad. y por lo tanto para que la fuerza no produzca efecto.

120. Vemos por lo que precede que en la estimacion de una fuerza ha de entrar por necesidad la masa á que se aplica; pero tambien echaremos de ver que esto no basta, y que necesitamos ademas saber la rapidez con que la mueve ó la velocidad que la comunica. Como esta velocidad será la misma para todas las moléculas del cuerpo, segun va expuesto, podemos representar la accion de la fuerza por el producto de la masa por la velocidad $f=mv$, que es lo que se llama *cantidad de movimiento.*

Si suponemos otra fuerza aplicada á otra masa diferente, será $f'=m'v'$, de donde $f:f' :: mv:m'v'$, que nos dice que las fuerzas son entre sí como el producto de las masas por las velocidades. Si suponemos iguales las masas, nos dará $f:f' :: v:v'$; que es decir que en este caso las fuerzas son como las velocidades; y si estas fuesen iguales, tendriamos $f:f' :: m:m'$ que nos dice que las fuerzas serian como las masas. Por último, si las fuerzas son iguales $f=f'$, lo serán las cantidades de movimiento $mv=m'v'$, y formando proporcion $m:m' :: v':v$, lo cual nos dice que, en el caso de ser las fuerzas iguales, las masas se hallan en razon inversa de las velocidades.

LECCION XIX.

Movimiento uniforme.—Determinacion de sus leyes.—Movimiento uniformemente acelerado.

121. Las fuerzas, consideradas ya como produciendo movimiento, pueden ser *instantàneas* ó *continuas*; es decir, pueden desenvolver su accion sobre el cuerpo en un período de tiempo indivisible, que es lo que decimos instantáneamente; ó pueden actuar sin interrupcion durante todo el tiempo que permanece el cuerpo en movimiento.

Las fuerzas instantáneas en virtud de la inercia producirán solo movimiento en la direccion rectilínea en que la impulsion se comunique; y como en el cuerpo nada existe que pueda aumentar ni disminuir la accion que recibe, resultará que se moverà con igual rapidez durante todo el tiempo que permanezca en movimiento, ó lo que es lo mismo, correrá en tiempos iguales espacios iguales, cuyo *movimiento* es el que llamamos *uniforme.*

En la determinacion de las circuntsancias de este movimiento entran tres cantidades, que son: el *tiempo*, el *espacio* y la *velocidad.* Llamamos velocidad al espacio recorrido en la unidad de tiempo; por consiguiente la velocidad repetida tantas veces como unidades exprese el tiempo, nos expresará fielmente el espacio total recorrido en toda la duraoion del movimiento, lo cual se expresa por $E=VT$.

De aquí resulta inmediatamente $T=\frac{E}{V}$, es decir, que el tiempo viene representado en este movimiento por la relacion del espacio y de la velocidad; deduciéndose

tambien que el tiempo está en razon directa del espacio é inversa de la velocidad.

Del mismo modo $V=\frac{E}{T}$, que expresa que la velocidad está representada por la relacion del espacio con el tiempo, y que se halla en razon directa del espacio é inversa del tiempo. En las tres fórmulas anteriores, si hacemos $T=1$, resulta $V=E$, que es lo mismo que anteriormente hemos manifestado.

Puesto que tenemos $E=VT$ para la expresion del espacio que un cuerpo corre con movimiento uniforme, el correspondiente á otro cuerpo cualquiera estará representado por $E'=V'T$, y formando proporcion con estas dos ecuaciones, tendremos $E:E' :: VT:V'T'$; lo que nos dice que los espacios son entre sí como los productos de las velocidades por los tiempos. Si hacemos $V=V'$, será $E:E' :: T:T'$ es decir, que siendo iguales las velocidades, los espacios son como los tiempos; y si hiciésemos $T=T'$, seria $E:E' :: V:V'$, que nos dice que á igualdad de tiempos los espacios son como las velocidades: y si tuviésemos $E=E'$ nos daria $VT=V'T'$, de donde $V:V' :: T':T$, que nos expresa que siendo iguales los espacios, los tiempos se hallan en razon inversa de las velocidades.

122. Las fuerzas continuas no pueden producir nunca movimiento uniforme, puesto que irán siempre ó solicitando al cuerpo en la misma direccion en que se mueve, y por tanto haciéndole caminar cada vez mas aprisa, ó acelerando su movimiento; ó bien solicitando al móvil en sentido contrario, ó deteniendo y retardando el movimiento del mismo. De aquí resulta el *movimiento variado*, que solo dividiremos en *acelerado* y *retardado.*

Si en el movimiento acelerado y en el retardado la fuerza aceleratriz ó retardatriz en cada caso es constante, resulta por necesidad una uniformidad en este mismo movimiento, que da lugar al que llamamos movimiento *uniformemente acelerado* ó *uniformemente retardado.*

En estos movimientos hay que considerar como en el anterior el espacio, el tiempo y la velocidad, ademas la *fuerza aceleratriz* ó *retardatriz*, que es la que podemos decir que imprime carácter al movimiento.

Hemos dicho anteriormente que las fuerzas instantáneas producian siempre movimiento uniforme, y que nunca le producirian las contínuas; pero solo hemos tenido en cuenta para expresarnos de esta manera lo que corresponde á la inercia de los cuerpos; porque si atendemos á los obstáculos que todo cuerpo encuentra en su marcha, observaremos que un cuerpo solicitado por una impulsion única, irá perdiendo velocidad en razon á los obstàculos que halle, y en vez de ser movimiento uniforme, lo será retardado: siendo por consiguiente necesario, para que el movimiento sea uniforme, que haya una fuerza contínua que comunique al cuerpo en cada período de tiempo la misma velocidad exactamente que haya sido aniquilada durante el mismo por los rozamientos y demas obstáculos exteriores.

LECCION XX.

Leyes del movimiento uniformemente acelerado y retardado, deducidas del triángulo de Galileo.

123. En el movimiento uniformemente acelerado, y suponiendo que la fuerza aceleratriz *g* actúe desde el orígen del movimiento, tendremos que la velocidad en el primer período de tiempo ha de estar representada por esta misma cantidad *g*. En el segundo período, puesto que recibirá una nueva impulsion, igual tambien con *g*, y que en virtud de la inercia ha de conservar la velocidad *g* adquirida en el primero, la que ha de corresponderle al fin de este segundo período será 2g. En el tercero, por iguales razones, 2g que tiene ya adquiridas y *g* que ahora se le comunica, será 3g. De aquí resulta que en el cuarto será 4g, en el quinto 5g, y al cabo de un tiempo *t* será *tg*: de donde la velocidad $v=tg$ y $t=\frac{v}{g}$.

Si tiramos la línea AB (*fig.* 29) que nos represente el tiempo, y la dividimos en porciones iguales Aa, ab, bd, dB, y por los puntos a, b, d elevamos perpendiculares iguales á la velocidad en cada uno de estos puntos, es decir, en *a* la *ac* igual con *g*, en *b* la *bh* igual con 2g, en *d* la *dn* igual con 3g, y en B la BC igual con 4g; suponiendo estas perpendiculares infinitamente próximas, para lo que habremos de suponer los intervalos Aa, ab, etc. infinitamente pequeños, los extremos de las perpendiculares nos marcarán los puntos por donde, haciendo pasar la línea AC, cerrará un espacio, que será el que nos represente el que corresponde al movimiento uniformemente acelerado.

Este espacio, puesto que se halla representado por el área de un triángulo, la cual sabemos que es igual á la mitad del producto de su base por su altura, será $e=\frac{1}{2}$ AB BC; pero como AB es el tiempo y BC la velocidad, tendremos $e=\frac{1}{2}vt$, y sustituyendo por *v* su valor $v=gt$, resultará para la fórmula del espacio $e=\frac{1}{2}gt^2$.

Estableciendo comparacion, obtendremos que en este movimiento las velocidades son como los tiempos, y los espacios son entre sí como los cuadrados de los tiempos ó de las velocidades. La figura nos dice esto mismo de un modo perceptible y sencillo; así tenemos que en el primer período el tiempo está representado por *Aa* y la velocidad por *ae;* en el segundo el tiempo es Ab=2Aa y la velocidad bh=2ae; en el tercero el tiempo es Ad=3Aa y la velocidad dn=3ae; y en el cuarto el tiempo está representado por AB=4Aa, y la velocidad por BC=4ae: de modo que siendo los tiempos 1, 2, 3, 4 etc., las *velocidades* siguen la misma relacion, ó *son como los tiempos.*

124. Para los espacios tenemos que el primero comprende el triángulo Aae; el segundo el Abh, en el que van comprendidos cuatro iguales al primero, es decir Abh=4Aae; en el tercero está representado por el triángulo Adn=9Aae, y en el cuarto ABC=16Aae: de modo que siendo los tiempos ó las velocidades 1, 2, 3, 4, *los espacios son* 1, 4, 9, 16, es decir, *como los cuadrados* de aquellos.

Esto es para los espacios totales; pero los espacios parciales, es decir, el espacio que en cada unidad de tiempo corresponde, no contando con el que pertenece á las unidades anteriores, siguen una ley que la misma figura nos va á manifestar. El espacio correspondiente á la primera unidad de tiempo está representado como sabemos por Aae; el que corresponde al segundo período, no contando con el corrido en el primero, es el trapecio *aehb*, que comprende tres triángulos iguales con Aae, es decir, aehb=3Aae; el perteneciente al tercero es el trapecio bhdn=5Aae, y el que corresponde al cuarto está representado por dnBC=7Aae; lo cual nos dice que los espacios parciales son como los números impares. Sumando estos espacios parciales tendremos necesariamente los espacios totales; así que en el primero sabemos que es 1, la suma de este con el siguiente dan 1+3=4, espacio total correspondiente á 2; la suma de los tres primeros 1+3+5=9 nos da el espacio total correspondiente; y la de los cuatro 1+3+5+7=16, produce el espacio total que la figura comprende.

Si al empezar á actuar la fuerza aceleratriz tuviese ya el cuerpo un movimiento adquirido, seria necesario sumar las cantidades correspondientes á cada uno para tener las espresiones correspondientes al espacio y á la velocidad.

125. Si por el contrario, la fuerza aceleratriz cesase al cabo de un tiempo cualquiera, el cuerpo conservaria, en virtud de la inercia, la velocidad adquirida, y con ella seguiria con un movimiento uniforme. Supongamos que la fuerza aceleratriz cese al cabo de dos segundos, por ejemplo en *b*, la velocidad adquirida es *bh*; y debiendo, como va dicho, conservarla y seguir con movimiento uniforme, en otros dos períodos de tiempo, describirá el rectángulo *bhmB*. Si paramos la atencion en este rectángulo, vemos que bhmB=8 Aae; y como el espacio corrido en los dos períodos primeros es Abh=4 Aae, resulta que si cesa la fuerza aceleratriz, el espacio que recorre el cuerpo con movimiento uniforme y la velocidad adquirida, durante un período de tiempo igual al trascurrido desde el orígen del movimiento, es doble del que con el uniformemente acelerado habia recorrido.

126. El movimiento uniformemente retardado se halla comprendido en la misma figura, y por tanto la determinacion de sus leyes no ofrece gran dificultad. Todo está en considerar al móvil en B con una velocidad BC, de la cual pierde una parte igual con Co al llegar á *d*, en donde está representada por *dn;* pierde otra parte igual al llegar á *b*, así que está representada su velocidad en este punto por *bh;* y así prosiguiendo hasta A, en que se aniquila completamente el movimiento: de modo que la relacion de los espacios, tiempos y velocidades se deduce de la misma manera, solo que en el uniformemente acelerado los espacios crecian como los cuadrados de los tiempos, y en este movimiento disminuyen en la misma relacion; y por lo mismo los espacios parciales que allí aumentaban como los números impares 1, 3, 5, 7 etc., aquí, como la figura manifiesta, disminuyen en el mismo órden 7, 5, 3, 1.

LECCION XXI.

Aplicacion de las leyes del movimiento uniformemente acelerado al descenso de los graves.--Máquina de Atwood.

127. La accion de la gravedad, siendo una fuerza continua, como se prueba por la resistencia tambien continua que hay que oponerla, no puede producir un movimiento uniforme; y la observacion y la esperiencia nos dicen que da lugar á un movimiento uniformemente acelerado. Para ver si efectivamente esto es así hay que discurrir algun medio que nos proporcione un descenso lento en los cuerpos sometidos al esperimento, sin que la accion de la gravedad sufra alteracion alguna; estas condiciones son indispensables, porque en el descenso completamente libre es tal la rapidez de la caida, que no es posible medir con exactitud lo que corre el cuerpo en cada unidad de tiempo.

Galileo, á quien se debe el estudio de estos fenómenos, se valió de un plano inclinado, en el que, como ya sabemos, la accion de la gravedad se descompone en dos, de las que una queda destruida por el plano, y la otra, que produce su efecto sobre el cuerpo, puede tener el valor que se desee variando la inclinacion del plano, y por lo mismo puede conseguirse que el cuerpo descienda con tanta lentitud como sea necesario. En el dia se hace uso de un aparato, ideado por Atwood á fines del siglo último, el cual permite que el cuerpo descienda por la vertical, y que la velocidad de la caida se modere en la relacion que creamos conveniente (*fig.* 30). Se compone esta máquina de una polea A, sumamente movible sobre su eje, para conseguir lo cual suelen colocarse dos roldanas de cada lado, dispuestas de modo que el eje de la polea se apoye sobre ellas; con lo que se consigue ponerlas en movimiento y disminuir el rozamiento hasta donde le es al hombre posible: por la garganta de la polea pasa un hilo que sostiene dos pesos B y C, los cuales producirán equilibrio siendo iguales; pero si aumentamos un pequeño peso en B, este cuerpo descenderá, mas como para esto tiene que elevar á C y poner en movimiento todo el sistema, el descenso será tanto mas lento cuanto mas pequeño sea el peso adicional respecto de la suma de todos ellos. Al lado de la línea de descenso del cuerpo B lleva una escala dividida en pulgadas y líneas, cuyo cero coincide con el punto mas alto en que B puede colocarse. Para observar hasta donde llega el cuerpo B al cabo de uno, dos etc. segundos, se coloca en el punto correspondiente un platillo D, al cual ha de tocar la base del cuerpo B en el momento mismo en que un péndulo de segundos, que va generalmente unido al aparato, marque la oscilacion 1.ª 2.ª etc., que corresponda al espacio corrido.

Puesto que está en nuestra mano el que en el primer segundo corra el cuerpo un espacio pequeño, podemos disponerlo de manera que ande solo dos pulgadas; de manera que la oscilacion 1.ª del péndulo se confunda con el choque del cuerpo B sobre el platillo D, colocado en dos pulgadas. Siendo los tiempos 1'', 2'', 3'', 4'', 5'', sus cuadrados serán 1, 4, 9, 16, 25, que representarán los espacios; y como en

el primer segundo hemos dispuesto que corra dos pulgadas, habrá que multiplicar por dos estos cuadrados, lo que dará 2, 8, 18, 32, 50, número de pulgadas que corresponden á cada intervalo de tiempo; y poniendo el tope ó platillo D sucesivamente en estos números, se observa que la esperiencia confirma la ley de que los espacios son como los cuadrados de los tiempos.

128. Al determinar en la leccion anterior las leyes del movimiento uniformemente acelerado por medio del triángulo de Galileo, nos hicimos cargo de lo que sucederia á un móvil cuando la fuerza aceleratriz dejase de actuar sobre él: veamos cómo puede demostrarse esperimentalmente en este aparato relativamente á la gravedad. El tope D se reemplaza por un anillo E, por el cual puede pasar sin obstáculo el cuerpo cilíndrico B; el peso adicional se reemplaza por una varilla enteramente igual en peso, pero cuya longitud, escediendo al diámetro del anillo, hace que no pueda pasar por él, se quede detenida sobre el mismo y abandone así al cuerpo B, el cual, siendo igual con C, continuará moviéndose con la velocidad adquirida, y con movimiento uniforme, puesto que los dos pesos, siendo iguales, no hay ya fuerza aceleratriz alguna. Colocando el anillo en los lugares en que antes hemos colocado el tope, esto es, en 2, 8, 18, 32, 50 pulgadas, debe dejar en cada uno de estos puntos, esto es, al cabo de 1'', 2'', 3'', 4'', 5'', el esceso de peso sobre el anillo; y quedando los pesos iguales, debe correr en el mismo tiempo un espacio doble, es decir, 4, 16, 36, 64, 100 pulgadas, para lo que habrá que poner el tope á distancias del cero, espresadas por la suma de lo que ha corrido con movimiento uniformemente acelerado, y lo que corresponde al uniforme, es decir, á 6, 24, 54, 96, 150 pulgadas: lo cual nos dice que si cesa la fuerza aceleratriz, andará en el mismo tiempo un espacio doble del que antes habia recorrido en el mismo tiempo.

Si los números 4, 16, 36, 64, 100 que hemos obtenido, los dividimos por el tiempo empleado, que sabemos es 1, 2, 3, 4, 5 segundos, resultan los números 4, 8, 12, 16, 20, que son como 1, 2, 3, 4, 5; luego las velocidades adquiridas son como los tiempos.

Vemos, pues, que la caida de los cuerpos sigue las leyes del movimiento uniformemente acelerado, y por lo tanto que la accion de la gravedad imprime esta clase de movimiento á los cuerpos en su descenso.

129. El movimiento uniformemente retardado se presenta en el caso de un cuerpo lanzado de abajo arriba, el cual, impulsado por una fuerza inicial y solicitado sin cesar por la accion de la gravedad en sentido contrario á aquella, va perdiendo porciones sucesivas de su velocidad, hasta que ésta queda completamente aniquilada, siendo aquí la gravedad la fuerza retardatriz que solicita al cuerpo. Si aniquilada la velocidad inicial cesase tambien la fuerza de la gravedad, no solo el cuerpo cesaria de elevarse, sino que permaneceria fijo en la altura en que se encontrase; pero la gravedad no cesando jamas de actuar sobre el cuerpo, éste cesa de elevarse y desciende recorriendo la misma vertical por que se elevó, y adquiriendo en cada período porciones de velocidad iguales á las que perdió en los mismos sitios al elevarse, puesto que ahora la accion de la gravedad es fuerza aceleratriz y el movimiento adquirido es uniformemente acelerado; de modo que al fin

de su descenso tendrá adquirida una velocidad igual á la que se le comunicó para elevarre, si bien en sentido contrario de ésta. Esto nos dice que *un cuerpo que cae de cierta altura, llega al fin de su descenso con una velocidad capaz de hacerle elevar á la misma altura y en el mismo tiempo*, pero dirigida en sentido contrario.

130. Sabida ya la accion que la gravedad ejerde sobre los cuerpos y el movimiento que les comunica, nos falta averiguar si esta accion es la misma para todos lor cuerpos: esta investigacion es tanto mas necesaria, cuanto que lo que diariamente se observa es que las masas considerables caen con rapidez, al paso que las pequeñas lo verifican con lentitud. No tiene nada de sorprendente que así suceda, considerando que la fuerza está espresada por el producto de la masa por la velocidad, y que por tanto, variando un factor, debe variar del mismo modo el producto. Pero es necesario hacer ver que el otro factor, es decir, la velocidad, es el mismo para todos los cuerpos, ó que la gravedad les imprime á todos la misma velocidad en el primer período de su descenso. Para esto no habrá mas que tomar cuerpos diferentes, tales como plomo, corcho, piedra, pluma, etc., y dejándolos caer, observar lo que sucede; verificándolo, tendremos que el plomo y la piedra llegarán antes al fin de su caida que el corcho, y éste antes que la pluma; la razon de esta diferencia se halla en la resistencia del aire, puesto que para abrirse paso al través de este fluido hay que poner en movimiento sus moléculas, lo que no se consigue en razon de la inercia, y recordando que la reaccion es igual y contraria á la accion, sino á espensas de la fuerza que el cuerpo posee en su descenso; así es que si lo verificamos en el vacío introduciendo estos cuerpos en un tubo de vidrio de unos seis pies de largo, y haciendo el vacío en él por medio de un aparato que á su tiempo estudiaremos con el nombre de máquina neumática, allí se observa que todos caen en un mismo tiempo en razon á no encontrar obstáculos para el descenso; lo que nos dice que la accion de la gravedad se ejerce del mismo modo sobre todos los cuerpos, y como hemos ya dicho imprime á todos la mirma velocidad.

No debe confundirse la gravedad con el peso de los cuerpos; la primera es una fuerza que, como acabamos de ver, imprime la misma velocidad á todas las partículas de los cuerpos, y el peso es el valor de la resultante de todas estas acciones, elementales; así es como, siendo la gravedad la misma para todos los cuerpos, el peso crece con la masa de estos, y por consiguiente la accion que cayendo pueden producir sobre los que se opongan á su descenso.

En esto consiste que sea casi insensible para nosotros la accion que recibimos de un perdigon que caiga verticalmente de una altura dada, y el efecto mortal que produciria un quintal de la misma sustancia cayendo de igual altura. El fenómeno se verifica del mismo modo en los líquidos; así es que en el aire una masa de líquido se divide por la resistencia del fluido; y si introducimos agua en un tubo hasta su mitad, purgándole de aire y cerrándole herméticamente, se observa al invertirle que el líquido cae reunido, como lo verificaria un sólido, produciendo un choque en el estremo del tubo, que ha dado lugar al nombre que este aparato recibe de martillo de agua.

Podemos decir, en vista de todo lo espuesto, que la gravedad actúa con la misma intensidad sobre la unidad de masa de todos los cuerpos.

LECCION XXII.

Descenso por planos inclinados.—Circunstancias notables que presenta la velocidad comparada con la misma cantidad en el descenso libre.

131. Cuando nos ocupamos de las condiciones del equilibrio de los cuerpos en planos inclinados, examinamos la relacion entre la potencia y la resistencia, que era la de la altura á la longitud, cuya relacion deduciamos, habiendo descompuesto en dos la accion de la gravedad que actuaba sobre el cuerpo. Se trata ahora de averiguar qué es lo que en el descenso se verifica, y para ello determinar el valor de la fuerza paralela al plano, que es la que produce el efecto que podemos llamar útil en este movimiento.

Sea el plano inclinado AC (*fig.* 31) sobre el cual se halla un cuerpo solicitado por la accion de la gravedad R G, la cual se descompone en las dos RF y RE perpendicular y paralela al plano respectivamente. Para hallar el valor de RE sabemos que RE : RG :: BC : AC, de donde $RE = \frac{RG \times BC}{AC}$, y como RG representa la accion de la gravedad, BC es la altura y AC la longitud $RE = g \times \frac{h}{l}$. Esta es la gravedad relativa que es igual á la gravedad absoluta tomada en la relacion de $h : l$; este valor de RE es siempre menor que g, puesto que la cantidad $\frac{h}{l}$ que la multiplica no solo está en forma de quebrado, sino que lo será siempre realmente, pues que nunca BC=h será mayor que AC=l: todo lo mas que podrá suceder será que h=l, en cuyo caso $\frac{h}{l} = 1$; de donde RE=g. Es decir, que siendo la altura igual á la longitud, no hay plano inclinado, la AC se confunde con CB, por consiguiente queda el descenso libre por la vertical, y la gravedad relativa que teniamos pasa á ser gravedad absoluta.

Puesto que la accion de la gravedad es la que determina el descenso por planos inclinados, podemos resolver todas las cuestiones que se presenten aplicando las fórmulas correspondientes deducidas para el descenso libre, pero modificadas en cuanto á la gravedad, poniendo en vez de g la cantidad $g \times \frac{h}{l}$, con lo que serán fórmulas correspondientes al plano inclinado.

132. De sustituir en unas de las fórmulas del descenso libre los valores deducidos de las otras, resulta para la velocidad de la espresion $v = \sqrt{2eg}$. Si tratamos de aplicarla al plano inclinado, tendremos $v = \sqrt{2eg \times \frac{h}{l}}$, y como en el plano e, que es el espacio recorrido, es AC, y la longitud, es tambien AC, resulta e=l, por lo que suprimiéndolas queda $v = \sqrt{2gh}$. Esto es lo que se llama *velocidad debida á una altura*, y de cuya espresion se hace mucho uso en física y en mecánica. Parando la atencion en la fórmula, vemos que la cantidad l ha desaparecido, lo que

nos dice que la velocidad adquirida pende solo de la altura y no de la longitud: de modo que si tenemos (*fig.* 32) diferentes planos inclinados CD, CE, CA que tengan una misma altura, la velocidad final que un cuerpo adquiere es la misma en todos ellos.

Si cayese por la vertical CB, altura del plano, la fórmula seria $v=\sqrt{2eg}$; pero como en este caso BC es el espacio, seria $e=h$ y la fórmula $v=\sqrt{2gh}$, que siendo la misma que anteriormente, nos dice que será tambien la misma la velocidad. Luego un cuerpo que desciende de cierta altura, adquiere la misma velocidad verificándolo por la vertical que por planos inclinados, cualquiera que sea su inclinacion. Puesto que un cuerpo que cae de cierta altura, llega al fin de su descenso con una velocidad capaz de hacerle subir á una altura igual, los cuerpos cayendo por planos inclinados pueden elevarse por otros planos con inclinacion opuesta y perfectamente iguales en altura; y si descendiesen por una curva que miraremos como una série de pequeños planos con diferentes inclinaciones, podrán elevarse en virtud de la velocidad adquirida describiendo un arco igual al de descenso.

Esta velocidad que adquieren los cuerpos en el descenso por planos inclinados, esplica el efecto que en nosotros mismos se produce al bajar una cuesta, en que nos vemos forzados à caminar con una velocidad creciente en virtud de la accion acumulada, y el peligro de un choque ó caida al final del descenso, y aun antes, puesto que la velocidad adquirida es la misma que cayendo por la vertical de una altura igual exactamente á la del plano.

LECCION XXIII.

Generacion del movimiento curvilíneo.—Relacion entre masas, distancias al centro y velocidades.—Movimiento parabólico.

133. Si reflexionamos acerca del efecto que producen las fuerzas instantáneas y las contínuas respectivamente, hallaremos que una sola fuerza no puede producir mas movimiento que el rectilíneo, y que aun concurriendo dos, si no actúan de un modo particular, todavía será rectilíneo el movimiento, como nos lo acredita la resultante de dos fuerzas que forman ángulo, puesto que la diagonal del paralelógramo es una línea recta.

Si tenemos dos fuerzas AS y AC (*fig.* 33) que actúen sobre el punto A, y cuyas intensidades sean AB y AD, construiremos sobre ellas un paralelógramo, y la diagonal AE será su resultante; si no actuasen otras fuerzas, el cuerpo animado de una fuerza, cuya intensidad es AE, continuaria su camino en la direccion rectilínea EF; pero si admitimos que en E actúe otra fuerza EC, cuya intensidad sea EG, podremos sobre ésta y la EF formar un paralelógramo, cuya diagonal EH será la resultante; y si ahora sobre HI, que recorreria el cuerpo abandonado á sí mismo en H, y la HL, intensidad que atribuimos á la nueva fuerza HC, construimos el HLMI, tendremos la resultante representada por HM; si continuásemos del mismo modo, nos hallariamos con un polígono ó trozo de polígono, en

el que imaginando que las impulsiones que desvian al cuerpo de la línea recta se suceden sin cesar, ó lo que es lo mismo, que los puntos A, E, H y M se hallen infinitamente próximos, el polígono se convertirá en una curva.

Vemos, pues, que para el movimiento curvilíneo se necesita el concurso de dos fuerzas; una que solicite al cuerpo en direccion de un punto fijo C, y otra, tal como AB, que tienda á alejarle del mismo punto. Estas dos fuerzas reciben el nombre de *centrales*, denominándose *fuerza centrípeta* la que conspira á dirigir al cuerpo hácia el punto fijo, y *centrífuga* la que tiende á alejarle.

Si en un punto cualquiera de la curva cesase una de las fuerzas, la otra produciria sola todo su efecto y el cuerpo seguiria su direccion; así cesando instantáneamente la centrífuga, el cuerpo obedeceria á la centrípeta, y si ésta cesase, v. gr. en un punto H, el cuerpo seguiria la direccion HI, que es la de la tangente á la curva en el punto que consideramos. En el caso de que no cesase una ú otra instantáneamente, sino que fuesen cediendo sucesivamente, daria lugar á una espiral que se acercaria al centro en el caso de hacerse preponderante la centrípeta, y se alejaria del mismo si predominase la centrífuga: así para que la curva descripta sea una circunferencia de círculo, es necesario que las dos fuerzas sean iguales.

La observacion y la experiencia dan que la fuerza centrífuga es tanto mayor cuanto mas considerables son las masas circulantes, y mayor es el radio de la curva descripta, aumentando tambien con la velocidad, ó lo que es lo mismo, cuando el tiempo periódico disminuye, hallándose, pues, en razon directa de las masas y de los rádios ó distancias al centro é inversa del cuadrado del tiempo, es decir,

$$F : F' :: \frac{MR}{T^2} : \frac{M'R'}{T'^2}$$

Para verificar estas leyes experimentalmente hay varios aparatos, cuya descripcion no entra en el plan que nos hemos propuesto, enseñando mas la vista de la máquina que cuantas descripciones pudieran darse. Sin embargo, hay una parte en ella que puede y debe recordarse: consiste en una varilla (*fig.* 34) en la que van dos masas A y B que pueden deslizar fácilmente á lo largo de la misma; si estas masas, que están unidas por medio de un hilo, se colocan á distancias iguales del centro, la mayor A arrastra á la otra en cuanto se establece el movimiento de rotacion, llevándola consigo al extremo N de la barra, lo cual dice que la mayor masa adquiere mayor fuerza centrífuga; lo que tambien se deduce de la proporcion establecida, porque la igualdad de rádio y de tiempo $F : F' :: M : M'$. Para que las fuerzas centrífugas sean iguales, es necesario que las masas se hallen en razon inversa de sus distancias al centro, en cuyo caso la masa A y la B circularàn sin variar su distancia al centro.

Para ver que los líquidos obedecen á la misma ley se usa el aparato de la (*fig.* 35), que consiste en dos tubos de vidrio A y B inclinados al horizonte, en los cuales se encierra agua y azogue en B y agua con un corcho en A; luego que el movimiento de rotacion se establece, el mercurio se dirige á la extremidad B del tubo y el agua queda atrasada; y en el tubo A el agua ocupa la extremidad del tubo, quedando el corcho atrasado, lo cual manifiesta como antes que la mayor masa adquiere mayor fuerza centrífuga.

Los ejemplos que de estas fuerzas pudieran ponerse son tantos que bastarian para ocupar un volúmen entero; así que, dejando los mas notables para la leccion siguiente, diremos que la onda, los soles de artificio, los ventiladores y otros varios aparatos, no son otra cosa que aplicaciones de estos principios.

134. Si tenemos una fuerza instantánea AQ (*fig.* 36) actuando sobre A, producirá un movimiento uniforme, y por tanto el móvil, obedeciendo á esta sola fuerza, correrá en tiempos iguales espacios 1, 2, 3, 4 iguales. Si sobre A actúa la fuerza contínua AP, obligará al cuerpo á correr con movimiento uniformemente acelerado espacios 1, 4, 9, 16, que serán como los cuadrados de los tiempos. Si actúan ambas á la vez, el cuerpo en el primer período solicitado á moverse en ambas direcciones, se encontrará en *a*; por iguales consideraciones se hallará al cabo del segundo en *b*, y así prosiguiendo, y trazará una curva *AabcM*, que será una rama de parábola.

Esta es la curva que describen los cuerpos arrojados horizontalmente, uniéndose á la fuerza de impulsion comunicada la accion de la gravedad, y describen las dos ramas ó la curva entera cuando son lanzados oblícuamente al horizonte. Debe decirse sin embargo que esta curva solo seria parábola en el vacío, pues que la resistencia del aire hace que se forme una trayectoria ó curva particular.

LECCION XXIV.

Movimiento oscilatorio.—Péndulo simple y compuesto.—Influencia de la longitud del péndulo en la duracion de las oscilaciones.—Aplicacion á la medida del tiempo y á la determinacion de la intensidad de la gravedad.

135. Llamamos *péndulo* á todo cuerpo sostenido por una varilla ó cordon tendida verticalmente, y que se mueva con libertad al rededor del punto de suspension. El péndulo en su posicion A (*fig.* 37) permanecerá en equilibrio, puesto quo la vertical que pasa por su centro de gravedad lo verifica tambien por el punto de suspension C, con el cual se destruye la accion de esta fuerza. Si le separámos de esta posicion, le llevamos á B y le abandonamos á sí mismo; la accion de la gravedad G, no pudiendo dirigirle verticalmente á causa del hilo y aun mejor del punto fijo, se descompone en dos, una P en la prolongacion de la varilla que se destruye con el punto fijo, y otra L perpendicular á ésta y que produce su efecto para hacer descender al cuerpo por el arco BA; llegado el cuerpo á este punto se encuentra animado de una velocidad capaz de hacerle elevar á la misma altura y en el mismo tiempo, de forma que recorrerá el arco ascendente AD; llegado al punto D, en que se habrá destruido la velocidad adquirida, se encontrará en las mismas condiciones que en el punto B, por consiguiente descenderá por DA, se elevará por AB, volverá á descender, y así continuará su movimiento de va-y-ven ú oscilatorio.

Estas oscilaciones no parece que deben concluir jamas, puesto que, siendo igual

la semioscilacion ascendente con la descendente en el primer período, deberá continuar de la misma manera en los sucesivos: sin embargo, no se verifica de este modo á causa de la resistencia del aire y del rozamiento inevitable en el punto C de suspension; así que, aun haciéndole oscilar en el vacío, esta segunda causa no desapareceria, y por tanto el movimiento se aniquilaria, aunque no tan pronto como en el aire. Aun cuando el arco ascendente es un poco mas corto que el descendente, el péndulo le recorre con un poco mas de lentitud; así que el tiempo que tarda es el mismo en cada semioscilacion. Esta igualdad se extiende respectivamente á la oscilacion entera, pues que si bien es cierto que la amplitud de la primera va disminuyendo en las sucesivas, el tiempo empleado en la duracion de cada una es el mismo por razones análogas á las expuestas anteriormente; de modo que tarda el péndulo el mismo tiempo en describir todos los arcos, sean grandes ó pequeños, á lo que se da el nombre de *isocronismo*.

136. El *péndulo* llamado *simple* es un péndulo ideal que seria formado por un hilo inextensible y sin peso, á cuyo extremo pendiese un solo punto ó molécula. No existiendo semejante péndulo en la naturaleza, es indispensable referir á él las observaciones que practiquemos con el péndulo ordinario ó compuesto, valiéndose de los medios que en esta misma leccion explicaremos.

Hemos hecho ver en el lugar correspondiente que la accion de la gravedad es la misma para todos los cuerpos; y puesto que el péndulo oscila por la accion de esta fuerza, puede servirnos tambien para comprobar esta verdad: para esto haremos péndulos de plomo, de madera, de marfil &c., y dándoles á todos la misma longitud, los haremos oscilar al mismo tiempo, y se observará que todos marchan acordes, lo cual prueba el principio establecido.

137. La *longitud* influye en la duracion de las oscilaciones, y por tanto en el número de las verificadas en un tiempo dado. Si tomamos tres péndulos (*fig.* 38) CA, CB, CD, cuyas longitudes sean entre sí como 1 : 4 : 9, observaremos que el mas corto CA da dos oscilaciones en tanto que CB da una, y que da tres mientras el mas largo CD da una; esto nos dice que la duracion de las oscilaciones es como las raices cuadradas de las longitudes, ó que el número de oscilaciones se halla en razon inversa de dichas raices.

Puesto que un péndulo oscila con tanta mayor rapidez cuanto menor es su longitud, y al contrario, oscila mas lentamente cuanto su longitud es mayor, resulta que las partes materiales (*fig.* 39) mas próximas al punto C tienden á oscilar con mas rapidez, y así lo verificarian si no estuviesen enlazadas de un modo invariable con las inferiores; éstas á su vez tienden á oscilar con mas lentitud, y con tanta mas cuanto mas próximas al punto A las consideremos. Mas como todas ellas han de verificar su oscilacion en el mismo tiempo, resulta que entre las superiores que están retrasadas por las inferiores, y éstas que están aceleradas por las superiores, ha de haber necesariamente un punto, tal como B, que verifique sus oscilaciones, como si estuviese solo sin ser acelerado por las unas ni retardado por las otras, cuyo punto recibe el nombre de centro de oscilacion, y su dis-

tancia CB al punto de suspension es lo que se llama longitud del péndulo. Esta seria la longitud del péndulo simple si existiese, y ésta es la que hay que tomar siempre para referir al péndulo simple las observaciones del compuesto,

138. La accion de la gravedad, siendo la que determina las oscilaciones del péndulo, influye necesariamente en la duracion y el número de estas oscilaciones. Si esta accion de la gravedad fuese la misma en todos los puntos de la superficie terrestre, un péndulo de una longitud dada oscilaria del mismo modo en cualquier paraje del globo en que le observásemos; pero no puede verificarse esto en razon á que, girando la tierra sobre un eje, y siendo la fuerza centrífuga opuesta á la gravedad, disminuirá á ésta en cuanto ella valga: ademas la accion de esta fuerza centrífuga no es la misma en los diversos paralelos, puesto que es proporcional al rádio, y el de los paralelos es diferente para cada uno de ellos; así la accion de esta fuerza se hallará en su maximum en el ecuador EE′ (*fig.* 40), pero irá disminuyendo en los diferentes paralelos hasta el polo P, en que será nula; ademas solo en el ecuador esta fuerza es directamente opuesta á la gravedad, pues que en los paralelos v. gr. en *rr′*, cuyo rádio es *or*, la accion de la fuerza centrífuga se ejerce en la direccion *rF*, y la de la gravedad en la GrC, que forma ángulo con la primera.

De este movimiento de rotacion, y de la disminucion de la fuerza centrífuga del ecuador al polo, resulta el aplanamiento de la tierra en sus polos, los que por consiguiente quedan mas próximos al centro de la tierra: y como la accion que ésta ejerce sobre los cuerpos, si bien proviene de la que desenvuelven todas las moléculas de ella respecto de todas las del cuerpo atraido, el efecto es el mismo que si una fuerza única emanase de su centro, el cuerpo se encuentra atraido con mas energía por esta causa en el polo que en el ecuador; de modo que solo por el achatamiento de la tierra vemos que la accion de la gravedad disminuye de los polos al ecuador; y como la fuerza centrífuga por su parte hemos visto que conspira al mismo fin, podemos asegurar que la gravedad se halla en su maximum en los polos y disminuye hasta el ecuador.

Para medir la intensidad de la gravedad en los diferentes puntos del globo, no es buen medio el dejar caer un cuerpo y ver lo que corre en el primer segundo de su descenso, puesto que en lugar oportuno hemos visto las dificultades que presenta esta medida. El péndulo, pues, es el medio único de medir la intensidad de la gravedad en los diferentes puntos de la tierra, y el que puede dar por consiguiente la verdadera figura de ésta. El cálculo da para el tiempo de una oscilacion $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ siendo π la relacion 3,14159 del diámetro á la circunferencia, l la longitud del péndulo simple, y g la accion de la gravedad; de donde si $t=1$ se obtiene $g=\pi^2 l$, así para obtener la intensidad de la gravedad no hay mas que medir exactamente l, y multiplicarlo por el cuadrado de π. Por este medio se ha obtenido que la gravedad en Madrid es 35,16905 pies, la longitud del péndulo 513,125 líneas igual 3,56537 pies castellanos, y que lo que corre un cuerpo grave en 1″ son 17 ½ pies próximamente.

El isocronismo del péndulo le hace ser un instrumento á propósito para la medida del tiempo; pero en los relojes es necesario no ver en el péndulo el motor que impulsa el aparato, sino solo el regulador de su marcha, pues que ésta seria necesariamente variada si el motor, que es ó un peso que desciende, ó un resorte que se extiende, quedase abandonado á sí mismo sin un moderador que le colocase en cada instante en las condiciones mismas en que se verificó el impulso inicial.

LECCION XXV.

Leyes de la comunicacion del movimiento en los cuerpos duros y en los elásticos, considerados como simples consecuencias de la ley de inercia.—Choque excéntrico.

Al examinar las leyes de inercia vimos que en la imposibilidad de darse un cuerpo movimiento á sí propio, era necesario que hubiese otro que se lo comunicase, y tambien nos hicimos cargo de que el cuerpo comunicante sufria una pérdida que tenia por medida la cantidad que al otro comunicaba, ó que la reaccion era igual y contraria á la accion. Al mismo tiempo sabemos que para estimar la accion de una fuerza hay que atender á su masa y á su velocidad, que es lo que llamamos cantidad de movimiento. Tambien recordaremos lo que en la elasticidad expusimos respecto á que un cuerpo que ha sido comprimido desenvuelve una accion ó resorte, que tiene por medida el esfuerzo empleado para conseguir la compresion.

139. Recordados estos principios, diremos que para determinar las leyes del *choque de los cuerpos* ó de la *comunicacion del movimiento*, tenemos que dividirlos en dos grandes grupos ó secciones, una de las cuales comprenderá los cuerpos no elásticos, es decir, los que conservan despues del choque la forma que éste les hizo adquirir; y otra en la que se incluirán todos los elasticos, que serán aquellos que despues del choque reobren sobre sí mismos y recuperen la forma que antes tenian.

Sabemos ya que no hay cuerpos desprovistos de elasticidad; pero se pueden mirar hasta cierto punto como tales algunos, como la arcilla húmeda, la pasta de harina en iguales circunstancias, y otros varios en quienes su pequeña elasticidad no altera sensiblemente los resultados que se obtendrian si fuese completamente nula. Tambien sabemos que en los sólidos no hay cuerpos perfectamente elásticos; pero los que lo son de primera especie, dan resultados que difieren muy poco de los que darian teniendo completa esta propiedad.

140. El choque puede ser *central* ó *excéntrico*: esto es, puede verificarse en la direccion de una línea que pase por los centros de inercia de los cuerpos, ó en otra direccion cualquiera.

Sean dos cuerpos no elásticos, en cuya clase incluimos á los *duros* y á los *blandos*; aquellos porque no alterarán de forma por la accion del choque, y nada tendrán que hacer por tanto para recobrarla; y estos porque conservarán la forma que en virtud del choque adquieran, conservándola despues del mismo modo: supongamos que el choque tiene lugar en la direccion de la línea que une los cen-

tros, ó imaginemos las masas iguales Se concibe sin dificultad, y la experiencia lo confirma, que si las direcciones en que se chocan son opuestas y las velocidades iguales, quedarán en reposo en el acto del choque, por destruirse exactamente la accion del uno con la del otro. Si en el supuesto anterior uno de los cuerpos se hallase en reposo y el otro viniese á chocarle con una velodidad cualquiera, ésta se distribuiria entre ambos, es decir, en una masa doble, y por tanto los cuerpos caminarian unidos y con una velocidad que seria la mitad de la que traia el chocante.

En el choque de los cuerpos no hay pérdida alguna de velodidad; lo que uno pierde, es ganado por el otro, y no puede suceder de otra manera en virtud de la inercia: de modo que la suma de las cantidades de movimiento antes del choque es igual á la suma de las cantidades de movimiento despues del mismo; es decir, $MV+M'V'=(M+M')\,x$, llamando x la velocidad final que es igual para ambos. De aquí resulta $x=\frac{MV+M'V'}{M+M'}$, cuya expresion corresponde al caso en que los cuerpos van en un mismo sentido, y dice que la velocidad final se obtiene dividiendo la suma de las cantidades de movimiento antes del choque por la suma de las masas.

Si los cuerpos caminasen en sentidos contrarios seria $x=\frac{MV-M'V'}{M+M'}$, y si el chocado se hallase en reposo resultaria $x=\frac{MV}{M+M'}$.

Vemos que en el caso de ir los cuerpos en sentidos contrarios, no es necesario para que queden en reposo que las velocidades sean iguales, bastando que lo sean las fuerzas ó cantidades de movimiento, para lo cual sabemos que las velocidades han de estar en razon inversa de las masas. Tambien se observa que en el caso de estar en reposo el cuerpo chocado, la velocidad no parece que será nunca nula; pero si la masa del chocado es tal que pueda mirársela como infinita, respecto á la del chocado, la expresion se reduce á cero, y no hay velocidad alguna despues del choque: tal es el caso que se presenta arrojando un proyectil cualquiera sobre un cuerpo de una gran masa.

En el choque excéntrico de estos cuerpos la accion del chocante se descompone en dos; una que pasa por el centro de inercia del chocado, y atra perpendicular á ésta.

141. En el choque de los *cuerpos elásticos* hay que tener presente el primer período durante el cual se comprimen, y pueden por lo tanto considerarse como no elásticos; y el segundo en que obra la elasticidad y recobran la forma primitiva. Durante el primer período, puesto que obran como no elásticos, pueden aplicárseles las fórmulas establecidas; y como en el segundo período la accion de resorte es igual y contraria á la de compresion que ha precedido, será necesario tomar su duplo; de modo que la ganancia ó pérdida que un cuerpo sufrirá en su velocidad siendo elástico, será doble de la que por la misma accion le corresponderia careciendo de aquella propiedad. La observacion y la experiencia están de acuerdo

con lo que acabamos de establecer; así dos cuerpos elásticos que se encuentran en direcciones contrarias teniendo igual masa y velocidad, sabemos que siendo duros quedarian en reposo por la destruccion recíproca de las velocidades; pero en el caso presente, comunicándoles la fuerza de resorte una velocidad igual y contraria á la pérdida, los cuerpos retroceden con velocidades iguales á las que poseian. En el caso de estar el chocado en reposo hemos visto que ambos se movian con una velocidad, mitad de la del chocante, en el mismo supuesto de la igualdad de masas; pero si los cuerpos son elásticos, el chocante, que en el caso anterior perdia la mitad de su velocidad, ahora la perderá toda, y por lo mismo quedarà en reposo; el chocado que adquiria ó ganaba la mitad de la que el chocante traia, ahora, duplicándose esta cantidad, adquirirá una velocidad igual exactamente á la del chocante; de modo que el cuerpo chocante quedará en reposo y el chocado partirá con la velocidad que poseia el primero.

142. Para el choque excéntrico consideraremos un plano AB (*fig.* 41) sobre el cual cae un cuerpo D perpendicularmente; si el cuerpo y el plano no son elásticos, el cuerpo quedará en C, destruyéndose su accion por la resistencia del plano; pero si D es un cuerpo elástico, como por una parte llega al fin de su descenso con una velocidad capaz de hacerle elevar á la misma altura, y por otra la fuerza de resorte le comunica una velocidad igual á la que el choque aniquila en C, pero en sentido contrario, el cuerpo rebotará. y se elevará por la misma línea CD à una altura teóricamente igual á aquella de que descendió. Si el cuerpo cayese oblícuamente sobre el plano (*fig* 42) en una direccion DG, su accion se descompondria en dos, una perpendicular, que seria destruida por la resistencia del plano, y otra paralela con la cual se moveria el cuerpo, que en el caso de no ser elástico seguiria por tanto, la direccion GA; si fuese elástico, la descomposicion de fuerzas seria la misma, pero la elasticidad, desenvolviendo en el cuerpo una fuerza igual y contraria á la IG destruida, ésta se combinaria con la paralela GA, y su resultante GE representará la direccion que tomaria el cuerpo. En este caso el ángulo IGD, que se llama de incidencia, es igual al IGE, que llamamos de reflexion: así en el choque de los cuerpos elásticos *el ángulo de reflexion* es teóricamente *igual al de incidencia;* y decimos teóricamente, porque no siendo los cuerpos perfectamente elásticos, los dos ángulos no serán rigorosa y geométricamente iguales, pero sí con mucha aproximacion.