par les aires des projections : le point G′ est donc bien le centre de gravité du polygone A′B′C′D′E′F′.

Remarque. — Le principe précédent subsiste quand on projette parallèlement à une direction arbitraire.

177. — Corollaire I. *Les centres de gravité des aires de toutes les sections planes d'un prisme sont situés sur une même droite parallèle aux arêtes du prisme.*

178. — Corollaire II. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque est le produit de sa section droite par la distance des centres de gravité de ses bases.*

Ce théorème se démontre dans les éléments de géométrie pour le tronc de prisme triangulaire : nous nous proposons ici de l'étendre au tronc polygonal, et il suffira de prouver cette propriété pour le tronc de prisme droit, car on peut toujours considérer un tronc de prisme quelconque comme différence de deux troncs de prisme droit ayant pour base commune sa section droite.

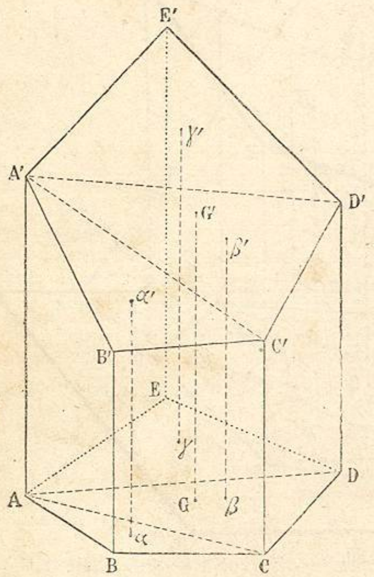


Fig. 81.

Soit le tronc de prisme ABCDE A′B′C′D′E′, dans lequel le plan ABC est perpendiculaire aux arêtes latérales (fig. 81), et soient G, G′ les centres de gravité des deux bases; le droit GG′ est parallèle à AA′.

Nous décomposons ce solide en troncs triangulaires par les plans diagonaux AA′C, AA′D; soient alors α, β, γ, α', β', γ' les centres de gravité des triangles dans lesquels les bases sont décomposées ; en désignant par V le volume du tronc, on a :

$$V = ABC \times \alpha\alpha' + ACD \times \beta\beta' + ADE \times \gamma\gamma'.$$

Or, des forces parallèles, sollicitant les points α, β, γ, et proportionnelles aux aires des triangles, ont pour centre le point G ; donc, en appliquant le théorème des moments par rapport au plan A′B′C′D′, et projetant les points α, β, γ parallèlement aux arêtes, nous avons la relation :

$$ABCD \times GG' = ABC \times \alpha\alpha' + ACD \times \beta\beta' + ADE \times \gamma\gamma' ;$$

donc on a finalement :

$$V = ABCD \times GG' ;$$

ce qu'il fallait prouver.

179. — Corollaire III. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque est le produit de l'une de ses bases par la distance du centre de gravité de l'autre base au plan de la première.*

Car en représentant par S l'aire de la section droite, du tronc dont le plan fait l'angle ω avec le plan de celle des bases dont l'aire est B, et en désignant par G, G′ les centres de gravité des bases B, B′, on a :

$$V = S \times GG' ;$$

or, S étant la projection de B, on a aussi :

$$S = B \cos \omega,$$

d'où :

$$V = B \times GG' \cos \omega,$$

et il est évident que ($GG' \cos \omega$) est la distance du point G′ au plan de la base B.

§ IV. — CENTRES DE GRAVITÉ DES VOLUMES.

180. — Centre de gravité du prisme triangulaire.

Le centre de gravité d'un prisme triangulaire se confond avec le centre de gravité de la section parallèle aux bases et à égale distance de ces plans.

Soit, en effet, le prisme triangulaire ABC A′B′C′ (fig. 82); nous faisons passer un plan par l'arête CC′ et le milieu D de AB : il coupe la face AA′BB′ suivant la parallèle DD′ aux arêtes, et les bases suivant les médianes CD, C′D′ ; ce plan est diamétral pour les portions de droites parallèles à AB et comprises dans le prisme : donc il contient le centre de gravité; il en sera de même pour le plan passant par AA′ et par le milieu E de BC : donc le centre de gravité est situé sur la droite II′ qui joint les centres de gravité des bases.

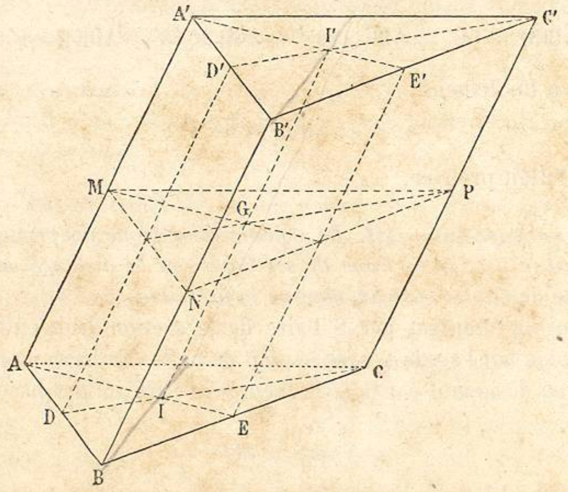


Fig. 82.

Le plan MNP, parallèle aux bases et mené par le milieu M de AA′, est diamétral pour les cordes parallèles à AA′; donc le centre de gravité est à l'intersection G de II′ avec MNP; G est donc le centre de gravité du triangle MNP.

181. — Corollaire I. *Le centre de gravité du prisme triangulaire est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des bases.*

182. — Corollaire II. *Le centre de gravité du prisme triangulaire est le centre des moyennes distances des six sommets.*

183. — Centre de gravité du prisme polygonal.

Le centre de gravité d'un prisme polygonal se confond avec le centre de gravité de la section parallèle aux bases menée à égale distance de ces plans.

Décomposons, en effet, le prisme ABCDE A′B′C′D′E′ (fig. 83) en prismes triangulaires par les plans diagonaux qui contiennent AA′, et considérons la section MNPQR du prisme par le plan parallèle aux bases et passant par le milieu M de AA′ : les centres de gravité des prismes triangulaires coïncident avec les centres de gravité α, β, γ, des triangles dans lesquels la section est décomposée; la question

revient donc à trouver le centre des forces parallèles sollicitant les points α, β, γ, et proportionnelles aux volumes des prismes, c'est-à-dire aux aires de ces triangles.

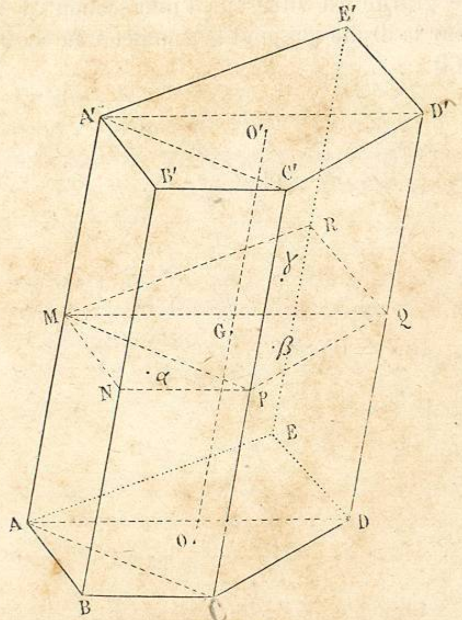


Fig. 83.

Il en faut conclure que le centre cherché est le centre de gravité du polygone MNPQR; c'est ce qu'il fallait prouver.

184. — Corollaire I. *Le centre de gravité d'un prisme quelconque est le milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ses bases.*

185. — Corollaire II. *Le centre de gravité d'un cylindre est le milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ses bases.*

Car le cylindre est la limite du prisme inscrit dont le nombre des côtés de la base croît sans limite, chacun de ces côtés tendant vers zéro.

186. — Centre de gravité du tétraèdre.

Le centre de gravité d'un tétraèdre est situé sur la droite qui joint chaque sommet au centre de gravité de la face opposée, aux trois quarts de cette ligne à partir du sommet.

Soit le tétraèdre ABCD (fig. 84) : le plan qui passe par AD et le milieu E de l'arête opposée est diamétral pour les cordes parallèles à BC ; donc il contient le centre de gravité du solide ; il en est de même du plan qui passe par AB et le milieu F de DC : donc le centre de gravité est situé sur l'intersection AI de ces plans, c'est-à-dire sur la droite qui joint le sommet A au centre de gravité I de la face BCD.

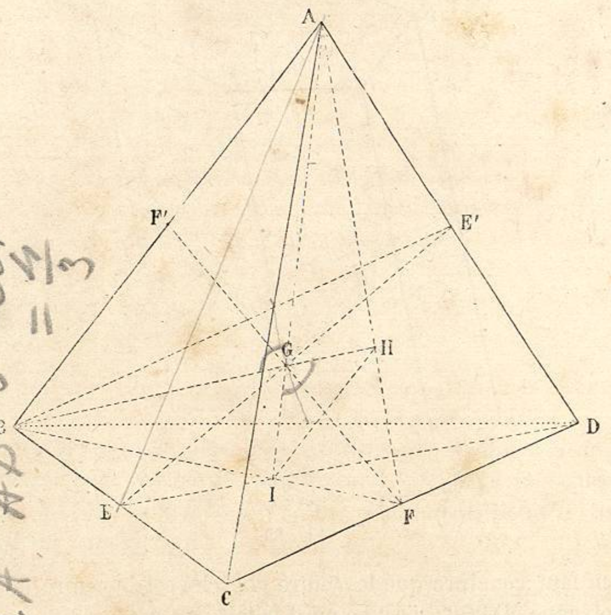


Fig. 84.

$IH = \frac{1}{3} AB$

IGH y ACB

$\frac{GH}{GA} = \frac{IH}{AB} = \frac{1}{3}$

comparando los triang

Pour la même raison ce point appartient à la droite BH qui passe par le sommet B et le centre de gravité H de la face ACD : le centre de gravité cherché est donc au point G de concours des lignes AI et BH.

Cherchons le rapport dans lequel G partage AI : nous remarquons, à cet effet, que IH est parallèle à AB et en vaut le tiers, puisque FH vaut le tiers de FA et FI le tiers de FB : il en résulte que IG est le tiers de GA, ou le quart de IA ; ce qu'il fallait prouver.

187. — Corollaire I. *Si par chaque arête d'un tétraèdre et le milieu de l'arête opposée on fait passer un plan, on obtient six plans qui ont un point commun.*

Car chacun de ces plans contient le centre de gravité du solide.

188. — Corollaire II. *Si l'on joint chaque sommet d'un tétraèdre au centre de gravité de la face opposée, on obtient quatre droites qui ont un point commun, et ce point partage chacune de ces droites dans le rapport de 1 à 3.*

Car chacune de ces droites contient le centre de gravité du solide.

189. — Corollaire III. *Le centre de gravité d'un tétraèdre est le centre des moyennes distances de ses quatre sommets.*

Car le point I (fig. 84) est le centre des moyennes distances des points B, C, D : donc le centre des quatre points est sur IA, au quart de cette ligne à partir de I.

190. — Corollaire IV. *Si l'on joint les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre, on obtient trois droites passant par un même point qui est le milieu de chacune d'elles.*

Car chacune de ces droites passe par le centre des moyennes distances des quatre sommets, et se trouve partagée par ce point en deux parties égales.

191. — Corollaire V. *Le centre de gravité du tétraèdre se confond avec le centre de gravité de la section par un plan parallèle à l'une des faces mené au quart de la distance de cette face au sommet opposé.*

Car les plans diamétraux ADE, ABF (fig. 84) coupent toute section parallèle à BCD suivant des médianes, et par suite le centre de gravité de cette section est sur la droite AI : le point G est donc le centre de gravité de la section passant par ce point et parallèle à BCD ; ce qu'il fallait prouver.

192. — Centre de gravité de la pyramide polygonale.

Le centre de gravité de la pyramide est situé sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base.

Soit la pyramide polygonale SABCDE (fig. 85), que nous décomposons en tétraèdres par les plans SAC, SAD ; coupons la figure par le plan parallèle à la base et mené par le point A' situé au quart de AS : les centres de gravité des tétraèdres précédents seront les centres de gravité α, β, γ des triangles A'B'C', A'C'D', A'D'E' (191).

Nous avons donc à trouver le centre des forces parallèles sollicitant les points α, β, γ, et dont les intensités sont proportionnelles aux volumes de ces tétraèdres, c'est-à-dire proportionnelles aux bases, et aussi aux aires des triangles A'B'C', A'C'D', A'D'E'. Il en faut conclure que le centre de ces forces est précisément le centre de gravité G' du polygone de section.

$\frac{Bh}{3}$ $\frac{B'h}{3}$ $V=\frac{\sqrt{BB'}h}{3}$

195) DG. Teorema
Un trozo de piramide puede descomponerse en 3 tetraedros que tienen por volumenes 2 de ellos la base por el $\frac{1}{3}$ de la altura y el otro es igual á la media proporcional entre estas dos bases por la $\frac{1}{3}$ de la altura

$ca\,a'c' = \frac{1}{3}\,a'mc'h$

$\frac{a'mc'}{B'} = \frac{a'c'}{a'n}$

$\frac{a'mc'}{acb} = \frac{a'm}{a'b'}$

$\frac{a'mc'^2}{BB'} = \frac{a'c'.a'm}{a'n.a'b'}$

$\frac{a'n}{a'c'} = \frac{a'm}{a'b'}$

$1 = \frac{a'n.a'c'}{a'b'.a'n}$

$\frac{a'mc'}{BB'} = 1$

$a'mc' = \sqrt{BB'}$

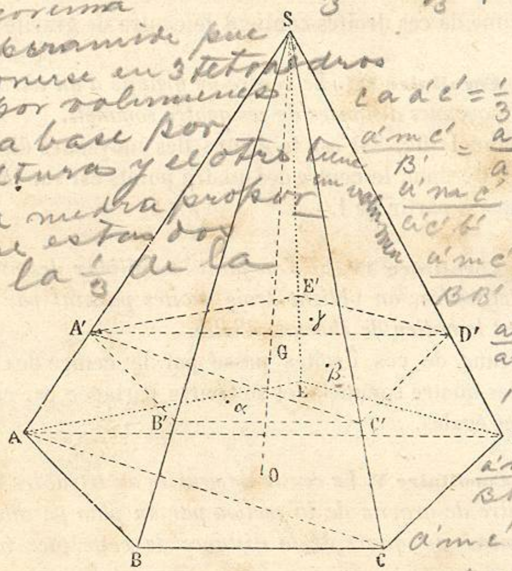


Fig. 85. $ca\,a'c = \frac{1}{3}h\sqrt{BB'}$

Or, les sections de la pyramide par des plans parallèles sont des polygones homothétiques par rapport au point S, les centres de gravité de ces sections qui sont des points homologues, sont donc situés sur SG : donc G est situé au quart à partir de O de la droite qui joint S au centre de gravité O de la base. C'est ce qu'il fallait prouver.

193. — Remarque. — Sachant trouver le centre de gravité d'une pyramide, on peut trouver le centre de gravité d'un polyèdre quelconque qui est toujours décomposable en pyramides.

194. — ***Corollaire.** *Le centre de gravité d'un cône est situé sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base.*

Car le cône est la limite de la pyramide inscrite dont le nombre des côtés de la base croît sans limite, chacun des côtés de cette base tendant vers zéro.

195. — ***Centre de gravité du tronc de pyramide à bases parallèles.**

Le centre de gravité d'un tronc de pyramide à bases parallèles est situé sur la droite qui joint les centres de gravité des bases, et partage cette ligne dans le rapport :

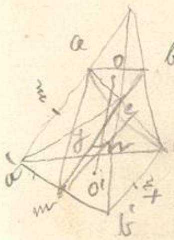
$$\frac{\alpha^2+2\alpha+3}{3\alpha^2+2\alpha+1},$$

α représentant le rapport de similitude des deux bases.

Il est d'abord évident que ce point est situé sur la droite qui joint les centres de gravité des bases, car cette droite passe par le sommet de la pyramide tronquée, et le tronc est la différence de deux pyramides dont les centres de gravité sont sur cette droite.

En second lieu, pour obtenir le rapport des segments de OO' (fig. 86)

Demostracion geometrica



$\frac{x}{y} = \frac{go}{go'}$ $\left(\frac{h+h}{4}\right)$

$\frac{x}{y} = \frac{B\alpha^2+3B'+2\sqrt{B'^2\alpha^2}}{3B\alpha^2+B'+2\sqrt{B'^2\alpha^2}}$

$zx = \frac{Bh}{3}.\frac{1}{4}h + \frac{B'h}{3}.\frac{3}{4}h + \frac{\sqrt{BB'}h}{3}.\frac{2h}{4}$

$\frac{x}{y} = \frac{\alpha^2+3+2\alpha}{3\alpha^2+1+2\alpha}$

$x = \frac{h^2}{12z}(B+3B'+2\sqrt{BB'})$

$zy = \frac{Bh}{3}.\frac{3h}{4} + \frac{B'h}{3}.\frac{1}{4}h + \frac{\sqrt{BB'}h}{3}.\frac{2h}{4}$

$y = \frac{h^2}{12z}(3B+B'+2\sqrt{BB'})$

$\frac{x}{y} = \frac{B+3B'+2\sqrt{BB'}}{3B+B'+2\sqrt{BB'}}$

$\frac{B}{B'} = \alpha^2$

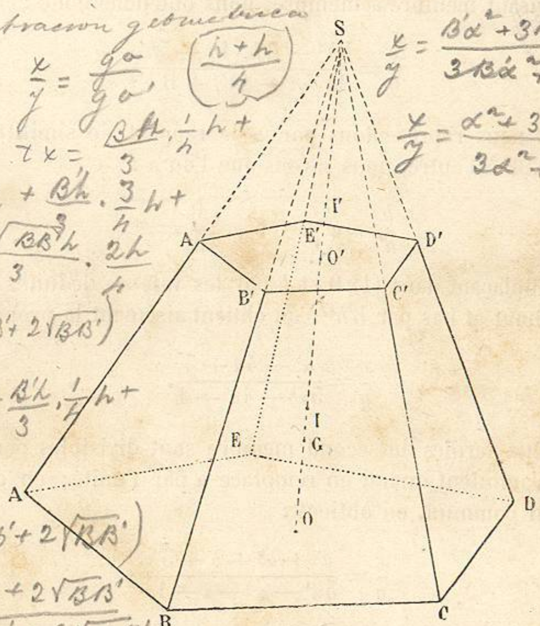


Fig. 86.

déterminés par le point G, nous considérons la pyramide totale SABCDE comme formée du tronc et de la pyramide SA'B'C'D'E' : soient I et I' les centres de gravité des pyramides, soient h et h' les hauteurs, B et B' les bases de ces solides.

Nous pourrons évaluer le rapport de GO à GO′ en appliquant successivement le théorème des moments par rapport aux plans des bases : les distances du point G à ces bases étant x et x', on a :

$$\left(\frac{Bh}{3}-\frac{B'h'}{3}\right)x+\frac{B'h'}{3}\left(\frac{h'}{4}+h-h'\right)=\frac{Bh}{3}\times\frac{h}{4},$$
$$\left(\frac{Bh}{3}-\frac{B'h'}{3}\right)y-\frac{B'h'}{3}\times\frac{h'}{4}=\frac{Bh}{3}\times\left(\frac{3h}{4}-h'\right).$$

Ces deux équations se réduisent à :

$$\left(\frac{Bh}{3}-\frac{B'h'}{3}\right)x=\frac{Bh}{3}\times\frac{h}{4}-\frac{B'h'}{3}\left(\frac{4h-3h'}{4}\right),$$
$$\left(\frac{Bh}{3}-\frac{B'h'}{3}\right)y=\frac{Bh}{3}\left(\frac{3h-4h'}{4}\right)+\frac{B'h'}{3}\times\frac{h'}{4}.$$

En divisant membre à membre, nous obtenons donc :

$$\frac{x}{y}=\frac{Bh^2-B'h'(4h-3h')}{Bh(3h-4h')+B'h'^2}. \qquad (1)$$

Or, si nous représentons par α le rapport de similitude de la base ABCDE à l'autre, nous savons que l'on a :

$$\frac{h}{h'}=\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{B}{B'}=\alpha^2, \qquad (2)$$

En remplaçant dans (1) B et h par les valeurs déduites de (2), et divisant haut et bas par $B'h'^2$, on obtient aisément la proportion :

$$\frac{x}{y}=\frac{\alpha^4-4\alpha+3}{3\alpha^4-4\alpha^3+1}.$$

Les deux termes du second membre sont divisibles par $(\alpha-1)$, car ils s'annulent quand on remplace α par l'unité ; en détruisant ce facteur commun, on obtient :

$$\frac{x}{y}=\frac{\alpha^3+\alpha^2+\alpha-3}{3\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1};$$

les deux termes admettant encore le facteur commun $(\alpha-1)$, après sa suppression il vient finalement :

$$\frac{x}{y}=\frac{\alpha^2+2\alpha+3}{3\alpha^2+2\alpha+1}.$$

C'est le résultat qu'il fallait trouver.

196. — *Corollaire. *Le centre de gravité du tronc de cône à bases parallèles est situé sur la droite qui joint les centres de gravité des bases, et partage cette droite dans le rapport :*

$$\frac{R^2+2RR'+3R'^2}{3R^2+2RR'+R'^2},$$

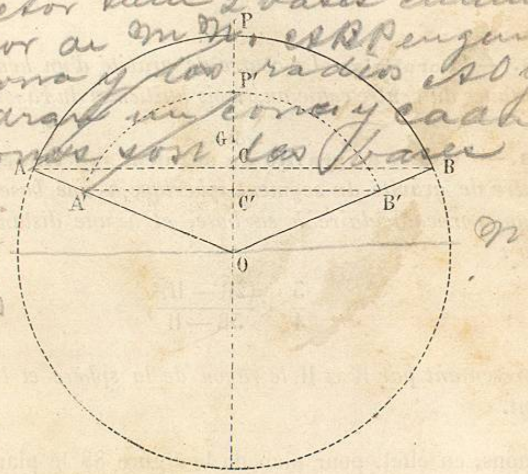
en représentant par R *et* R′ *les rayons des bases.*

197. — *Centre de gravité du secteur sphérique à une base. *Le centre de gravité du secteur sphérique à une base est situé sur le rayon qui passe par le pôle de la zone qui lui sert de base, et si l'on représente par* H *la hauteur de cette zone, et par* R *le rayon de la sphère, la distance de ce point au centre est :*

$$\frac{3}{8}(2R-H).$$

Soit (fig. 87) le secteur sphérique engendré par la révolution du

El sector tiene 2 bases cuando gira al rededor de MN, el AB engendra una zona y los radios AO y OB engendran un cono y cada uno de estos conos posee dos bases



$A'P' = \frac{3}{4} AP$

Fig. 87.

secteur circulaire OAP autour de OP : d'abord la droite OP, étant un axe de symétrie pour le solide, contient le centre de gravité.

En second lieu, nous admettons que le volume du secteur est la limite vers laquelle tend la somme de pyramides dont le sommet est en O, et dont les plans des bases sont tangents à la zone APB, lorsque le nombre de ces pyramides croît sans limite, l'aire de chacune de ces bases tendant vers zéro.

Dans ces conditions, les centres de gravité de ces pyramides tendent à se placer sur la zone A'P'B' concentrique à la première, et dont le rayon est les trois quarts de OA. On en conclut que le centre de gravité du système de ces pyramides a pour position limite le centre de gravité de la calotte sphérique A'P'B'.

Donc le centre de gravité du secteur sphérique est au milieu G de la hauteur P'C' de cette calotte sphérique. On a, par suite :

$$OG = OP' - \frac{P'C'}{2},$$

ou :

$$OG = \frac{3}{4}R - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}H.$$

Ce qui conduit à la formule énoncée :

$$OG = \frac{3}{8}(2R - H).$$

198. — ***Corollaire.** *Le centre de gravité d'un hémisphère est à une distance du centre égale aux trois huitièmes du rayon.*

199. — ***Centre de gravité du segment sphérique à une base.** *Le centre de gravité du segment sphérique à une base est situé sur le rayon perpendiculaire à sa base, et à une distance du centre égale à :*

$$\frac{3}{4} \times \frac{(2R - H)^2}{3R - H},$$

en représentant par R *et* H *le rayon de la sphère et la hauteur du segment.*

Prenons, en effet, pour plan de la figure 88 le plan d'un grand cercle perpendiculaire à la base du segment, et soit OP le diamètre perpendiculaire à AB : cette ligne étant un axe de symétrie, contient le centre de gravité G.

Pour trouver la distance OG, nous considérons le secteur sphérique à une base OAB dont le centre de gravité I est connu, et nous le décomposons dans le segment APB et le cône OAB dont le centre de gravité est K.

En appliquant le théorème des moments par rapport au plan MN perpendiculaire au point O de OP, nous avons l'équation :

$$\text{vol. seg}^{t} \times OG = \text{vol. sect}^{r} \times OI - \text{vol. cône} \times OK,$$

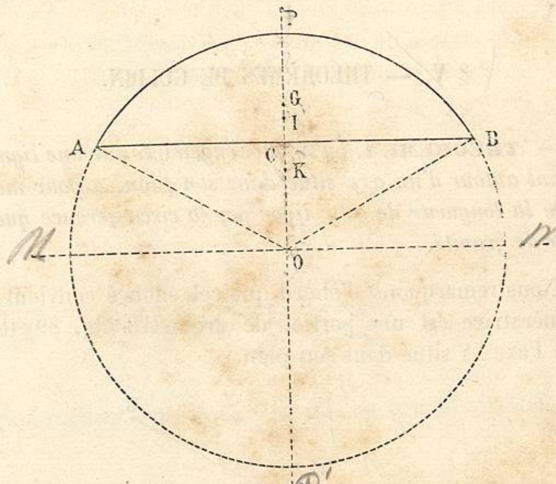


Fig. 88.

en remplaçant ces volumes par les expressions connues :

$$\left(\frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi \overline{AC}^2 \times H\right) OG = \frac{2}{3}\pi R^2 H \times \frac{3}{8}(2R - H) - \frac{1}{3}\pi \overline{AC}^2 \times (R - H) \times \frac{3}{4}(R - H).$$

Or on a :

$$\overline{AC}^2 = H \times (2R - H);$$

en remplaçant, il vient :

$$\frac{4}{3}H^2(3R - H) \times OG = R^2 H(2R - H) - H(R - H)^2(2R - H);$$

d'où enfin :

$$OG = \frac{3}{4} \times \frac{(2R - H)^2}{3R - H}.$$

Remarque. — La démonstration précédente suppose que le segment considéré n'est pas supérieur à une demi-sphère, mais il est facile de s'assurer que le résultat ne dépend pas de cette hypothèse.

200. — Corollaire. *Le centre de gravité du segment sphérique à une base est situé à une distance de cette base égale à :*

$$\frac{H}{4}\times\frac{4R-H}{3R-H}.$$

§ V. — THÉORÈMES DE GULDIN.

201. — *Théorème I. *La surface engendrée par une ligne plane en tournant autour d'un axe situé dans son plan, a pour mesure le produit de la longueur de cette ligne par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

1° — Nous remarquons d'abord que cet énoncé convient au cas où la génératrice est une portion de droite AB (fig. 89) tournant autour de l'axe XY situé dans son plan.

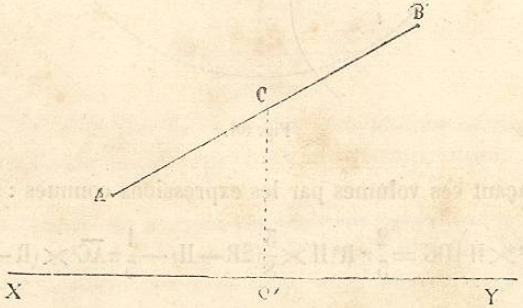


Fig. 89.

La géométrie élémentaire donne en effet pour l'expression de cette surface :

$$AB\times \text{circ. } CC',$$

et le point C, milieu de AB, est bien le centre de gravité de cette ligne.

2° — Considérons une ligne polygonale ABCDE (fig. 90) dont le centre de gravité est G.

La surface S engendrée par la révolution de cette ligne autour de l'axe XY est la somme des surfaces engendrées par ses côtés ; on a donc :

$$(1)\quad S=AB\times 2\pi\, MM'+BC\times 2\pi\, NN'+\ldots.+DE\times 2\pi\, QQ'.$$

Or, en prenant les moments par rapport au plan passant par XY et perpendiculaire au plan de la figure, on a, L étant la longueur de la ligne polygonale :

$$(2)\quad L\times GG'=AB\times MM'+BC\times NN'+\ldots.+DE\times QQ';$$

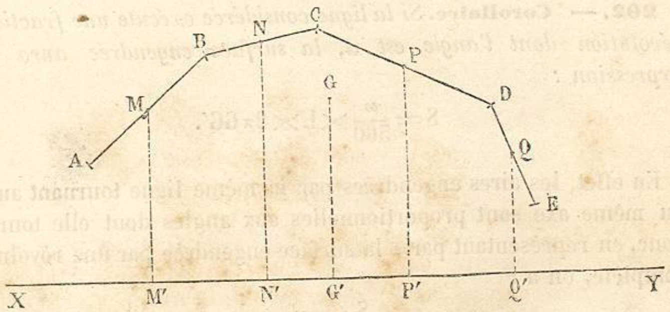


Fig. 90.

et en rapprochant cette égalité de (1), on obtient visiblement :

$$S=L\times 2\pi\, GG',$$

puisque le second membre de (1) se déduit du second membre de (2) en multipliant celui-ci par 2π.

3° — Soit enfin une ligne courbe AB (fig. 91) tournant autour de l'axe XY.

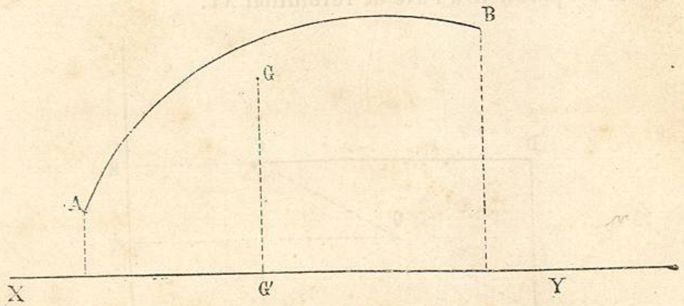


Fig. 91.

Nous rappelons qu'on appelle longueur L de la ligne AB la limite vers laquelle tend la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans AB, lorsque le nombre des côtés croissant sans limite, chacun de ces côtés tend vers zéro.