200. — Corollaire. *Le centre de gravité du segment sphérique à une base est situé à une distance de cette base égale à :*

$$\frac{H}{4} \times \frac{4R-H}{3R-H}.$$

§ V. — THÉORÈMES DE GULDIN.

201. — *THÉORÈME I. *La surface engendrée par une ligne plane en tournant autour d'un axe situé dans son plan, a pour mesure le produit de la longueur de cette ligne par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

1° — Nous remarquons d'abord que cet énoncé convient au cas où la génératrice est une portion de droite AB (fig. 89) tournant autour de l'axe XY situé dans son plan.

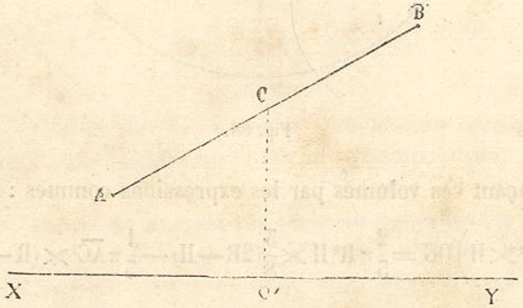


Fig. 89.

La géométrie élémentaire donne en effet pour l'expression de cette surface :

$$AB \times \text{circ. } CC',$$

et le point C, milieu de AB, est bien le centre de gravité de cette ligne.

2° — Considérons une ligne polygonale ABCDE (fig. 90) dont le centre de gravité est G.

La surface S engendrée par la révolution de cette ligne autour de l'axe XY est la somme des surfaces engendrées par ses côtés ; on a donc :

$$(1) \quad S = AB \times 2\pi\,MM' + BC \times 2\pi\,NN' + \ldots + DE \times 2\pi\,QQ'.$$

Or, en prenant les moments par rapport au plan passant par XY et perpendiculaire au plan de la figure, on a, L étant la longueur de la ligne polygonale :

$$(2) \quad L \times GG' = AB \times MM' + BC \times NN' + \ldots + DE \times QQ';$$

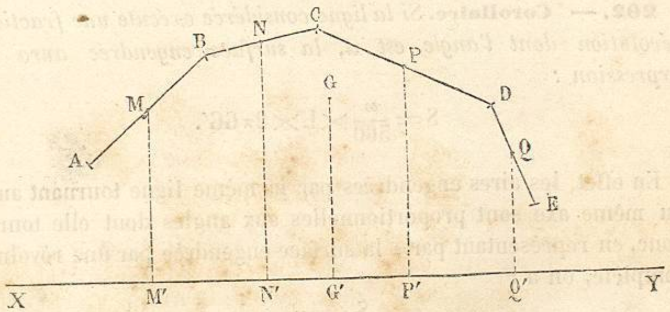


Fig. 90.

et en rapprochant cette égalité de (1), on obtient visiblement :

$$S = L \times 2\pi\,GG',$$

puisque le second membre de (1) se déduit du second membre de (2) en multipliant celui-ci par 2π.

3° — Soit enfin une ligne courbe AB (fig. 91) tournant autour de l'axe XY.

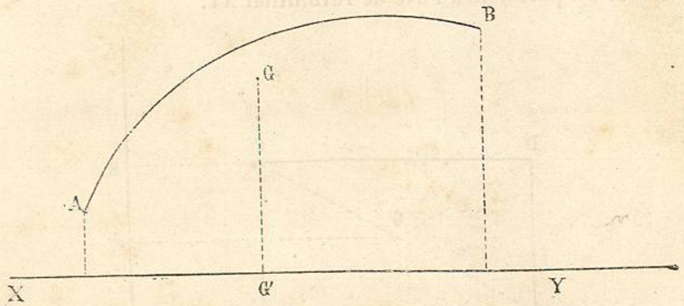


Fig. 91.

Nous rappelons qu'on appelle longueur L de la ligne AB la limite vers laquelle tend la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans AB, lorsque le nombre des côtés croissant sans limite, chacun de ces côtés tend vers zéro.

Dès lors, le théorème étant vrai pour toute ligne polygonale inscrite, est encore vrai pour la ligne courbe.

Ainsi l'on a, dans tous les cas possibles :

$$S = L \times 2\pi\, GG'.$$

202. — * Corollaire. *Si la ligne considérée exécute une fraction de révolution dont l'angle est ω, la surface engendrée aura pour expression :*

$$S = \frac{\omega}{360} \times L \times 2\pi\, GG'.$$

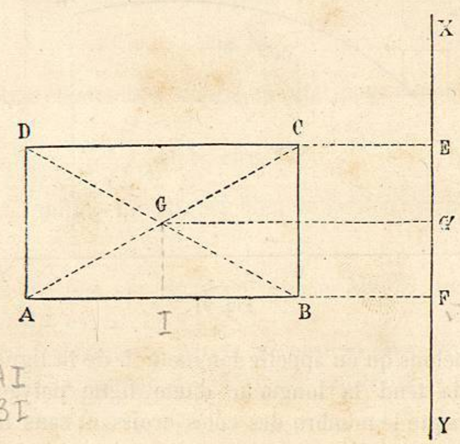
En effet, les aires engendrées par la même ligne tournant autour du même axe sont proportionnelles aux angles dont elle tourne : donc, en représentant par Σ la surface engendrée par une révolution complète, on a :

$$\frac{S}{\Sigma} = \frac{\omega}{360},$$

d'où l'on déduit aisément la formule ci-dessus énoncée.

203. — * THÉORÈME II. *Le volume engendré par une aire plane en tournant autour d'un axe situé dans son plan, est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

1° — Nous commençons par démontrer le théorème dans le cas très particulier où cette aire est un rectangle ABCD (fig. 92) dont nn côté est parallèle à l'axe de révolution XY.



$GG' = AF - AI$
$GG' = BF + BI$
$AI = BI$
$2GG' = AF + BF$
$GG' = \frac{AF+BF}{2}$

Fig. 92.

Le volume V, étant la différence de deux cylindres, a pour expression :

$$V = \pi\, \overline{AF}^2 \times AD - \pi\, \overline{BF}^2 \times AD,$$

ou :

$$V = \pi\,(AF + BF)\,(AF - BF) \times AD.$$

Or, le centre de gravité G de cette aire étant le point de concours des diagonales, on a :

$$2GG' = AF + BF;$$

donc :

$$V = (AD \times AB) \times 2\pi\, GG'.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

2° — Soit, en général, une aire plane, limitée par une ligne quelconque MNPQ (fig. 93) tournant autour de l'axe XY situé dans son plan.

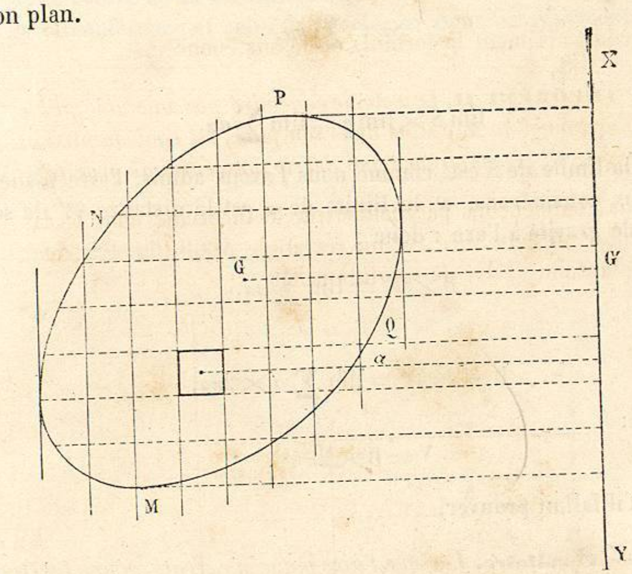


Fig. 93.

Nous considérons les rectangles inscrits dans cette aire, dont les côtés sont parallèles et perpendiculaires à XY, et nous admettons que l'aire est la limite vers laquelle tend la somme des aires de ces rectangles quand leur nombre croît sans limite, chacune d'elles tendant vers zéro.

Soit alors a l'aire de l'un quelconque de ces rectangles, et α la distance de son centre de gravité à XY : le volume engendré par cet élément sera :

$$a \times 2\pi\alpha,$$

et par suite, le volume engendré par l'aire MNPQ sera la limite vers laquelle tend la somme de tous les produits analogues; on a donc :

$$V = \lim \sum a \times 2\pi\alpha.$$

D'autre part, en appliquant le théorème des moments par rapport au plan passant par XY et perpendiculaire au plan de l'aire, et représentant par S la somme des aires des rectangles considérés, et par σ la distance du centre de gravité du système à XY, on a l'équation :

$$S\sigma = \sum a\alpha,$$

donc :

$$\lim S \times \lim \sigma = \lim \sum a\alpha.$$

Mais la limite de S est, comme nous l'avons admis, l'aire plane B que nous considérons, et la limite de σ est la distance GG' de son centre de gravité à l'axe : donc :

$$B \times GG' = \lim \sum a\alpha,$$

ou :

$$B \times 2\pi GG' = \lim \sum a \times 2\pi\alpha,$$

et enfin :

$$V = B \times 2\pi GG'.$$

Ce qu'il fallait prouver.

204.— *Corollaire. *Lorsque l'aire plane n'exécute qu'une fraction de révolution d'angle ω, le volume engendré a pour expression :*

$$V = \frac{\omega}{360} \times B \times 2\pi GG'.$$

Car les volumes engendrés par la même aire en tournant autour du même axe, sont proportionnels aux angles dont elle tourne.

205. — *Remarque. — Les deux théorèmes qui précèdent rendent d'importants services : 1° ils permettent de trouver l'expression de la surface et du volume engendrés par une ligne ou une aire lorsque l'on connaît le centre de gravité de cette ligne ou de cette aire; 2° ils conduisent inversement à trouver le centre de gravité d'une ligne ou d'une aire plane, lorsque l'on connaît l'expression de la surface ou du volume engendré en la faisant tourner autour d'un axe.

206. — *Application I. *La surface et le volume du tore ont pour expression :*

$$S = 4\pi^2 Ra, \qquad V = 2\pi^2 R^2 a,$$

en représentant par R *le rayon du cercle générateur et par* a *la distance de son centre à l'axe.*

On appelle TORE le solide engendré par la révolution d'une circonférence autour d'un axe situé dans son plan.

Or, le centre de la circonférence est à la fois le centre de gravité de la circonférence et celui du cercle; si donc on représente par a

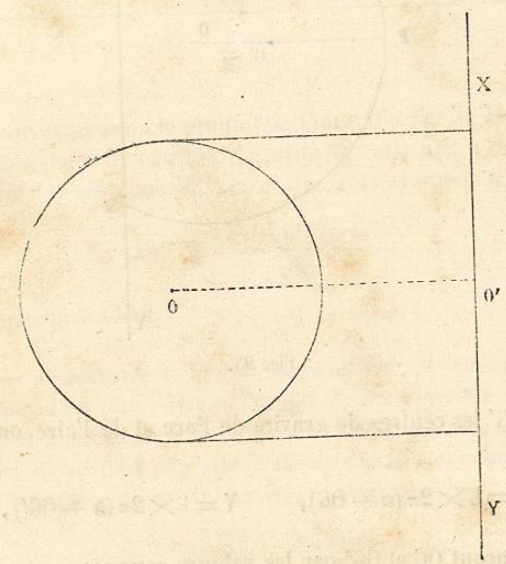


Fig. 94.

la distance OO' (fig. 94), on aura, d'après les théorèmes I et II :

$$S = 2\pi R \times 2\pi a = 4\pi^2 Ra,$$
$$V = \pi R^2 \times 2\pi a = 2\pi^2 R^2 a.$$

207. — * Corollaire. *Si l'on fait tourner un segment circulaire autour de sa corde, la surface et le volume engendré ont pour expression :*

$$S = (aL + cR) \times 2\pi, \qquad V = (12a\lambda + c^3) \times \frac{\pi}{6},$$

en représentant par a la distance du centre à l'axe, par L la longueur de l'arc, par λ l'aire du segment et par c la corde.

Soit, en effet, le segment MPN (fig. 95) tournant autour de MN,

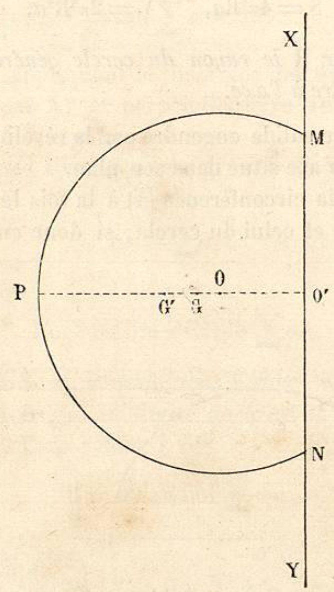


Fig. 95.

soient G et G′ les centres de gravité de l'arc et de l'aire, on a visiblement :

$$S = L \times 2\pi(a + OG), \qquad V = \lambda \times 2\pi(a + OG'),$$

et en remplaçant OG et OG′ par les valeurs connues :

$$OG = \frac{R \times c}{L}, \qquad OG' = \frac{c^3}{12\lambda}.$$

On obtient alors aisément les résultats indiqués.

208. — * Application II. *Le volume engendré par un triangle tournant d'un axe situé dans son plan a pour mesure l'aire du triangle par la circonférence qui a pour rayon la moyenne arithmétique des distances de ses sommets à cet axe.*

En effet, le volume engendré par ABC (fig. 96) tournant autour

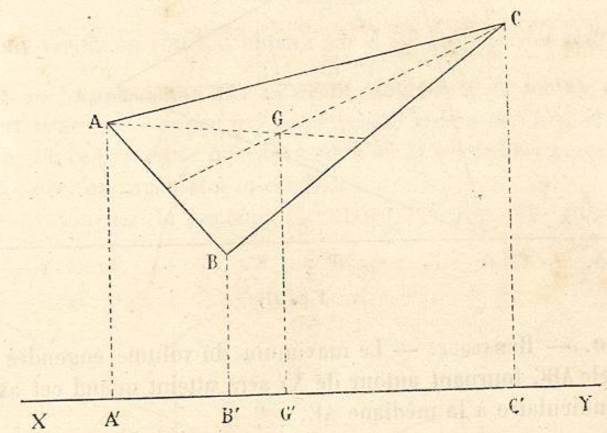


Fig. 96.

de XY a pour expression le produit de l'aire ABC par la circonférence que décrit le point G, centre de gravité de cette aire : or ce point G est le centre des moyennes distances des trois sommets A, B, C, donc :

$$GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3},$$

d'où l'énoncé précédent.

209. — * Corollaire I. *Le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe passant par un de ses sommets et situé dans son plan, a pour expression le produit de la surface que décrit le côté opposé au sommet fixe par le tiers de la hauteur correspondante.*

Car ce volume a pour expression (fig. 97) :

$$V = ABC \times \text{circonf } GG',$$

or GG′ est les deux tiers de EE′, et l'aire ABC est la moitié du produit de BC par AD ; donc :

$$V = \frac{1}{3} AD \times (BC \times \text{circf. } EE'),$$

et le facteur entre parenthèses est la surface décrite par le côté BC opposé au sommet fixe A.

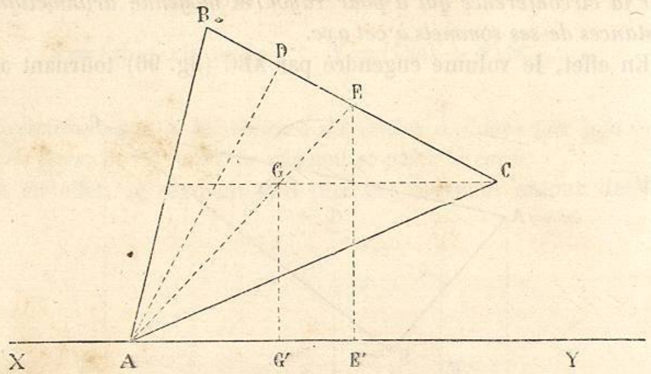


Fig. 97.

210. — REMARQUE. — Le maximum du volume engendré par le triangle ABC tournant autour de XY sera atteint quand cet axe sera perpendiculaire à la médiane AE.

211. — * **Application III.** *Le centre de gravité de l'arc de cercle est sur le rayon qui passe par le milieu de l'arc à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.*

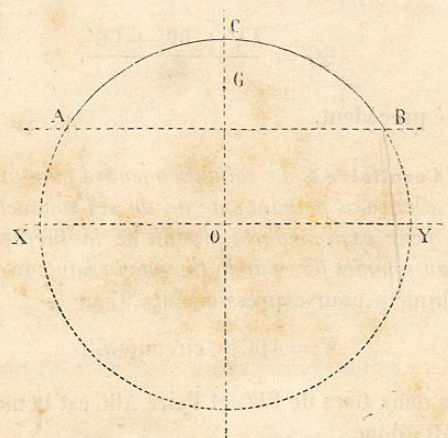


Fig. 98.

Soit, en effet, G le centre de gravité de l'arc ACB (fig. 98). Nous

faisons tourner cet arc autour du diamètre XY parallèle à sa corde : la surface engendrée sera la zone de hauteur AB ; on a donc :

$$2\pi R \times AB = \text{arc } AB \times 2\pi OG,$$

d'où :

$$OG = \frac{R \times AB}{\text{arc } AB}.$$

Ce qui vérifie un résultat obtenu par d'autres procédés (165).

212. — * **Application IV.** *Le centre de gravité du secteur circulaire est situé sur le rayon qui passe par le milieu de l'arc, et à une distance du centre égale aux deux tiers de la quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.*

Faisons tourner le secteur circulaire ABC (fig. 99) autour du

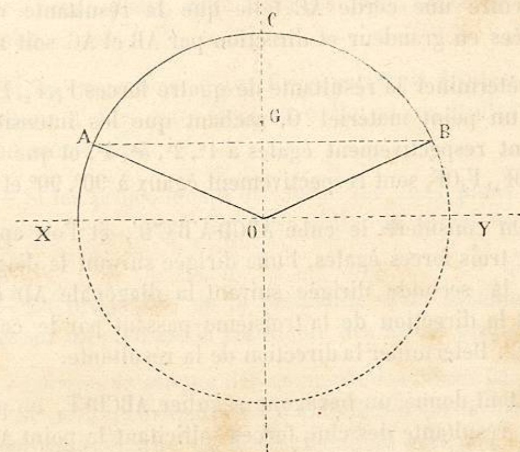


Fig. 99.

diamètre XY parallèle à AB : le volume engendré sera un secteur sphérique que nous savons mesurer ; si donc l'on représente par G le centre de gravité cherché, on aura :

$$\text{zone } ACB \times \frac{1}{3} R = \text{sect}^r\ OAB \times 2\pi\, OG,$$

ou :

$$\frac{2}{3}\pi R^2 \times AB = \pi R \times \text{arc } ACB \times OG,$$

et par suite :

$$OG = \frac{2}{3}\frac{R \times AB}{\text{arc} ACB}.$$