CHAPITRE VI

EXERCICES PROPOSÉS SUR LE LIVRE I

1. — Étant donnée une corde AB d'une circonférence, on propose de construire une corde AC telle que la résultante des forces représentées en grandeur et direction par AB et AC soit maximum.

2. — Déterminer la résultante de quatre forces F_1, F_2, F_3, F_4, agissant sur un point matériel O, sachant que les intensités de ces forces sont respectivement égales à $1^k, 2^k, 3^k, 4^k$, et que les angles F_1OF_3, F_2OF_4, F_1OF_2 sont respectivement égaux à 90^o, 90^o et 60^o.

3. — On considère le cube ABCD A'B'C'D', et l'on applique au sommet A trois forces égales, l'une dirigée suivant la diagonale AC' du cube, la seconde dirigée suivant la diagonale AD' de la face AA'DD', et la direction de la troisième passant par le centre de la face BC B'C'. Déterminer la direction de la résultante.

4. — Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on propose de trouver la résultante des cinq forces sollicitant le point A et représentées en grandeur et direction par AB, AC, AD, AE, AF.

5. — Soient AB un diamètre d'une circonférence, et deux cordes CD, EF égales entre elles et perpendiculaires à AB : prouver que la résultante des forces représentées en grandeur et direction par AC, AD, AE, AF, ne dépend pas de la position des cordes CD et EF.

6. — On considère un triangle rectangle ABC, dont l'hypoténuse BC est partagée en n parties égales aux points D, E, F..., déterminer la résultante des forces représentées en grandeur et direction par les droites AB, AD, AE..., AC.

7. — Étant donné un trièdre trirectangle OXYZ, on applique en O des forces F_1, F_2, F_3 agissant suivant les arêtes OX, OY, OZ et ayant

pour intensités 2, 4, 6; puis on applique au même point O les trois autres forces :

$F_4 = 1$, située dans le plan ZOX, et faisant des angles de 45^o avec OX et OZ ;

$F_5 = 2$, située dans le plan XOY et faisant des angles de 120^o et 30^o avec OX et OY.

$F_6 = 6$, située dans le plan ZOY, et faisant des angles de 30^o à 60^o avec OY et OZ.

1° Calculer l'intensité et les cosinus directeurs de la résultante;

2° Calculer le moment de cette résultante par rapport à un axe parallèle à OZ, situé dans le plan XOZ, à une distance de 3 mètres de cette ligne.

8. — Si les moments d'une force par rapport à trois points sont nuls pour chacun d'eux, cette force est nulle, ou ces points sont en ligne droite.

9. — Si les projections d'une force sur trois droites sont nulles pour chacune d'elles, cette force est nulle, ou ces droites sont parallèles à un même plan.

10. — Si les projections d'une force sur deux plans sont nulles pour chacun d'eux, cette force est nulle, ou ces plans sont parallèles.

11. — La projection de la résultante d'un système de forces parallèles sur un plan est la résultante des forces projections.

12. — Lorsque la somme des moments des forces parallèles d'un système est nulle pour deux plans parallèles à leur direction commune, que peut-on dire de la résultante du système, en supposant successivement que les plans considérés aient une droite commune ou soient parallèles entre eux ?

13. — 1° Deux couples égaux étant situés dans le même plan, et tendant à produire des rotations de sens contraires, se font équilibre lorsque leurs bras de levier se coupent en parties égales.

2° Deux couples égaux situés dans le même plan ou dans des plans parallèles, et tendant à produire des rotations inverses, se font équilibre si leurs bras de levier sont parallèles.

Conclure de ces deux principes :

1° Que deux couples égaux de sens contraire se font toujours équilibre quand ils sont dans un même plan ou dans des plans parallèles;

2° Que l'on ne change pas l'effet d'un couple sur un corps en le transportant d'une façon quelconque dans son plan ou dans un plan parallèle à celui-ci ;

3° On peut remplacer un couple par un couple de même moment agissant dans le plan du premier ou dans un plan parallèle.

14. — En traçant dans un carré les droites qui joignent les milieux de deux côtés consécutifs, on forme des triangles égaux, trouver le centre de gravité de la surface obtenue en supprimant un, deux ou trois de ces triangles.

15. — Dans un hexagone régulier ABCDEF dont le centre est O, on supprime le triangle AOB, ou les deux triangles AOB, BOC ; trouver le centre de gravité du reste de l'aire.

16. — Dans un parallélogramme ABCD dont le centre est O, on supprime l'aire AOB; trouver le centre de gravité du reste de l'aire.

17. — Déterminer le centre de gravité du périmètre d'un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés.

18. — Trouver le centre de gravité de la surface d'un cube dont l'une des faces est enlevée.

19. — Trouver le centre de gravité de l'aire formée par un triangle rectangle et les carrés construits extérieurement sur ses côtés.

20. — Soit I le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, pesant et homogène : calculer le rayon de la circonférence de centre I, qu'il faut découper dans le triangle pour que le centre de gravité de la partie restante soit le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

21. — Un triangle pesant et homogène ABC, dont tous les éléments sont connus, est suspendu par le sommet A : calculer le poids qu'il faut appliquer au point B pour que le côté BC soit horizontal.

22. — On considère un tétraèdre ABCD, soit AE la diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC, et soit AF la diagonale du parallélogramme construit sur AE et AD : prouver que AF passe par le centre de gravité G du tétraède et que la longueur AG est le quart de AF.

23. — Trois forces parallèles et de même sens sollicitent les sommets A, B, C d'un triangle; calculer les distances du centre du système aux trois côtés en supposant :

1° Que les intensités sont proportionnelles aux côtés opposés ;

2° Que les intensités sont inversement proportionnelles à ces côtés.

24. — Deux sphères de rayon R et r, de poids P et p, sont liées entre elles par une barre pesante cylindrique dont l'axe passe par les centres : cette barre a pour longueur D et pèse π par mètre; déterminer la position du centre de gravité de ce système.

25. — Étant donné un carré ABCD, trouver un point M intérieur à cette figure, tel que ce point soit le centre de gravité de la partie du carré obtenu en supprimant le triangle AMB.

26. — Trouver le centre de gravité d'une sphère dans laquelle a été pratiquée une cavité sphérique, connaissant les rayons R et r des deux sphères et la distance D de leurs centres.

27. — Une coupe hémisphérique a une épaisseur constante égale à α, et le rayon intérieur est r; calculer la distance du centre de gravité au centre.

28. — On coupe un cube par le plan qui contient les milieux de trois arêtes aboutissant à un même sommet, et l'on demande le centre de gravité du volume restant.

29. — On considère le cylindre de révolution engendré par le rectangle ABIK tournant autour de IK; on enlève le cône engendré par AKF, dont la hauteur KF est le cinquième de KI, et l'on ajoute le cône engendré par BIE, dont la hauteur EI est le tiers de IK. Calculer le rapport des segments dans lesquels le centre de gravité du solide partage EK.

30. — Si l'on considère un système de N points : $A_1 A_2 \ldots A_n$, dont le centre des moyennes distances est O, et un point arbitraire M de l'espace, la résultante des forces représentées en grandeur et direction par $MA_1\, MA_2 \ldots MA_n$ a pour direction MO, et pour intensité $n \times MO$.

On en conclut le théorème suivant, dû à Leibnitz :

Si l'on applique au centre des moyennes distances d'un système de points des forces représentées en grandeur et direction par les distances de ce centre à tous les points, on a un système en équilibre et réciproquement.

Par exemple, si les molécules égales d'un corps homogène sont attirées vers le centre de gravité de ce corps par des forces proportionnelles à leurs distances à ce centre, toutes ces forces se feront équilibre.

31. — La somme des carrés des distances mutuelles des n points $A_1A_2 \dots A_n$ d'un système est égale au produit par n de la somme des carrés des distances de ces points au centre O de leurs moyennes distances.

32. — Trouver les positions d'équilibre d'un point matériel M, assujetti à rester sur une sphère donnée O, et sollicité par des forces émanant de deux points donnés A et B, et proportionnelles aux distances MA, MB.

33. — Trouver la position d'équilibre d'un point matériel attiré par les sommets d'un triangle donné, les forces attractives ayant des intensités données.

34. — Étant donné une ellipse, ou une parabole, en grandeur et position, construire les positions d'équilibre d'un point matériel pesant assujetti à rester sur la courbe.

35. — Deux points A et B, étant situés sur une même horizontale à une distance AB égale à $2a$, un cordon de longueur a est attaché en A, et porte à son autre extrémité un anneau dans lequel passe un deuxième cordon dont une extrémité est fixée en B, tandis que l'autre est sollicitée par un poids donné. On propose de déterminer la position d'équilibre de ce système.

36. — Un point matériel pesant 2P, assujetti à se déplacer sur la surface interne d'un hémisphère limité à un cercle horizontal, est fixé à l'extrémité d'un cordon qui s'appuie sur le bord de l'hémisphère et dont l'autre extrémité est sollicitée par un poids P; déterminer la position d'équilibre du point matériel.

37. — Un point matériel pesant A est fixé à l'extrémité d'un cordon fixé lui-même au point O; une force horizontale tient le point en équilibre lorsque l'angle que fait OA avec la verticale est α : calculer l'intensité de cette force.

38. — Une barre rigide AB de poids 2P, libre de se mouvoir autour du point A, est reliée à un point fixe C par un cordon qui est sollicité à l'autre extrémité par un poids égal à P; on suppose la direction AC verticale et les longueurs AB et AC égales entre elles : déterminer la position d'équilibre.

LIVRE II

ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE MACHINES SIMPLES

CHAPITRE PREMIER

RÉDUCTION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE

214. — Théorème I. *Les forces qui sollicitent un corps solide peuvent toujours être réduites à trois forces dont les directions passent par trois points arbitraires de ce corps.*

Soient, en effet, la force F et trois points A, B, C (fig. 100) non en

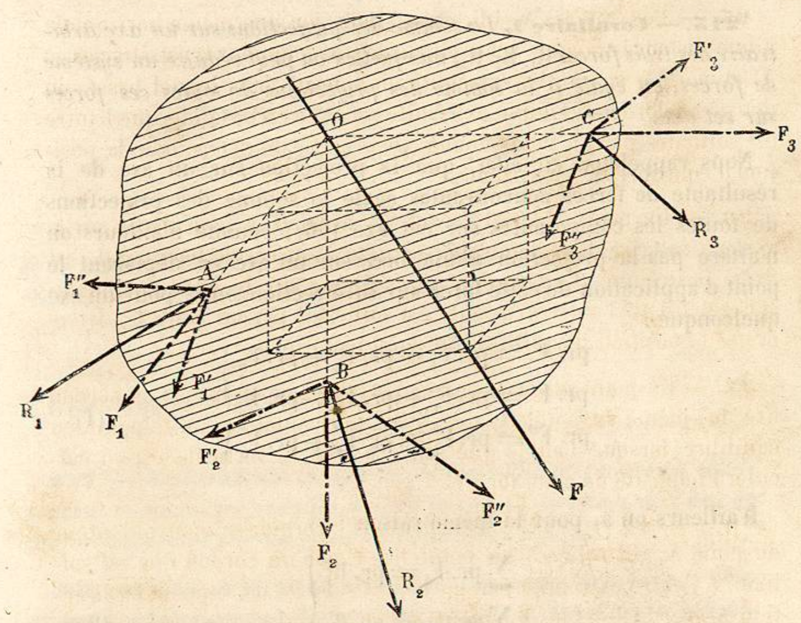

Fig. 100.

ligne droite, mais arbitraires, du corps solide : si la force F n'est