Par exemple, si les molécules égales d'un corps homogène sont attirées vers le centre de gravité de ce corps par des forces proportionnelles à leurs distances à ce centre, toutes ces forces se feront équilibre.

31. — La somme des carrés des distances mutuelles des n points $A_1A_2 \dots A_n$ d'un système est égale au produit par n de la somme des carrés des distances de ces points au centre O de leurs moyennes distances.

32. — Trouver les positions d'équilibre d'un point matériel M, assujetti à rester sur une sphère donnée O, et sollicité par des forces émanant de deux points donnés A et B, et proportionnelles aux distances MA, MB.

33. — Trouver la position d'équilibre d'un point matériel attiré par les sommets d'un triangle donné, les forces attractives ayant des intensités données.

34. — Étant donné une ellipse, ou une parabole, en grandeur et position, construire les positions d'équilibre d'un point matériel pesant assujetti à rester sur la courbe.

35. — Deux points A et B, étant situés sur une même horizontale à une distance AB égale à $2a$, un cordon de longueur a est attaché en A, et porte à son autre extrémité un anneau dans lequel passe un deuxième cordon dont une extrémité est fixée en B, tandis que l'autre est sollicitée par un poids donné. On propose de déterminer la position d'équilibre de ce système.

36. — Un point matériel pesant 2P, assujetti à se déplacer sur la surface interne d'un hémisphère limité à un cercle horizontal, est fixé à l'extrémité d'un cordon qui s'appuie sur le bord de l'hémisphère et dont l'autre extrémité est sollicitée par un poids P; déterminer la position d'équilibre du point matériel.

37. — Un point matériel pesant A est fixé à l'extrémité d'un cordon fixé lui-même au point O; une force horizontale tient le point en équilibre lorsque l'angle que fait OA avec la verticale est α : calculer l'intensité de cette force.

38. — Une barre rigide AB de poids 2P, libre de se mouvoir autour du point A, est reliée à un point fixe C par un cordon qui est sollicité à l'autre extrémité par un poids égal à P; on suppose la direction AC verticale et les longueurs AB et AC égales entre elles : déterminer la position d'équilibre.

LIVRE II

ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE MACHINES SIMPLES

CHAPITRE PREMIER

RÉDUCTION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE

214. — Théorème I. *Les forces qui sollicitent un corps solide peuvent toujours être réduites à trois forces dont les directions passent par trois points arbitraires de ce corps.*

Soient, en effet, la force F et trois points A, B, C (fig. 100) non en

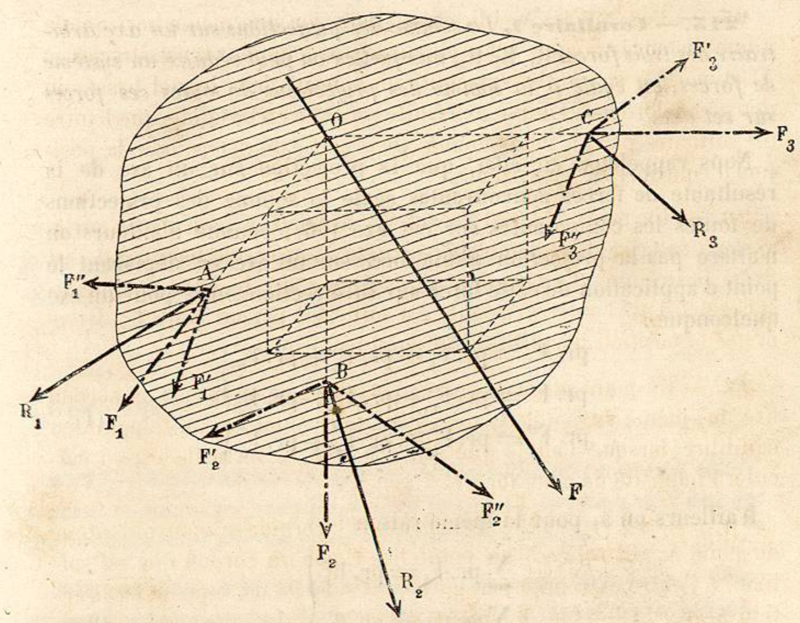

Fig. 100.

ligne droite, mais arbitraires, du corps solide : si la force F n'est pas dans le plan de ces trois points, nous pourrons toujours prendre un point O sur la direction de cette force, de sorte que les droites OA, OB, OC forment un trièdre, et nous savons (58) que l'on pourra toujours décomposer la force F suivant les trois directions ainsi déterminées. Dans le cas où la force F serait dans le plan ABC, nous avons vu (58) que la décomposition était possible d'une infinité de manières.

Donc nous pourrons remplacer toute force F par trois forces dont les directions passeront par les points arbitraires A, B, C ; on peut donc supposer les composantes appliquées en ces points : soit F_1, F_2, F_3 ces composantes : une seconde force F' donnera de même les composantes F'_1, F'_2, F'_3 appliquées respectivement aux points A, B, C, et ainsi de suite.

Or, les forces F_1, F'_1, F''_1, ... agissant sur le point A, admettent une résultante R_1 ; de même, les forces F_2, F'_2, F''_2, ..., admettent une résultante R_2 et les forces F_3, F'_3, F''_3, ..., qui sollicitent le point C, peuvent être remplacées par une force unique R_3.

Le système des forces qui sollicitent le corps peut donc être réduit à trois forces dont les directions passent respectivement par les points arbitraires A, B, C.

*215. — **Corollaire I.** *La somme des projections sur un axe arbitraire des trois forces* R_1, R_2, R_3, *auxquelles on peut réduire un système de forces, est égale à la somme des projections de toutes ces forces sur cet axe.*

Nous rappelons, en effet, que la projection sur un axe de la résultante de forces concourantes égale la somme des projections de toutes les composantes sur cet axe (66) ; comme d'ailleurs on n'altère pas la projection d'une force sur un axe en déplaçant le point d'application de cette force sur sa direction, on a, pour un axe quelconque :

$$\left.\begin{array}{l} \text{pr. } F = \text{pr. } F_1 + \text{pr. } F_2 + \text{pr. } F_3 \\ \text{pr. } F' = \text{pr. } F'_1 + \text{pr. } F'_2 + \text{pr. } F'_3 \\ \text{pr. } F'' = \text{pr. } F''_1 + \text{pr. } F''_2 + \text{pr. } F''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

D'ailleurs on a, pour la même raison :

$$\left.\begin{array}{l} \sum \text{pr. } F_1 = \text{pr. } R_1 \\ \sum \text{pr. } F_2 = \text{pr. } R_2 \\ \sum \text{pr. } F_3 = \text{pr. } R_3 \end{array}\right\} \quad (2)$$

En ajoutant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient, après réductions évidentes :

$$\sum \text{pr. } F = \text{pr. } R_1 + \text{pr. } R_2 + \text{pr. } R_3.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

*216. — **Corollaire II.** *La somme des moments par rapport à un axe arbitraire des forces* R_1, R_2, R_3, *auxquelles on peut réduire un système de forces, est égale à la somme des moments de toutes ces forces par rapport à cet axe.*

Nous savons, en effet, que le moment par rapport à un axe de la résultante de forces concourantes égale la somme des moments des composantes par rapport à cet axe (128) ; comme d'ailleurs on n'altère pas le moment d'une force par rapport à un axe en déplaçant le point d'application de cette force sur sa direction, on a, pour un axe quelconque :

$$\begin{array}{l} m^t F = m^t F_1 + m^t F_2 + m^t F_3 \\ m^t F' = m^t F'_1 + m^t F'_2 + m^t F'_3 \\ m^t F'' = m^t F''_1 + m^t F''_2 + m^t F''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sum m^t F_1 = m^t R_1 \\ \sum m^t F_2 = m^t R_2 \\ \sum m^t F_3 = m^t R_3 \end{array}$$

et en ajoutant membre à membre ces équations, on obtient, après réductions évidentes :

$$\sum m^t F = m^t R_1 + m^t R_2 + m^t R_3.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

217. — **THÉORÈME II.** *Les forces qui sollicitent un corps solide peuvent toujours être réduites à deux forces, la direction de l'une de ces forces passant par un point arbitraire de ce corps.*

Soit, en effet, A le point arbitraire du corps (fig. 101) : nous prenons arbitrairement deux autres points B, C, et nous savons, théorème I, que le système des forces qui sollicitent le corps solide peut être remplacé par trois forces R_1, R_2, R_3 appliquées aux points A, B, C.

Les plans déterminés par le point A et chacune des forces R_2 et R_3 ayant un point commun ont au moins une droite commune : soit XY.

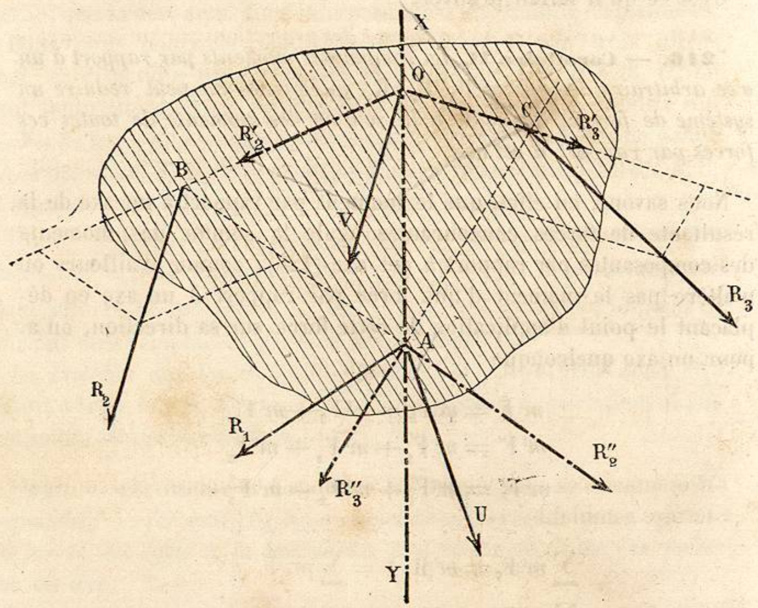

Fig. 101.

Prenons un point O arbitraire de XY appartenant au corps, nous pourrons décomposer la force R_2 en deux forces dirigées suivant OB et BA, car le plan de ces droites contient R_2; de même nous décomposerons R_3 en deux forces dirigées suivant OC et CA. Enfin nous transportons en O les composantes suivantes OB et OC : soit R'_2 et R'_3; puis nous portons en A les points d'application des forces dirigées suivant CA et BA; soit R''_2 et R''_3.

Les forces R_1, R''_2 et R''_3 étant concourantes en A, admettent une résultante, soit U; de même les forces R'_2 et R'_3 peuvent être remplacées par une force unique : soit V.

Le système proposé peut donc être remplacé par les forces U et V, dont l'une, la force U, passe par le point A absolument arbitraire. C'est ce qu'il fallait prouver.

218. — Remarque. Il est évident que la réduction à deux forces est indéterminée; elle peut se faire d'une infinité de manières. D'abord le point A (fig. 101) est arbitraire : en le supposant donné, les points B et C sont encore arbitraires : en supposant ces points déterminés, le point O pris sur XY est indéterminé.

***219. — Corollaire I.** *La somme des projections sur un axe arbitraire des forces U et V, auxquelles on peut réduire un système de forces, est égale à la somme des projections de toutes ces forces sur cet axe.*

Nous avons, en effet (fig. 101), d'après le principe (66) déjà rappelé :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{pr. U} = \text{pr. } R_1 + \text{pr. } R''_2 + \text{pr. } R''_3 \\ \text{pr. V} = \text{pr. } R'_2 + \text{pr. } R'_3 \\ \text{pr. } R'_2 + \text{pr. } R''_2 = \text{pr. } R_2 \\ \text{pr. } R'_3 + \text{pr. } R''_3 = \text{pr. } R_3 \\ \text{pr. } R_1 + \text{pr. } R_2 + \text{pr. } R_3 = \sum \text{pr. F.} \end{array}\right.$$

En ajoutant ces cinq équations membre à membre, et réduisant les termes semblables :

$$\text{pr. U} + \text{pr. V} = \sum \text{pr. F.}$$

***220. — Corollaire II.** *La somme des moments par rapport à un axe arbitraire des forces U et V auxquelles on peut réduire un système de forces, est égale à la somme des moments de ces forces par rapport à cet axe.*

Car on a, en vertu du principe (128), par rapport à un axe quelconque :

$$\left\{\begin{array}{l} m^t\,\text{U} = m^t\,R_1 + m^t\,R''_2 + m^t\,R''_3 \\ m^t\,\text{V} = m^t\,R'_2 + m^t\,R'_3 \\ m^t\,R'_2 + m^t\,R''_2 = m^t\,R_2 \\ m^t\,R'_3 + m^t\,R''_3 = m^t\,R_3 \\ m^t\,R_1 + m^t\,R_2 + m^t\,R_3 = \sum m^t\,\text{F} \end{array}\right.$$

d'où, en ajoutant membre à membre, et réduisant les termes semblables :

$$m^t\,\mathrm{U} + m^t\,\mathrm{V} = \sum m^t\,\mathrm{F}.$$

Ce qu'il fallait prouver.

*PROPRIÉTÉS DE LA RÉDUCTION A DEUX FORCES

***221. — Propriété I.** *En désignant par* AB *et* CD *les droites qui représentent en grandeur et en direction deux forces* U, V *auxquelles on peut réduire un système de forces, le tétraèdre qui a pour sommets les quatre points* A, B, C, D, *a un volume constant pour le même système de forces.*

Nous savons, en effet (128), que le moment de la force AB, par exemple, par rapport à la droite qui passe par deux points M, N est égal à :

$$\frac{6\,\mathrm{MN,AB}}{\mathrm{MN}},$$

en représentant par MN, AB une quantité algébrique qui a pour valeur absolue le volume du tétraèdre ayant pour arêtes opposées MN et AB, et qui est positive ou négative suivant que le moment de AB est positif ou négatif; la somme des moments par rapport à MN des forces AB et CD sera donc :

$$\frac{6}{\mathrm{MN}} \times (\mathrm{MN,\ AB} + \mathrm{MN,\ CD}).$$

Par suite, en représentant par A'B' et C'D' deux autres forces U'V' auxquelles le même système peut être réduit, nous aurons, d'après le corollaire II (215) :

$$\mathrm{MN,\ AB} + \mathrm{MN,\ CD} = \mathrm{MN,\ A'B'} + \mathrm{MN,\ C'D'}.$$

Appliquons cette relation en faisant coïncider M et N d'abord avec A et B, puis avec C, D, puis avec A', B' et enfin avec C', D'; nous aurons les quatre égalités :

$$\mathrm{AB,\ CD} = \underline{\mathrm{AB,\ A'B'}} + \underline{\underline{\mathrm{AB,\ C'D'}}},$$

$$\mathrm{CD,\ AB} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{CD,\ A'B'}}}}} + \underline{\underline{\underline{\mathrm{CD,\ C'D'}}}},$$

$$\underline{\mathrm{A'B',\ AB}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\mathrm{A'B',\ CD}}}}} = \mathrm{A'B',\ C'D'},$$

$$\underline{\underline{\mathrm{C'D',\ AB}}} + \underline{\underline{\underline{\mathrm{C'D',\ CD}}}} = \mathrm{C'D',\ A'B'}.$$

En ajoutant membre à membre, et remarquant que l'on a :

$$\mathrm{AB,A'B'} = \mathrm{A'B',AB}, \qquad \mathrm{AB,\ C'D'} = \mathrm{C'D',AB},$$
$$\mathrm{A'B',CD} = \mathrm{CD,A'B'}, \qquad \mathrm{C'D',CD} = \mathrm{CD,\ C'D'},$$

il reste :

$$\mathrm{AB,\ CD} = \mathrm{A'B',\ C'D'}.$$

Ce qu'il fallait prouver.

***222. — Propriété II.** *En désignant par* U *et* V *deux forces auxquelles un système* P *peut être réduit, et par* U' *et* V' *deux autres forces pouvant également remplacer ce système, si deux des quatre forces* U, V, U' V' *sont concourantes ou parallèles, les deux autres sont aussi concourantes ou parallèles, et le point de concours de ces deux forces est dans le plan des deux autres.*

1° — Supposons les deux forces U et V concourantes : ces forces admettent donc une résultante R qui peut remplacer le système P; donc les deux forces U' et V' admettent aussi la résultante R et sont par suite dans un même plan; par suite les forces U' et V' sont concourantes ou parallèles; dans le premier cas, le point de concours étant sur R est dans le plan des forces U et V; dans le deuxième cas, U' et V' sont parallèles à R; le point de concours des forces U, V est donc dans le plan des forces U', V'.

2° — Supposons les forces U et U' concourantes : en appliquant aux corps des forces égales et directement opposées à U et V, que nous désignons par —U et —V, il y aura équilibre : c'est-à-dire que les quatre forces —U, —V, U', V' sont en équilibre ; or les forces —U et U' sont concourantes, puisque U rencontre U'; donc elles admettent une résultante, soit R; les forces R, —V et V' sont donc en équilibre, c'est-à-dire que —V et V' admettent une résultante égale et directement opposée à R. Nous en concluons que —V et V' sont dans un même plan qui, contenant R, contient le point commun à U et U'.

***223. — Propriété III.** *Si dans la réduction d'un système à deux forces* U *et* V, *on impose à la force* U *la condition de passer par un point donné* O, *la force* V *n'est pas déterminée, mais toutes les forces telles que* V *sont alors situées dans un même plan qui contient le point* O, *et réciproquement.*

1° — Soient, en effet, U, V et U' V', deux réductions du même système, les forces U, U' étant assujetties à passer par le point O (fig. 102); nous savons d'après la propriété II que les forces V et V′ sont dans un même plan qui contient le point O.

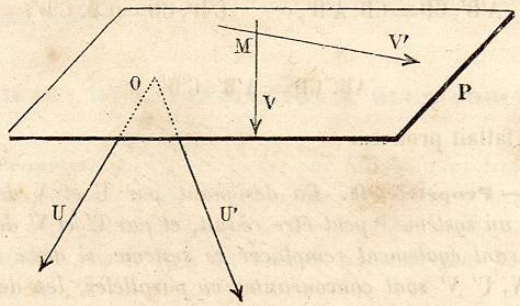

Fig. 102.

D'ailleurs ce plan est déterminé, car il contient le point O et la force V.

2° — *Réciproquement, si nous imposons à la force* V *l'obligation de se trouver dans un plan donné* P, *la force* U *ne sera pas déterminée, mais toutes les forces telles que* U *passeront par un même point* O *qui appartient au plan* P.

Soit U, V et U′, V′, deux réductions du même système; les forces V et V′ étant situées dans un plan donné P (fig. 102). Les forces V et V′ étant dans un même plan, il en est de même des forces U et U′: Supposons-les concourantes en O; ce point sera situé dans le plan P (propriété II). Ce point est donc déterminé comme intersection du plan P donné avec la force U.

Si les forces U et U′ étaient parallèles entre elles, elles seraient parallèles au plan P, et toutes les forces telles que U seraient parallèles entre elles.

224. — THÉORÈME III. *Les forces qui sollicitent un corps solide libre peuvent toujours être réduites à une force passant par un point donné et à un couple.*

Nous savons, en effet, que l'on peut réduire toutes les forces à deux, U et V, dont l'une passe par un point arbitraire A (fig. 103). Appliquons au point A deux forces V′ et V″ égales et parallèles à V, mais de sens opposés entre elles. Il est clair que les forces U et V″ admettent une résultante R, et que les forces V et V′ forment un couple. C'est la réduction énoncée.

***220. — Corollaire I.** *Dans la réduction d'un système à une force et un couple, la projection de la force unique sur un axe arbitraire est égale à la somme des projections sur cet axe de toutes les forces du système.*

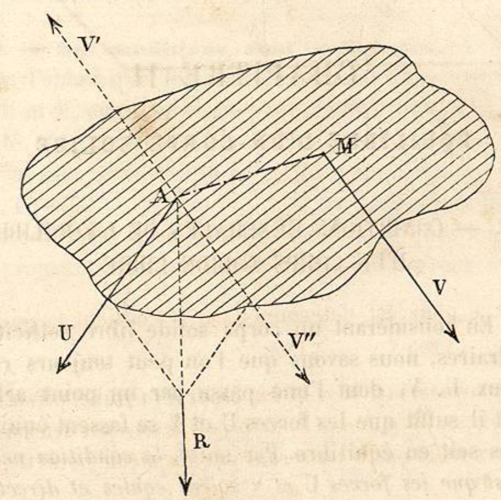

Fig. 103.

Nous savons, en effet, que les projections de V et V″ étant égales, on a:

$$\text{pr. R} = \text{pr. U} + \text{pr. V},$$

d'ailleurs (214):

$$\text{pr. U} + \text{pr. V} = \sum \text{pr. F},$$

donc:

$$\text{pr. R} = \sum \text{pr. F}.$$

***225. — Corollaire II.** *Dans la réduction d'un système à une force et un couple, la force unique est constante en intensité et en direction.*

Car il n'y a qu'une seule force qui, passant par un point donné, ait des projections données sur trois axes rectangulaires; et la force unique a des projections déterminées sur trois axes quelconques, d'après le corollaire I (220).

Cette force unique passant par le point donné A est précisément la résultante du système qu'on obtiendrait en transportant en A, parallèlement à elles-mêmes, toutes les forces du système primitif.

*CHAPITRE II

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE

§ I. — CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE LIBRE

226. — En considérant un corps solide libre sollicité par des forces arbitraires, nous savons que l'on peut toujours réduire ces forces à deux U, V, dont l'une passe par un point arbitraire. Il faut donc et il suffit que les forces U et V se fassent équilibre pour que le corps soit en équilibre. Par suite, *la condition nécessaire et suffisante est que les forces* U *et* V *soient égales et directement opposées.*

Pour exprimer analytiquement cette condition, on emploie généralement trois axes rectangulaires; on peut alors énoncer le théorème suivant :

227. — THÉORÈME IV. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un corps solide libre soit en équilibre sous l'action d'un système de forces, sont :*

1° *Que la somme des projections des forces sur trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun d'eux ;*

2° *Que la somme des moments des forces par rapport à trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun de ces axes.*

228. — Les conditions sont nécessaires. En effet, toutes les forces peuvent être réduites à deux forces U et V, qui sont en équilibre et, par suite, égales et directement opposées. Donc, la somme des projections des forces U et V sur un axe quelconque est nulle, et il en est par suite de même de toutes les forces du système, puisque l'on a (219) :

$$\text{pr. U} + \text{pr. V} = \sum \text{pr. F}.$$

De même, les moments des forces U et V par rapport à un axe quelconque sont égaux et de signes contraires; leur somme est donc nulle, et aussi la somme des moments de toutes les forces du système (220) :

Donc les conditions sont nécessaires.

229. — Les conditions sont suffisantes. 1° — Nous allons prouver d'abord que les premières conditions expriment que les forces U et V, auxquelles on peut réduire le système, sont d'égale intensité, ont même direction mais des sens opposés, en un mot que ces forces sont en équilibre ou forment un couple.

Soit, en effet, λ, μ, ν et λ', μ', ν' les angles que font les forces U et V avec les axes rectangulaires dont il est question dans l'énoncé.

Les projections de ces forces sur les axes seront :

$$\begin{array}{lll} U\cos\lambda, & U\cos\mu, & U\cos\nu, \\ V\cos\lambda', & V\cos\mu', & V\cos\nu'. \end{array}$$

On a donc d'après (219) :

$$\left.\begin{array}{l} U\cos\lambda = -V\cos\lambda' \\ U\cos\mu = -V\cos\mu' \\ U\cos\nu = -V\cos\nu' \end{array}\right\} \quad (1)$$

En élevant au carré les deux membres des équations (1) et ajoutant membre à membre, on obtient (73) :

$$U^2 = V^2,$$

et comme U et V sont des valeurs absolues, les forces sont d'égale intensité. En remplaçant dans (1), il vient :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\lambda = -\cos\lambda' \\ \cos\mu = -\cos\mu' \\ \cos\nu = -\cos\nu' \end{array}\right\} \quad (2)$$

Donc (72) ces forces ayant des cosinus directeurs égaux et de signes contraires sont parallèles et de sens contraires.

230. — 2° — En second lieu, nous allons montrer que les secondes conditions énoncées expriment que les forces U et V ont un point commun, d'où il faudra conclure qu'elles ne forment pas un couple, qu'elles sont en équilibre, et qu'il en est de même du système de forces considéré.

En effet, pouvant faire passer la force U par un point arbitrairement choisi, nous en profitons pour la faire passer par le point O, commun aux trois axes dont parle l'énoncé ; son moment sera donc nul pour chacun de ces axes (127). Par suite, il en sera de même des moments de V, puisque l'on a :

$$m^t U + m^t V = \sum m^t F.$$

Nous en concluons que la force V passe par le point O, puisqu'il faut qu'elle soit dans un même plan avec chacun des axes (127).

Remarque. — Nous avons supposé dans le théorème précédent que les axes sont les trois arêtes d'un trièdre trirectangle, mais cette condition, commode pour les calculs, n'est pas nécessaire : il suffit que ces axes forment un trièdre.

231. — EXPRESSION ANALYTIQUE DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE.

Comme il a déjà été dit, une force est complètement déterminée par son intensité F, par les angles α, β, γ, qu'elle fait avec trois axes rectangulaires (fig. 104), et par les coordonnées x, y, z d'un point de sa direction.

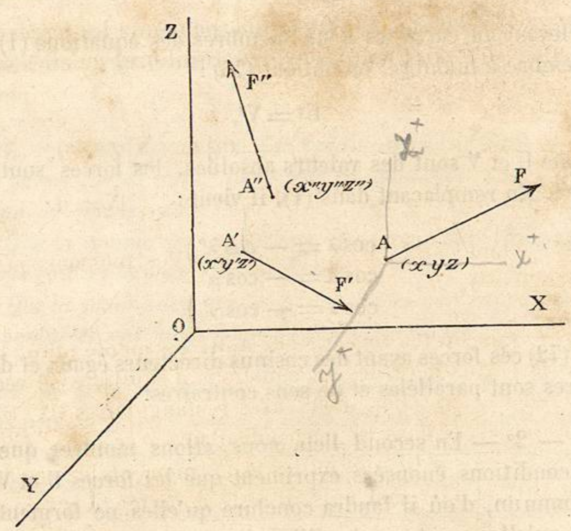

Fig. 104.

Par suite, les premières conditions, par lesquelles la somme

des projections des forces sur trois axes rectangulaires est nulle pour chacun de ces axes, conduisent aux trois équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} F\cos\alpha + F'\cos\alpha' + F''\cos\alpha'' + \ldots = 0 \\ F\cos\beta + F'\cos\beta' + F''\cos\beta'' + \ldots = 0 \\ F\cos\gamma + F'\cos\gamma' + F''\cos\gamma'' + \ldots = 0. \end{cases}$$

Nous venons de voir (229) que ces équations expriment que le système des forces considérées se réduit à deux forces U et V égales, parallèles, mais de sens contraires.

De même, les secondes conditions, par lesquelles la somme des moments des forces par rapport aux trois axes rectangulaires est nulle pour chacun de ces axes, conduisent aux trois équations :

$$(2) \qquad \begin{cases} (Zy - Yz) + (Z'y' - Y'z') + (Z''y'' - Y''z'') + \ldots = 0 \\ (Xz - Zx) + (X'z' - Z'x') + (X''z'' - Z''x'') + \ldots = 0 \\ (Yx - Xy) + (Y'x' - X'y') + (Y''x'' - X''y'') + \ldots = 0, \end{cases}$$

en représentant, pour abréger, par X, Y, Z les projections de la force F sur les trois axes.

Ces trois équations expriment (230) que les deux forces U et V auxquelles on peut toujours réduire le système des forces données, passent par un même point.

Donc, en résumé, il faut et il suffit, pour que les forces qui sollicitent un corps solide libre soient en équilibre, qu'elles satisfassent aux six équations :

$$\sum X = 0, \qquad \sum Y = 0, \qquad \sum Z = 0,$$

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

en représentant par L, M, N les sommes des moments par rapport aux axes OX, OY, OZ.

232. — Cas où les forces sont dans un même plan. Dans cette hypothèse particulière, les six équations d'équilibre se réduisent à trois. Prenons, en effet, deux axes rectangulaires OX, OY dans le plan des forces, et l'axe OZ perpendiculaire à ce plan. Les projections des forces sur OZ sont nulles et les moments de ces forces par rapport à OX et à OY sont nuls. Il reste donc les trois équations :

$$\sum X = 0, \qquad \sum Y = 0,$$

$$N = 0.$$

Autrement dit, *il faut et il suffit pour l'équilibre d'un système de forces situées dans un même plan, que la somme des projections des forces sur deux axes rectangulaires de ce plan soit nulle pour chacun de ces axes et que la somme des moments de ces forces par rapport à un point du plan soit nulle.*

D'ailleurs les deux axes peuvent faire entre eux un angle quelconque, il suffit qu'il ne soient pas parallèles.

233. — Cas où les forces sont parallèles. Prenons alors OZ parallèle à la direction commune des forces, et les deux axes OX, OY perpendiculaires à OZ et perpendiculaires entre eux. Il est évident que les projections des forces sur OX et OY sont nulles, et que les moments par rapport à OZ sont nuls. Il reste donc trois équations, qui sont :

$$\sum Z = 0,$$
$$L = 0, \qquad M = 0.$$

Or, les forces étant parallèles à OZ, les moments par rapport à OX sont les moments par rapport au plan ZOX, et de même les moments par rapport à OY sont les moments par rapport au plan ZOY. Il en résulte l'énoncé suivant :

Pour qu'un système de forces parallèles soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des forces soit nulle, et que la somme des moments des forces par rapport à deux plans qui se coupent, parallèles à leur direction commune, soit nulle pour chacun de ces plans.

*CHAPITRE III

CONDITION POUR QU'UN SYSTÈME DE FORCES ADMETTE UNE RÉSULTANTE

234. — Condition pour qu'un système de forces admette une résultante.

Le théorème II nous conduit visiblement à la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une résultante : c'est que les forces U et V soient dans un même plan et n'y forment pas un couple. Cette condition se transforme d'ailleurs comme il suit :

235. — THÉORÈME V. *Pour qu'un système de forces sollicitant un corps solide libre admette une résultante, il faut et il suffit qu'elles satisfassent à la relation :*

$$LX + MY + NZ = 0,$$

en désignant par X, Y, Z *les sommes des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires, et par* L, M, N *les sommes des moments de ces forces par rapport aux mêmes axes.*

Cherchons, en effet, à quelle condition une force R, faisant avec les axes rectangulaires les angles λ, μ, ν, et passant par un point dont les coordonnées sont $x_1 y_1 z_1$ sera résultante des forces considérées.

Il faut et il suffit que la force égale et directement opposée à R tienne le système en équilibre. Exprimons donc qu'il y a équilibre entre les forces proposées et la force d'intensité R, passant par le points $x_1 y_1 z_1$ et faisant avec les axes les angles :

$$180 - \lambda, \qquad 180 - \mu, \qquad 180 - \nu.$$

Nous représentons, pour abréger, par X_1, Y_1, Z_1 les projections