Autrement dit, *il faut et il suffit pour l'équilibre d'un système de forces situées dans un même plan, que la somme des projections des forces sur deux axes rectangulaires de ce plan soit nulle pour chacun de ces axes et que la somme des moments de ces forces par rapport à un point du plan soit nulle.*

D'ailleurs les deux axes peuvent faire entre eux un angle quelconque, il suffit qu'il ne soient pas parallèles.

**233. — Cas où les forces sont parallèles.** Prenons alors OZ parallèle à la direction commune des forces, et les deux axes OX, OY perpendiculaires à OZ et perpendiculaires entre eux. Il est évident que les projections des forces sur OX et OY sont nulles, et que les moments par rapport à OZ sont nuls. Il reste donc trois équations, qui sont :

$$\sum Z = 0,$$
$$L = 0, \qquad M = 0.$$

Or, les forces étant parallèles à OZ, les moments par rapport à OX sont les moments par rapport au plan ZOX, et de même les moments par rapport à OY sont les moments par rapport au plan ZOY. Il en résulte l'énoncé suivant :

*Pour qu'un système de forces parallèles soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des forces soit nulle, et que la somme des moments des forces par rapport à deux plans qui se coupent, parallèles à leur direction commune, soit nulle pour chacun de ces plans.*

# *CHAPITRE III

## CONDITION POUR QU'UN SYSTÈME DE FORCES ADMETTE UNE RÉSULTANTE

**234. — Condition pour qu'un système de forces admette une résultante.**

Le théorème II nous conduit visiblement à la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une résultante : c'est que les forces U et V soient dans un même plan et n'y forment pas un couple. Cette condition se transforme d'ailleurs comme il suit :

**235. — THÉORÈME V.** *Pour qu'un système de forces sollicitant un corps solide libre admette une résultante, il faut et il suffit qu'elles satisfassent à la relation :*

$$LX + MY + NZ = 0,$$

*en désignant par* X, Y, Z *les sommes des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires, et par* L, M, N *les sommes des moments de ces forces par rapport aux mêmes axes.*

Cherchons, en effet, à quelle condition une force R, faisant avec les axes rectangulaires les angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$, et passant par un point dont les coordonnées sont $x_1 y_1 z_1$ sera résultante des forces considérées.

Il faut et il suffit que la force égale et directement opposée à R tienne le système en équilibre. Exprimons donc qu'il y a équilibre entre les forces proposées et la force d'intensité R, passant par le points $x_1 y_1 z_1$ et faisant avec les axes les angles :

$$180 - \lambda, \qquad 180 - \mu, \qquad 180 - \nu.$$

Nous représentons, pour abréger, par $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ les projections de la résultante sur les axes. Les équations d'équilibre donnent alors :

$$(1)\quad \begin{cases} X - X_1 = 0 \\ Y - Y_1 = 0 \\ Z - Z_1 = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} L - (Z_1y_1 - Y_1z_1) = 0 \\ M - (X_1z_1 - Z_1x_1) = 0 \\ N - (Y_1x_1 - X_1y_1) = 0. \end{cases}$$

Or, nous pouvons toujours satisfaire aux équations (1). Elles déterminent l'intensité de R, et les angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$, comme il a été dit (79).

Mais il n'en est plus de même des équations (2). Multiplions, en effet, la première de ces équations par $X_1$, la deuxième par $Y_1$, et la troisième par $Z_1$ ; nous obtenons, en ajoutant membre à membre :

$$LX_1 + MY_1 + NZ_1 = 0 ;$$

les autres termes disparaissant par réduction ; on a donc à cause de (1) :

$$(3)\quad LX + MY + NZ = 0.$$

Or, il est évident que s'il existe des valeurs des inconnues $x_1y_1z_1$ qui vérifient le système (2), ces valeurs devront aussi satisfaire à l'équation (3), et comme cette équation est indépendante de ces inconnues, il faut qu'elle soit vérifiée par les données de la question pour que le problème soit possible.

Réciproquement, l'équation (3) étant satisfaite *a priori*, les équations (1) se réduisent à deux équations distinctes, et ne permettent de déterminer que deux des quantités $x_1y_1z_1$ en fonction de la troisième. Ceci correspond bien à ce que nous savons sur l'indétermination du point d'application d'une force, qui est un point quelconque de sa direction.

Remarque. — On démontre que la condition trouvée ci-dessus exprime que le le couple obtenu dans la réduction qui fait l'objet du Théorème III n'existe pas ou a un moment nul.

**236. — Éléments de la résultante.** En supposant la condition précédente remplie, il est facile de calculer les éléments de la résultante.



Des équations (1) on tire :

$$R\cos\lambda = X,\quad R\cos\mu = Y,\quad R\cos\nu = Z,$$

d'où :

$$\begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ \cos\lambda = \dfrac{R}{X}, \\ \cos\mu = \dfrac{Y}{R}, \\ \cos\nu = \dfrac{Z}{R}. \end{cases}$$

Enfin, deux des équations (2) peuvent s'écrire :

$$Zy_1 - Yz_1 = L,$$
$$Xz_1 - Zx_1 = M.$$

En se donnant arbitrairement une valeur pour $z_1$, ces équations feront connaître $x_1$ et $y_1$ et la question sera complètement résolue.

# *CHAPITRE IV

## ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE QUI N'EST PAS LIBRE

**237. — CAS OU LE CORPS SOLIDE A UN POINT FIXE.**
*Il faut et il suffit, pour l'équilibre d'un corps solide qui a un point fixe, que la somme des moments des forces qui le sollicitent, par rapport à trois axes passant par le point fixe, soit nulle pour chacun de ces axes.*

1° — *La condition est nécessaire.* — Réduisons, en effet, les forces qui sollicitent le corps à deux, U et V, dont l'une, U, passe par le point fixe O : d'après l'axiome II, l'équilibre exige que la force V passe aussi par le point O; par suite, les moments des forces U et V sont nuls pour tout axe qui passe par le point O; donc il en est de même pour la somme des moments de toutes les forces qui sollicitent le corps solide.

2° — *La condition est suffisante.* — Car, après avoir réduit toutes les forces à deux, dont l'une, U, passe par le point O, le moment de cette force étant nul par rapport à tout axe qui passe par O, la somme des moments des forces du système égale le moment de V; donc V a un moment nul par rapport à chacun des axes ; cette force se trouve donc à la fois dans un même plan avec chacun des axes considérés, c'est-à-dire que sa direction passe par le point O : donc il y a équilibre, et la condition est suffisante.

**238. — Pression sur le point fixe.** La condition d'équilibre précédente revient à dire que les forces qui sollicitent le corps ont une résultante qui passe par le point fixe O. La *pression* exercée par le corps sur le point O est précisément cette résultante, qui est égale et contraire à la *réaction* du point O, c'est-à-dire à la force qu'il faudrait appliquer au corps solide pour remplacer la fixité de ce point O.

En représentant par R cette pression, et par $\lambda$, $\mu$, $\nu$, les angles



qu'elle fait avec les axes supposés rectangulaires, nous obtiendrons l'équilibre des forces proposées, en appliquant au point O une force égale et contraire à R; par suite nous avons les trois équations :

$$X - R\cos\lambda = 0,$$
$$Y - R\cos\mu = 0,$$
$$Z - R\cos\nu = 0,$$

d'où nous tirons successivement :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

et :

$$\cos\lambda = \frac{X}{R},$$
$$\cos\mu = \frac{Y}{R},$$
$$\cos\nu = \frac{Z}{R}.$$

Ce qui détermine complètement la pression sur le point fixe.

**239. — CAS OU LE CORPS SOLIDE A UN AXE FIXE.**
Cela veut dire que le corps solide ne peut que tourner autour d'une droite :
*Il faut et il suffit, pour l'équilibre d'un corps solide qui a un axe fixe, que la somme des moments des forces qui le sollicitent par rapport à cet axe soit nulle.*

1° — *La condition est nécessaire.* — Réduisons, en effet, les forces qui sollicitent le corps à deux, U et V, dont l'une, U, passe par un point de l'axe fixe : d'après l'axiome II, il faut, pour l'équilibre, que la force V soit dans un même plan avec l'axe, et par suite que son moment par rapport à cet axe soit nul; les forces U et V ayant alors des moments nuls par rapport à l'axe fixe, la somme des moments de toutes les forces du système par rapport à cet axe est aussi nulle.

2° — *La condition est suffisante.* — Car, après avoir réduit les forces à deux U, V, dont l'une rencontre l'axe, le moment de la force V par rapport à cet axe sera égal à la somme des moments des forces du système, et sera par suite nul; donc la force V est dans un même plan avec l'axe fixe, et par suite le corps est en équilibre.

**240. — Remarque I.** Si l'on supposait que le corps puisse seulement glisser le long d'un axe fixe, on aurait l'équilibre en exprimant que *la somme des projections des forces sur cet axe est nulle.*

**241. — Remarque II.** Enfin, si un corps solide peut à la fois tourner autour d'un axe fixe, et glisser le long de cet axe, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que *la somme des projections des forces sur cet axe soit nulle, ainsi que la somme des moments de ces forces par rapport à cet axe.*

**242. — CAS OU LE CORPS SOLIDE S'APPUIE SUR UN PLAN PARFAITEMENT POLI.**

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps solide s'appuyant sur un plan parfaitement poli soit en équilibre, est que les forces qui le sollicitent admettent une résultante, que cette force soit normale au plan et qu'elle le rencontre à l'intérieur du polygone convexe que forment les points d'appui.*

Nous remarquons, en effet, qu'un plan parfaitement poli ne s'oppose au mouvement d'un point placé sur sa surface que dans la direction normale à cette surface; c'est-à-dire que la réaction du plan est en chaque point d'appui une force perpendiculaire à sa surface.

Par suite, nous pouvons remplacer l'action d'un plan sur un corps, assujetti à s'appuyer sur ce plan, par un système de forces normales au plan sollicitant les points d'appui. Or, ces forces de réaction, parallèles et de même sens, admettent une résultante R qui leur est parallèle, par suite normale au plan, et qui passe par un point du plan situé à l'intérieur du polygone convexe que forment les points d'appui.

Donc, si le corps est en équilibre, il faut que les forces qui le sollicitent admettent une résultante égale et contraire à R, c'est-à-dire normale au plan et rencontrant ce plan à l'intérieur du polygone convexe formé par les points d'appui.

D'ailleurs la condition énoncée est évidemment suffisante.

**243. — Remarque.** Pour déterminer les pressions exercées par le corps en équilibre sur le plan, on sera conduit à décomposer la résultante des forces appliquées à ce corps en forces parallèles sollicitant ces points d'appui : cette question a été traitée aux numéros 115 et 116.

**244. — APPLICATION I.** *Quelle force F est capable de maintenir en équilibre une porte dont la ligne des gonds fait un angle θ avec la verticale, le plan de cette porte faisant un angle α avec le plan vertical qui contient la ligne des gonds? On suppose la force F perpendiculaire au plan de cette porte, à une distance a de la ligne des gonds, et le centre de gravité situé à une distance b de cette même ligne.*



Il est commode, pour se représenter la figure, de prendre deux plans de projection : le plan vertical (fig. 105) contient la ligne des

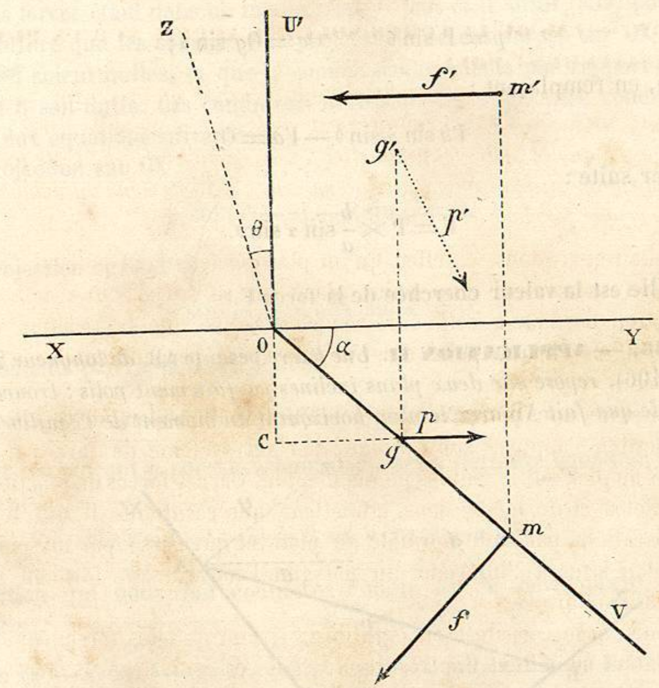


Fig. 105.

gonds OU' et la verticale OZ; le plan horizontal perpendiculaire sur OU' donne la trace OV pour le plan de la porte, de sorte que l'angle α est égal à VOY.

Soit $gg'$ le centre de gravité de la porte et $mm'$ le point d'application de la force F; on a :

$$Og = b \qquad \text{et} \qquad Om = a.$$

Les projections du poids P seront l'une, $p'$, parallèle à OZ et égale à P, l'autre, $p$, parallèle à XY : les projections de la force F sont perpendiculaires aux traces du plan de la porte, et $f = F$.

Le corps solide ayant un axe fixe OZ, et ne pouvant que tourner autour de cet axe, il faut et il suffit pour l'équilibre (239) que la somme des moments des forces F et P par rapport à OZ soit nulle ; cela revient donc à exprimer que la somme des moments des forces $f$ et $p$ par rapport au point O est nulle :

$$p \times Oc - f \times Om = 0;$$

or :

$$p = P \sin\theta \qquad Oc = Og \sin\alpha;$$

d'où, en remplaçant :

$$Pb \sin\alpha \sin\theta - Fa = 0,$$

et par suite :

$$F = P \times \frac{b}{a} \sin\alpha \sin\theta.$$

Telle est la valeur cherchée de la force F.

**245. — APPLICATION II.** *Une barre pesante* AB, *de longueur* $2a$ (fig. 106), *repose sur deux plans inclinés parfaitement polis : trouver l'angle que fait* AB *avec le plan horizontal au moment de l'équilibre.*

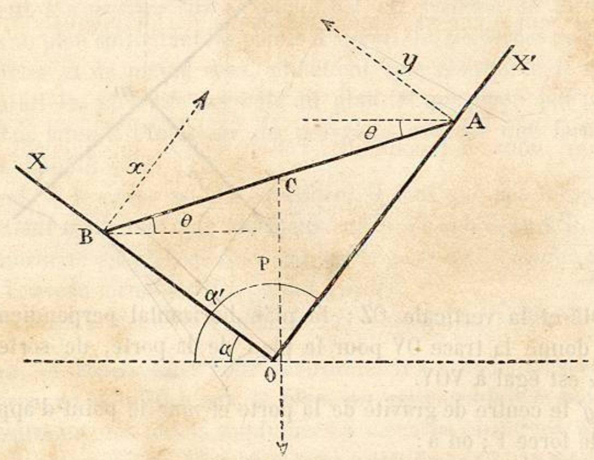


Fig. 106.

Les plans étant supposés parfaitement polis, les réactions aux points A et B sont perpendiculaires à ces plans ; or, la tige AB devant être en équilibre sous l'action de trois forces, il faut d'abord que ces forces soient dans un même plan (ce qui équivaut à trois équations) ; d'ailleurs ce plan est vertical et perpendiculaire à la fois



aux deux plans inclinés, donc il faut que l'intersection de ces plans soit horizontale, et que la barre soit dans un plan perpendiculaire à cette intersection. Prenons ce plan pour plan de la figure, et soit OX, OX' les traces des plans donnés, qui font avec l'horizon les angles $\alpha$ et $\alpha'$.

Les forces étant dans un même plan, il faut et il suffit (232) pour l'équilibre que les sommes des projections de ces forces sur OX et OX' sur ~~OY~~ soient nulles, et que la somme des moments par rapport au point B soit nulle. Ces conditions nécessaires et suffisantes conduisent aux équations suivantes :

Projection sur OX :

$$y \sin(\alpha' - \alpha) - P \sin\alpha = 0.$$

Projection sur OX' :

$$x \sin(\alpha' - \alpha) - P \sin\alpha' = 0.$$

Moments par rapport au point B :

$$Pa \cos\theta + 2ay \cos(\theta + \alpha') = 0.$$

En remplaçant $y$ par sa valeur dans cette dernière équation, on obtient :

$$\cos\theta \sin(\alpha' - \alpha) + 2 \sin\alpha \cos(\theta + \alpha') = 0,$$

équation qui nous fait connaître l'angle $\theta$ ; en développant on obtient :

$$\sin(\alpha' - \alpha) \cos\theta + 2 \sin\alpha \cos\alpha' \cos\theta - 2 \sin\alpha \sin\alpha' \sin\theta = 0 ;$$

d'où :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin(\alpha' + \alpha)}{2 \sin\alpha \sin\alpha'}.$$

C'est l'inconnue qu'il fallait calculer.

**246. — APPLICATION III.** *Une lame pesante ayant la forme d'un triangle rectangle isocèle* ABC (fig. 107) *est située dans un plan vertical, et s'appuie par ses côtés égaux sur deux chevilles fixes* D, E. *Déterminer, dans la position d'équilibre, l'angle* $\theta$ *que fait l'hypoténuse avec le plan horizontal.*

Pour déterminer la position des points D, E, nous menons la verticale DY et l'horizontale EX dans le plan de la figure ; nous désignons OD par $a$ et OE par $b$; enfin, soit $2c$ l'hypoténuse du triangle ABC.

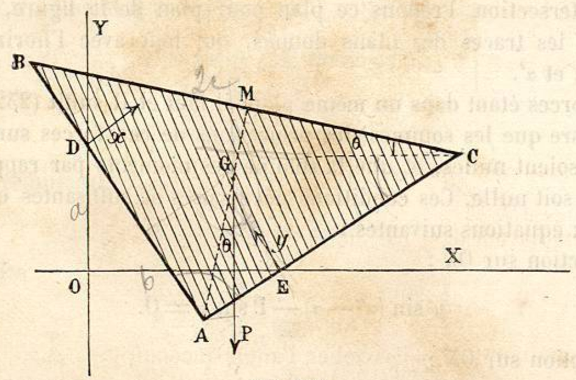


Fig. 107.

Le triangle est sollicité par trois forces : 1° son poids, qui passe par le point G situé aux deux tiers de AM; 2° la réaction $x$ au point D qui est perpendiculaire à AB ; 3° la réaction $y$ au point E qui est perpendiculaire sur AC. Ces forces étant dans le même plan, il faut et il suffit pour l'équilibre (232) que la somme des projections de ces forces sur AB soit nulle, ainsi que la somme des projections sur AC, et que la somme des moments par rapport au point A soit nulle.

La somme des projections sur AC étant nulle, on a :

$$x - \mathrm{P} \sin (45 - \theta) = 0 ; \qquad (1)$$

de même on obtient, en projetant sur AB :

$$y - \mathrm{P} \cos (45 - \theta) = 0. \qquad (2)$$

Enfin, la somme des moments par rapport au point A donne :

$$\mathrm{AD} \times x - \mathrm{AE} \times y + \frac{2c}{3} \mathrm{P} \sin \theta = 0 \qquad (3)$$

Il nous reste à évaluer les longueurs AD, AE, et pour cela nous projetons successivement sur AB et sur AC le contour DOE, ce qui donne les deux relations :

$$\mathrm{AD} = b \sin (45 - \theta) + a \cos (45 - \theta), \qquad (4)$$
$$\mathrm{AE} = b \cos (45 - \theta) - a \sin (45 - \theta) ; \qquad (5)$$

des équations (4) et (5) nous déduisons, en multipliant (4) par $x$, et (5) par $y$ :



$$\mathrm{AD} \times x = \mathrm{P} \left[ b \sin^2 (45 - \theta) + a \sin (45 - \theta) \cos (45 - \theta) \right],$$

$$\mathrm{AE} \times y = \mathrm{P} \left[ b \cos^2 (45 - \theta) - a \sin (45 - \theta) \cos (45 - \theta) \right],$$

d'où :

$$\mathrm{AD} \times x - \mathrm{AE} \times y = - \mathrm{P} \left[ b \cos (90 - 2\theta) + a \sin (90 - 2\theta) \right].$$

En remplaçant dans (3), nous obtenons :

$$\frac{2c}{3} \sin \theta = b \sin 2\theta + a \cos 2\theta, \qquad (6)$$

c'est l'équation que doit vérifier l'angle inconnu $\theta$.

Pour simplifier la résolution, nous supposons que les points D, E sont dans le même plan horizontal : il suffit de faire $a = o$ dans l'équation (6); elle devient :

$$\left( \frac{c}{3} - b \cos \theta \right) \sin \theta = 0.$$

Ce qui donne les deux solutions :

$$\theta' = 0$$
$$\theta'' = \operatorname{arc} \cos \frac{c}{3b}.$$

La première solution correspond au cas où l'hypoténuse du triangle est horizontale.

Pour construire la position du triangle correspondant à la deuxième

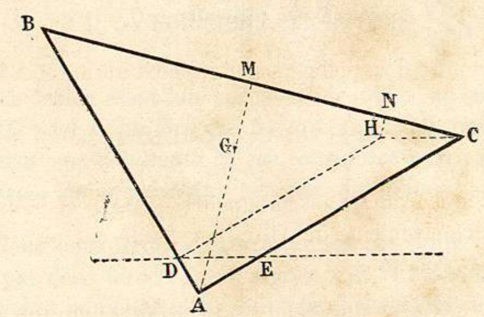


Fig. 108.

solution, nous prenons $\mathrm{CN} = \dfrac{\mathrm{CM}}{3}$ (fig. 108), nous traçons NH perpendiculaire sur BC, et enfin $CH = b$ : il suffit de mener HD parallèle à CA, et DE parallèle à HC.

La condition d'existence de cette seconde solution est :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{c}{3b} < 1.$$

Il faut donc et il suffit que le rapport $\frac{c}{b}$ ne soit ni plus grand que 3, ni inférieur à $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

# CHAPITRE V

## LEVIER — BALANCES

**247.** — On appelle en général MACHINES des appareils destinés à faire équilibre à des forces appelées *résistances* au moyen d'autres forces appelées *puissances*, celles-ci n'étant pas directement opposées aux premières.

A cet effet, les machines sont composées de pièces, ou *organes*, qui réagissent les unes sur les autres et se gênent mutuellement dans leur mouvement.

Une machine est dite *simple* lorsqu'elle se compose d'un seul corps solide : ce corps n'est pas libre, il présente soit un point fixe, soit un axe fixe, ou enfin ne peut que glisser sur un plan fixe : suivant ces cas, la machine s'appelle LEVIER, TREUIL OU PLAN INCLINÉ.

Les organes d'une machine *composée* sont des machines simples.

Nous allons appliquer les principes généraux démontrés à l'étude de l'équilibre des machines simples et de leurs variétés usuelles.

### § I. — ÉQUILIBRE DU LEVIER.

**248.** — Le levier étant un corps solide qui a un point fixe, *il faut et il suffit pour l'équilibre que les forces qui sollicitent cette machine admettent une résultante et que cette force passe par le point fixe : la pression sur le point fixe est cette résultante.*

**249.** — Nous considérons en particulier le cas simple où le levier est sollicité par deux forces, la puissance P et la résistance Q. Alors ces forces devant admettre une résultante, *doivent être dans le même plan* (33); puis cette résultante devant passer par le point fixe O, *il faut que le plan des forces* P, Q *contienne ce point, et que de plus la somme algébrique des moments des forces* P *et* Q *par rapport au*