

diculaire sur BC, et enfin $CH = b$: il suffit de mener HD parallèle à CA, et DE parallèle à HC.

La condition d'existence de cette seconde solution est :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{c}{3b} \leq 1.$$

Il faut donc et il suffit que le rapport $\frac{c}{b}$ ne soit ni plus grand que 3, ni inférieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



CHAPITRE V

LEVIER — BALANCES

247. — On appelle en général *MACHINES* des appareils destinés à faire équilibre à des forces appelées *résistances* au moyen d'autres forces appelées *puissances*, celles-ci n'étant pas directement opposées aux premières.

A cet effet, les machines sont composées de pièces, ou *organes*, qui réagissent les unes sur les autres et se gênent mutuellement dans leur mouvement.

Une machine est dite *simple* lorsqu'elle se compose d'un seul corps solide : ce corps n'est pas libre, il présente soit un point fixe, soit un axe fixe, ou enfin ne peut que glisser sur un plan fixe : suivant ces cas, la machine s'appelle *LEVIER*, *TREUIL* OU *PLAN INCLINÉ*.

Les organes d'une machine *composée* sont des machines simples.

Nous allons appliquer les principes généraux démontrés à l'étude de l'équilibre des machines simples et de leurs variétés usuelles.

§ I. — ÉQUILIBRE DU LEVIER.

248. — Le levier étant un corps solide qui a un point fixe, il faut et il suffit pour l'équilibre que les forces qui sollicitent cette machine admettent une résultante et que cette force passe par le point fixe : la pression sur le point fixe est cette résultante.

249. — Nous considérons en particulier le cas simple où le levier est sollicité par deux forces, la puissance P et la résistance Q. Alors ces forces devant admettre une résultante, doivent être dans le même plan (35); puis cette résultante devant passer par le point fixe O, il faut que le plan des forces P, Q contienne ce point, et que de plus la somme algébrique des moments des forces P et Q par rapport au

point O soit nulle; autrement dit, il faut que ces forces soient en raison inverse de leurs bras de levier, et qu'elles tendent à faire tourner le levier en sens contraire; ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

Ainsi (fig. 109), en abaissant les perpendiculaires OA, OB sur les

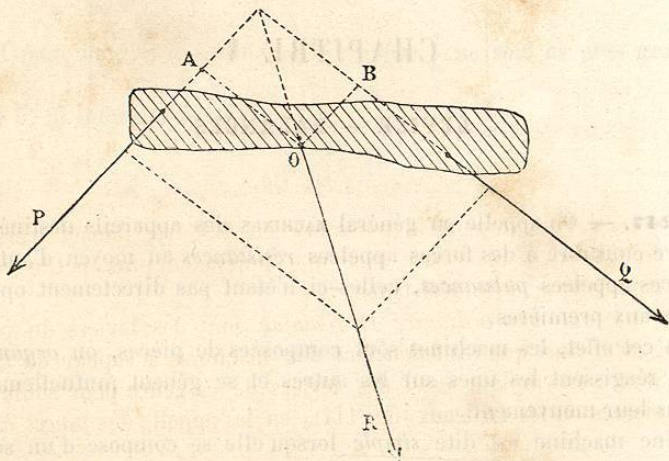


Fig. 109.

forces P et Q qui sollicitent le levier dont O est le point fixe, il faut et il suffit que l'on ait :

$$P \times OA = Q \times OB,$$

si les forces P et Q sont dans un même plan contenant le point O, et si ces forces tendent à faire tourner leurs bras de levier en sens inverse.

250. — Si nous représentons par α l'angle que font entre elles les directions des forces, la résultante R de ces forces aura pour expression :

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha};$$

et cette formule donne aussi la charge du point fixe.

251. — **DIVERS GENRES DE LEVIER.** En réduisant le levier à une barre rigide AB, pouvant tourner autour du point C, et supposant les forces parallèles entre elles, on est conduit à distinguer trois genres de leviers.

1° — On dit qu'un levier est du *premier genre* (fig. 110) lorsque les points d'application de la puissance et de la résistance A, B sont de part et d'autre du point fixe C; dans ce cas, on peut à volonté

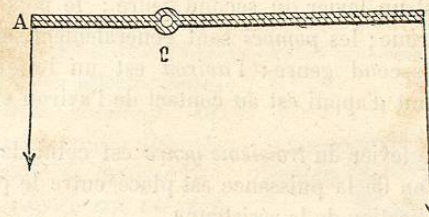


Fig. 110.

donner l'avantage à la puissance ou à la résistance, c'est-à-dire équilibrer la résistance avec une puissance plus petite ou plus grande que cette résistance.

Les *balances ordinaire et romaine* sont des leviers du premier genre, ainsi que les *balanciers* des machines à vapeur du système Watt : on emploie aussi des leviers de ce genre pour soulever les pierres ou les fardeaux (fig. 111); on les appelle des *pinces à talon*.

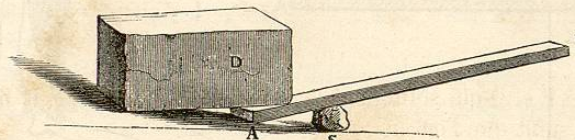


Fig. 111.

2° — Un levier est dit du *second genre* lorsque le point d'appli-

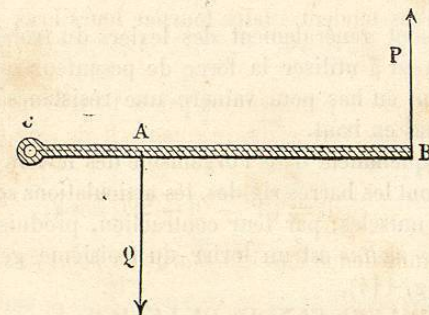


Fig. 112.

cation de la résistance est situé entre le point d'application de la puissance et le point fixe.

Il est évident que, dans cette disposition, le bras de levier CB de la puissance (fig. 112) étant plus grand que celui de la résistance, l'avantage est toujours à la puissance.

La *brouette* est un levier du second genre ; le point d'appui est sur l'axe de la roue ; les *pompes* sont généralement actionnées par des leviers du second genre ; l'*aviron* est un levier du second genre, car le point d'appui est au contact de l'aviron et de l'eau.

3° — Enfin le levier du *troisième genre* est celui dans lequel le point d'application de la puissance est placé entre le point d'appui et le point d'application de la résistance.

Il est visible que dans ce cas la résistance a toujours l'avantage (fig. 115).

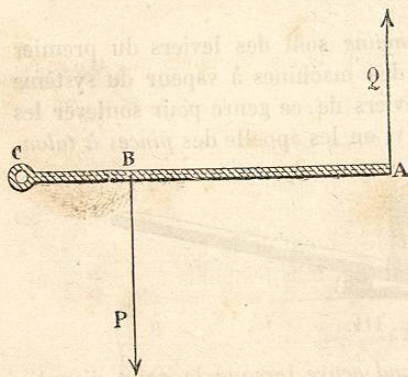


Fig. 115.



Fig. 114.

Les *pédales* sont généralement des leviers du troisième genre ; ces leviers servent à utiliser la force de pesanteur qui agit verticalement de haut en bas pour vaincre une résistance dirigée verticalement de bas en haut.

On trouve fréquemment dans l'organisme des leviers du troisième genre. Les os sont les barres rigides, les articulations sont les points d'appui, et les muscles, par leur contraction, produisent les puissances. Ainsi le *radius* est un levier du troisième genre actionné par le *biceps* (fig. 114).

§ II. — BALANCE ORDINAIRE.

252. — La *balance ordinaire* est un levier du premier genre formé d'une barre rigide, appelée *fléau*, qui porte trois *couteaux*, ou prismes d'acier trempé, disposés comme l'indique la figure 116 : le couteau O repose sur un plan de substance très dure, *acier trempé* ou *agate* ; les couteaux A et B, tournés en sens inverse du premier, sont destinés à supporter les plateaux de la balance à l'aide de crochets : le mode de suspension de ces crochets ou étriers est indiqué sur la figure 115.

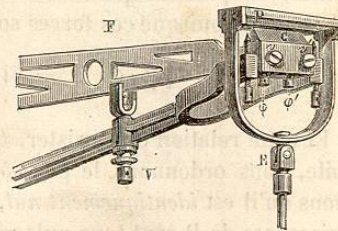


Fig. 115.

253. — **JUSTESSE.** On dit qu'une balance est **JUSTE** lorsque les plateaux étant chargés de poids égaux, et le fléau étant horizontal, il y a équilibre stable.

Cherchons les conditions d'établissement de la balance propres à satisfaire à cette définition. Soient (fig. 116) les poids égaux P appli-

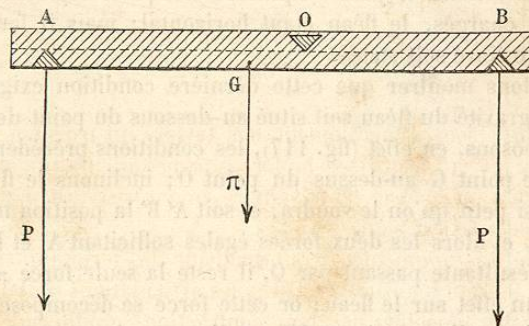


Fig. 116.

qués aux points A et B supposés en ligne droite avec le point O, soit G le centre de gravité du fléau et π le poids de ce levier. Il faut et il suffit, pour l'équilibre du levier, que les forces qui le sollicitent aient une résultante, et que cette force passe par le point O. Or, déjà les trois forces parallèles et de même sens appli-

quées au fléau admettent une résultante; en second lieu, pour qu'elle passe par le point O, il faut et il suffit que son moment par rapport à ce point soit nul, c'est-à-dire que la somme des moments des composantes par rapport au point O soit nulle. Pour exprimer ces moments, nous tiendrons compte de ce que le fléau est horizontal, en prenant pour bras de levier des forces les longueurs OA, OC, OB, puisque ces forces sont verticales; nous obtenons ainsi :

$$P \times OA + \pi \times OC - P \times OB = 0.$$

Et cette relation doit exister, quelle que soit l'intensité de P; par suite, nous ordonnons le polynôme par rapport à P et nous exprimons qu'il est *identiquement nul*, en écrivant que les coefficients des puissances de P sont tous nuls :

$$P \times (OA - OB) + \pi \times OC = 0.$$

On en conclut donc :

$$OA = OB, \quad OC = 0.$$

Donc déjà il faut que les deux bras du fléau soient égaux, et que, le fléau étant horizontal, la verticale du point de suspension passe par le centre de gravité.

A ces conditions, il y aura équilibre lorsque les plateaux seront également chargés, le fléau étant horizontal; mais il faut encore que cet équilibre soit stable.

Nous allons montrer que cette dernière condition exige que le centre de gravité du fléau soit situé au-dessous du point de suspension. Supposons, en effet (fig. 117), les conditions précédentes remplies, et le point G au-dessus du point O; inclinons le fléau d'un angle aussi petit qu'on le voudra, et soit A' B' la position nouvelle : G vient G', et alors les deux forces égales sollicitant A' et B' admettant une résultante passant par O, il reste la seule force π pouvant produire un effet sur le fléau; or cette force se décompose en deux autres dirigées l'une suivant G'O, et l'autre suivant la perpendiculaire à cette droite; la première de ces composantes a pour seul effet d'appuyer le fléau sur le point O, tandis que la seconde tend à augmenter l'inclinaison que nous avons donnée au fléau : donc il y a instabilité dans l'équilibre si G est au-dessus de O.

Au contraire, plaçons G au-dessous de O (fig. 118); les considérations précédentes nous conduisent à dire que la force π aura pour

effet de diminuer l'angle d'écart du fléau, c'est-à-dire de ramener celui-ci dans la position initiale : donc l'équilibre est stable.

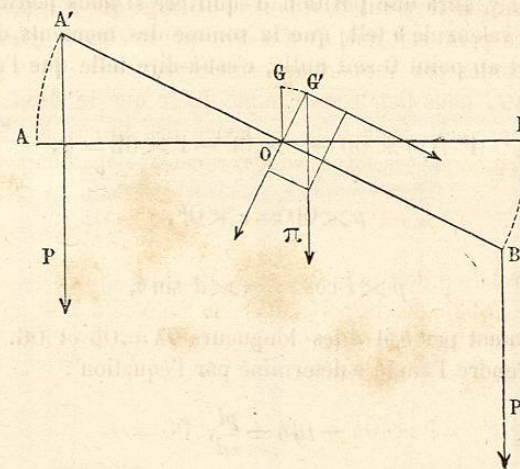


Fig. 117.

Dans le cas limite où G coïnciderait avec le point O, il est visible que l'équilibre aurait lieu pour toute position du fléau.

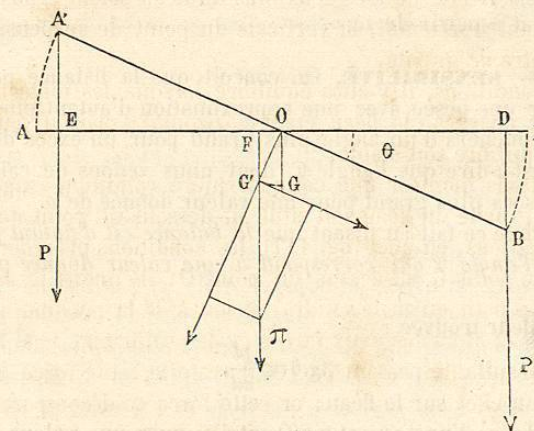


Fig. 118.

253 bis. — Conséquence. Il résulte des conditions que nous venons de trouver qu'une balance ainsi construite a la propriété de prendre une position d'équilibre stable sous l'action de poids inégaux placés dans les plateaux, le fléau faisant un certain angle avec l'horizon.

Soit, en effet, θ l'angle variable que fait le fléau A'B' avec l'horizontale AB (fig. 118), lorsque les plateaux sont chargés des poids P et P + p. Il y aura une position d'équilibre si nous pouvons déterminer une valeur de θ telle que la somme des moments des forces par rapport au point O soit nulle, c'est-à-dire telle que l'on ait la relation :

$$(P + p) \times OD - \pi \times OF - P \times OE = 0,$$

ou :

$$p \times OD = \pi \times OF,$$

ou enfin :

$$p \times l \cos \theta = \pi \times d \sin \theta, \quad (1)$$

en représentant par l et d les longueurs OA = OB et OG. Il suffira donc de prendre l'angle θ déterminé par l'équation :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{pl}{\pi d},$$

ce qui est toujours possible.

D'ailleurs cela est visible *a priori* par la comparaison des moments variables des forces p et π , dont l'un va toujours en décroissant jusqu'à zéro quand θ augmente, tandis que l'autre va constamment en croissant à partir de zéro.

254. — SENSIBILITÉ. On conçoit que la balance permettra d'effectuer une pesée avec une approximation d'autant plus grande qu'elle trébuchera d'un angle plus grand pour un excès de charge donné, c'est-à-dire que l'angle θ , dont nous venons de calculer la tangente, sera plus grand pour une valeur donnée de p .

On exprime ce fait en disant que *la balance est d'autant plus SENSIBLE que l'angle θ qui correspond à une valeur donnée p est plus grand.*

De la valeur trouvée :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{pl}{\pi d},$$

nous concluons que $\operatorname{tg} \theta$, et par suite θ , aura une valeur d'autant plus grande que l sera plus grand, π et d plus petits. Par suite :

La sensibilité d'une balance croît lorsqu'on augmente la longueur du fléau, que l'on diminue le poids de ce levier, et que l'on rapproche son centre de gravité du point de suspension.

Les deux premières conditions paraissent contradictoires, car si

l'on augmente la longueur du fléau, on augmente aussi son poids ; on arrive dans la pratique à concilier ces deux conditions en évitant le fléau sans nuire toutefois à sa solidité, ainsi qu'on le voit figure 119.

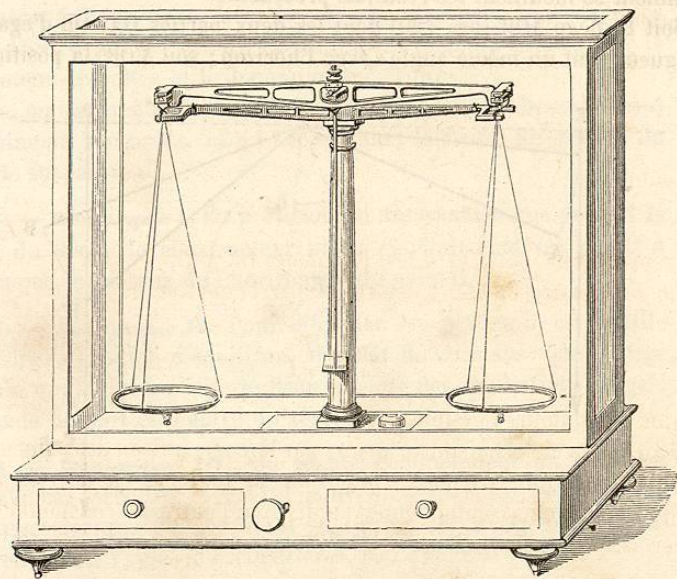


Fig. 119.

Quant au centre de gravité, il faut le placer le plus près possible du point O, mais sans le faire coïncider avec ce point, car alors $\operatorname{tg} \theta$ serait infini, c'est-à-dire que pour le moindre excès de charge le fléau se placerait verticalement.

Enfin, une balance étant donnée, il y a intérêt à pouvoir faire varier sa sensibilité ; en effet, lorsque le centre de gravité est très voisin du point O, la balance exécute des oscillations très lentes et d'une grande amplitude avant d'atteindre une position d'équilibre, ce qui résulte de la faible valeur maximum que peut atteindre le moment de la force π : si donc on a intérêt avec cette balance à effectuer à un certain instant des pesées rapides, il y aura avantage à diminuer sa sensibilité. On y parvient en employant un écrou, de métal très dense, mobile sur une tige taraudée fixée perpendiculairement au fléau au-dessus du couteau d'appui : on comprend aisément qu'en faisant descendre ou monter cet écrou on écarte ou l'on approche le centre de gravité du point O.

255. — Nous avons supposé dans ce qui précède que les trois points A, O, B étaient en ligne droite ; or, dans la pratique, il arrive certainement que l'élasticité du fléau ne permet pas de satisfaire d'une façon permanente à cette hypothèse : il y a donc lieu de voir comment se modifient les résultats précédents.

Soit le fléau AOB (fig. 120) dont les deux parties OA, OB d'égale longueur font un même angle α avec l'horizon ; soit A'O'B' la position

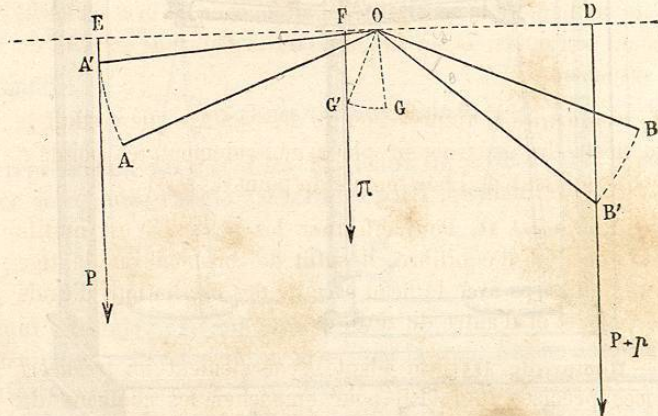


Fig. 120.

d'équilibre de ce fléau quand les plateaux sont chargés des poids P et P + p ; en désignant par θ l'angle dont l'appareil a tourné, l'équilibre conduit à l'équation :

$$(P + p) \times OD - \pi \times OF - P \times OE = 0;$$

ou, en désignant OA = OB par l, et OG par d :

$$(P + p) l \cos(\alpha + \theta) - \pi d \sin \theta - Pl \cos(\alpha - \theta) = 0,$$

équation de laquelle nous voulons tirer θ ; nous effectuerons donc les calculs propres à dégager l'angle θ :

$$\left. \begin{array}{l} (P + p) l \cos \alpha \left| \begin{array}{l} \cos \theta \\ - \pi d \end{array} \right| \begin{array}{l} \sin \theta \\ \sin \theta \end{array} \\ - Pl \cos \alpha \left| \begin{array}{l} \cos \theta \\ - Pl \sin \alpha \end{array} \right| \end{array} \right\} = 0,$$

ce qui donne visiblement :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{pl \cos \alpha}{(2P + p) l \sin \alpha + \pi d}.$$

Il faut tout d'abord remarquer que dans l'hypothèse actuelle la sensibilité dépend de la charge commune P, contrairement à ce qui arrivait lorsque les points A, O, B étaient en ligne droite : la sensibilité est donc d'autant plus petite que la charge commune est plus grande.

En second lieu, cette formule nous montre que, toutes choses égales d'ailleurs, l'angle θ ira en diminuant quand α croîtra, car le numérateur décroîtra et le dénominateur croîtra.

Enfin, on augmentera la sensibilité en allongeant les bras du fléau, en diminuant son poids, et en rapprochant le centre de gravité du point de suspension.

256. — **Remarque I.** En prévision du désavantage que produit la flexion du fléau, le constructeur place généralement les points A et B un peu au-dessus de l'horizontale du point O.

257. — **Remarque II.** Pour effectuer les pesées il est inutile d'attendre la position d'équilibre, il suffit de constater que la tige verticale qui fait corps avec le fléau exécute des oscillations d'égale amplitude de part et d'autre du zéro.

258. — **Remarque III.** On adapte généralement un trébuchet aux balances précises (fig. 119) pour empêcher les couteaux de s'émousser lorsque l'appareil est au repos ; ces trébuchets se manœuvrent soit à l'aide de crémaillères, soit avec une pédale.

259. — **DOUBLE PESÉE.** Pour les pesées très précises, telles qu'en exigent les expériences de physique ou de chimie, on ne suppose pas l'égalité des bras du fléau, et l'on opère par une méthode due à Borda, appelée double pesée.

On place le corps à peser dans le plateau A et l'on équilibre avec de la tarre dans le plateau B, puis on retire le corps et on le remplace dans le plateau A par des poids marqués ; au moment de l'équilibre il est visible que l'on a le poids du corps.

On peut encore opérer comme il suit, mais nous nous hâtons de dire que c'est peu pratique : on place le corps dans le plateau A, l'on équilibre par des poids marqués placés dans le plateau B, soit p le poids trouvé ; on recommence en plaçant le corps dans le plateau B, soit p' le nouveau poids trouvé ; désignons par l et l' les bras de levier OA et OB et par X le poids cherché, les deux équilibres nous conduisent aux équations :

$$\begin{array}{l} X \times l = p \times l', \\ p' \times l = X \times l', \end{array}$$

d'où :

$$X = \sqrt{pp'}.$$

Le poids cherché est donc la moyenne proportionnelle entre les poids trouvés p et p' .

§ III. — ROMAINE.

260. — La romaine (fig. 121) est un levier à bras inégaux qui porte un couteau en A permettant de le suspendre à un point fixe par l'intermédiaire d'un crochet C, terminé par un étrier; les

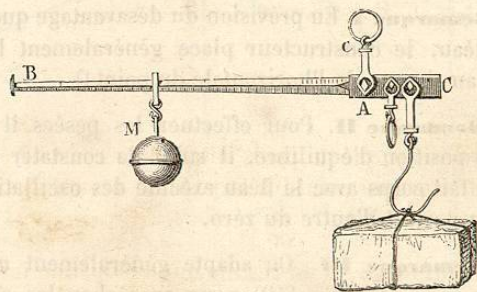


Fig. 121.

corps à peser se suspendent à un crochet de même forme que le précédent qui agit sur un deuxième couteau placé sur le bras le plus court; l'autre bras est sollicité par un poids constant qui se déplace le long de la tige à l'aide d'un crochet ou d'un curseur.

261. — **Équilibre de la romaine.** Soit P le poids suspendu en B (fig. 122), G le centre de gravité du levier et M le point d'ap-

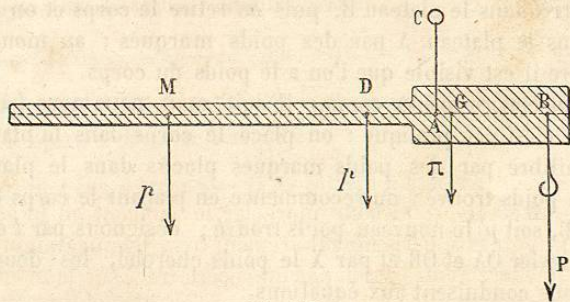


Fig. 122.

plication du poids p ; supposons qu'il y ait équilibre, la ligne MAB

étant horizontale, la résultante des trois forces, P , π , p doit passer par le point A, et par suite la somme des moments de ces forces par rapport à ce point doit être nulle; on aura donc :

$$P \times AB + \pi \times AG - p \times AM = 0; \quad (1)$$

d'autre part, retirons le corps suspendu en B et plaçons le poids p en un point D tel que la ligne DAB soit encore horizontale; nous aurons de même :

$$\pi \times AG - p \times AD = 0. \quad (2)$$

En retranchant (2) de (1), il vient :

$$P \times AB = p \times (AM - AD),$$

d'où :

$$P = \frac{p}{AB} \times DM. \quad (3)$$

Nous en concluons que le poids suspendu en B doit être proportionnel à la distance du point D à la position occupée par le poids p pour produire l'équilibre.

262. — **Graduation.** Il en résulte une graduation fort simple de cette machine. On détermine *a priori* le point D, où il faut placer le curseur pour maintenir le fléau horizontal, puis on suspend en B un poids connu, par exemple, 50 grammes; on place le poids p de manière à rétablir l'horizontalité de AB, soit M; on partage alors DM en 50 parties égales et l'on prolonge cette division aussi loin que le permet la longueur du grand bras. Dans ces conditions, si, pour amener AB à être horizontal lorsqu'on a suspendu un corps en B, il faut placer le curseur à la division 54, par exemple, on en conclut que le corps pèse 54 grammes; en effet, la relation (3) donne :

$$\frac{X}{54} = \frac{50}{50},$$

donc :

$$X = 54^{\text{gr}}.$$

263. — **Remarque I.** Pour apprécier le moment où le fléau est horizontal, on a fixé perpendiculairement à sa tige une aiguille qui doit à ce moment venir passer par un repère tracé sur le montant de l'anneau.

264. — **Remarque II.** Les dimensions de l'appareil étant néces-

sairement assez limitées, on ne peut apprécier des poids très différents, par suite de l'impossibilité de donner au poids p un bras de levier très grand. On dispose alors un deuxième point d'appui plus rapproché du point B que le précédent (fig. 121). On retourne l'appareil, la nouvelle graduation se trouve alors sur l'autre face du grand bras. On conçoit aisément que de cette façon on diminue le bras de levier du corps que l'on veut peser, ce qui revient à augmenter le bras de levier du curseur.

265. — Remarque III. L'avantage de cette balance est de ne pas exiger l'emploi de poids marqués. D'ailleurs elle n'est pas susceptible d'une grande sensibilité.

§ IV. — BASCULE DU COMMERCE.

266. — La bascule du commerce, due à Quintenz, est destinée à peser des corps dont les dimensions et le poids ne permettent pas l'usage de la balance ordinaire; elle se compose principalement d'un levier du second genre, ayant la forme d'une fourche, qui est relié à un levier du premier genre.

Nous représentons, dans la figure 125, l'élévation de la machine théorique et la projection horizontale du système des deux leviers :

Le premier levier, qui a pour axe de symétrie ac , a pour axe fixe la ligne a_1a_2 : deux couteaux projetés en a_1 et a_2 font corps avec le socle de la machine; le tablier sur lequel repose le corps à peser s'appuie sur ce levier par les couteaux b_1, b_2 , et enfin une tige verticale articulée en cc' et dd' relie ce premier levier au deuxième. Celui-ci a pour point fixe le point oo' , supporte en ff' un plateau destiné à recevoir les poids marqués, et porte en ee' une tige $ek, e'k'$, sur laquelle s'appuie une jambe de force qui fait corps avec le tablier, et qui achève de le mettre en rapport avec le système des leviers. Enfin la machine est construite de sorte que l'on ait la proportion :

$$\frac{ab}{ac} = \frac{oe}{od} \tag{1}$$

Cela posé, soient gg' le centre de gravité du corps à peser et P son poids que nous décomposons en trois forces parallèles et de même sens appliquées en k, b_1 et b_2 .

Soient P', P''_1 et P''_2 ces composantes dont la somme est P. P' peut être considérée comme appliquée en ee' .

Puis nous remplaçons P''_1 qui sollicite le point b_1 par une force verticale x appliquée en cc' et par suite en dd' . Cette force est telle que l'on a :

$$\frac{x}{P''_1} = \frac{mb_1}{mc} = \frac{ab}{ac}$$

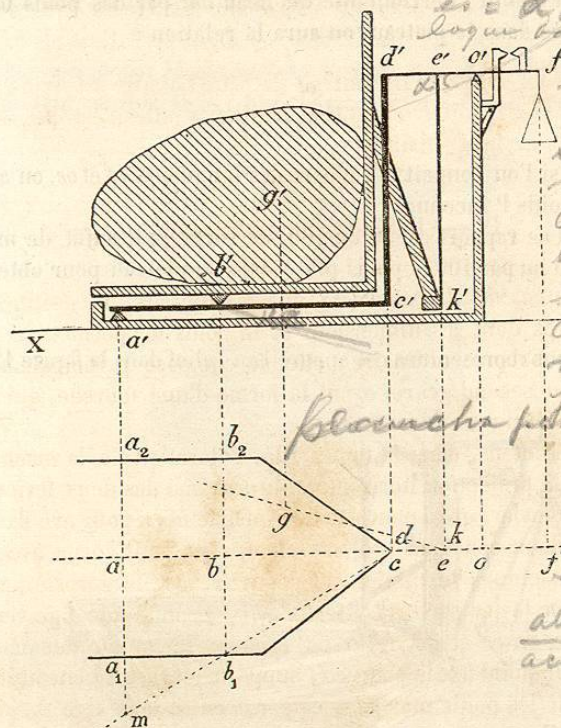


Fig. 125.

D'ailleurs cette force appliquée en dd' peut être remplacée par une force verticale y appliquée en ee' , telle que :

$$\frac{y}{x} = \frac{od}{oe}$$

par suite :

$$\frac{x}{P''_1} \times \frac{y}{x} = \frac{ab}{ac} \times \frac{od}{oe}$$

et, en vertu de la relation supposée (1) :

$$y = P''_1$$

*d'un long bras linéaire
es = d, atb
logue baya e' o' d' = d, ac
les distances
que baya d' e'
son proprio-
mais d' od y ce
de distance qd
baya e', iguando
lo que baya e' o'
d' e' de ces lon-
ms que lo que ba-
se b' para qd
a = o' d', ac
d. ac = o' d', ac
d = e' o', d, ac
d. ab = e' o', ac
ab = eo
ac = od*

De même, nous prouverons que la force P''_2 , qui sollicite le point b_2 , peut être transportée en ee' .

En résumé, la machine est sollicitée uniquement par les forces P', P''_1, P''_2 appliquées en ee' , c'est-à-dire par la force P ; tout se passe comme si le corps placé sur le tablier était suspendu en ee' .

Si donc on établit l'horizontalité du fléau dof par des poids marqués Q , placés dans le plateau, on aura la relation :

$$\frac{P}{Q} = \frac{of}{oe}.$$

Par suite, si l'on connaît le rapport des longueurs of et oe , on aura aisément le poids P inconnu.

En général ce rapport est 10 ou 100, de sorte qu'il suffit de multiplier par 10 ou par 100 le poids placé dans le plateau pour obtenir l'inconnue P .

267. — Nous représentons cet appareil en relief dans la figure 124.

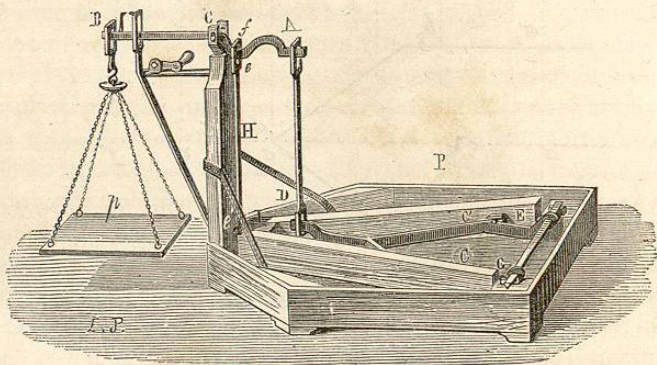


Fig. 124.

On a enlevé le tablier pour montrer la disposition des leviers dont nous venons de voir le fonctionnement.

On remarquera une manette placée au-dessous du levier CB et qui étant relevée lorsque la bascule ne fonctionne pas, fait reposer le tablier sur le socle de l'appareil de manière à épargner les arêtes vives des couteaux.

§ V. — * BASCULE ROMAINE, PONTS A BASCULE.

268. — BASCULE ROMAINE (système Béranger).

Cet appareil, représenté en relief figure 125, diffère de la bascule du commerce par le système des leviers, qui permet d'apprécier des poids très considérables; une romaine adaptée à cet appareil permet

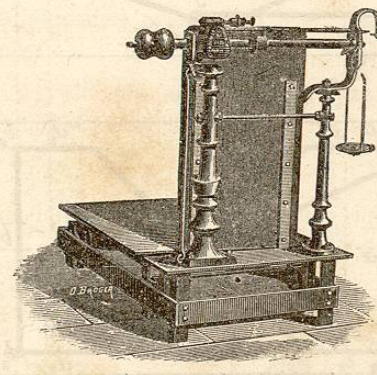


Fig. 125.

d'arriver très rapidement à la mesure de ces poids. Nous représentons (fig. 126) les deux projections des leviers en les réduisant à la partie théoriquement nécessaire.

Deux leviers du second genre ayant pour axes fixes, l'un $a_1 a_2$, l'autre $b_1 b_2$, supportent le tablier $r' s'$: les points d'appui sont au nombre de quatre: $c_1 c_2, d_1 d_2$; enfin ces deux leviers sont réunis aux points e, f par une bride qui les oblige à prendre un mouvement commun; au moyen d'une barre eh , fixée au levier $eb_1 b_2$, les deux leviers sont reliés à une tige verticale $h' k'$, qui est accrochée à un levier du premier genre $k' m'$ dont le point fixe est en oo' ; c'est le long de la tige $o' m'$ que se déplace un curseur formant romaine, et d'ailleurs un plateau accroché en m' permet aussi d'obtenir une plus grande puissance.

En plaçant un corps pesant sur le tablier, la bride ef tend à s'abaisser, il en résulte une traction de haut en bas, au point kk' du levier $k' m'$, et l'on produit l'horizontalité de ce levier par le