et alors, en multipliant membre à membre (2) et (3), on obtient :

$$y_1 = \frac{Q'}{2},$$

à cause de la relation (1). De même, la composante x_2 se remplace par une force égale à $\frac{Q'}{2}$ et appliquée en A_2:

En résumé, l'appareil est sollicité par les forces Q''_1 et $\frac{Q'}{2}$ appliquées en A_1, et par les forces Q''_2 et $\frac{Q'}{2}$ appliquées en A_2.

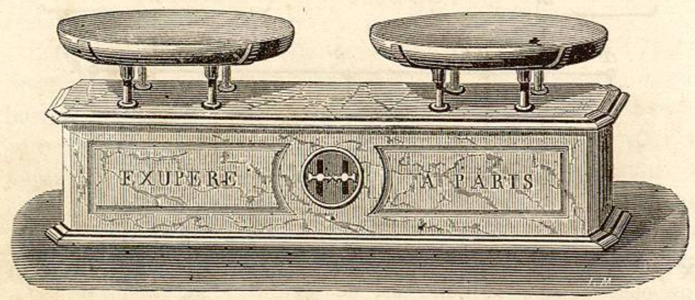


Fig. 132.

Or, la somme de ces quatre forces est précisément Q, et elles agissent sur le fléau comme une force égale à ce poids appliquée en un point de $A_1 A_2$.

Pour la même raison, quelle que soit la partie du plateau N où l'on place les poids marqués, ceux-ci agiront comme s'ils sollicitaient un point de $K_1 K_2$, et par suite l'horizontalité du rectangle $A_1 K_1 A_2 K_2$ se produira quand des poids égaux seront placés dans les plateaux et réciproquement.

Nous donnons (fig. 132) le modèle usité de la balance Béranger.

CHAPITRE VI

POULIES

§ I. — POULIE FIXE.

275. — La POULIE FIXE représentée figure 133 est un cylindre dont la hauteur est une fraction du rayon ; elle est mobile autour de son axe de figure, et cet axe est supporté par une pièce métallique appelée *chape*, laquelle est suspendue à un support fixe ; enfin la surface latérale du cylindre est creusée en *forme de gorge* sur laquelle s'enroule une corde ; c'est aux extrémités de cette corde que sont appliquées la puissance et la résistance.

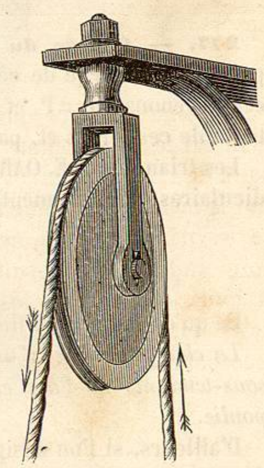


Fig. 133.

276. — Nous réduisons cette machine à un cercle (fig. 134) mobile dans son plan autour de son centre, et la corde à une ligne mathématique.

Soit P la puissance et Q la résistance : on peut les supposer appliquées aux points A et B, tangentiellement à la poulie ; la machine est alors un levier dont O est le point fixe : or les bras de levier des deux forces sont égaux, donc il faut et il suffit que ces forces soient égales.

On voit que cette machine peut servir uniquement à transformer la direction dans laquelle agit la puissance ; ainsi, nous pouvons exercer facilement une traction de haut en bas par notre poids, et l'emploi de la poulie fixe nous permettra d'élever un fardeau.

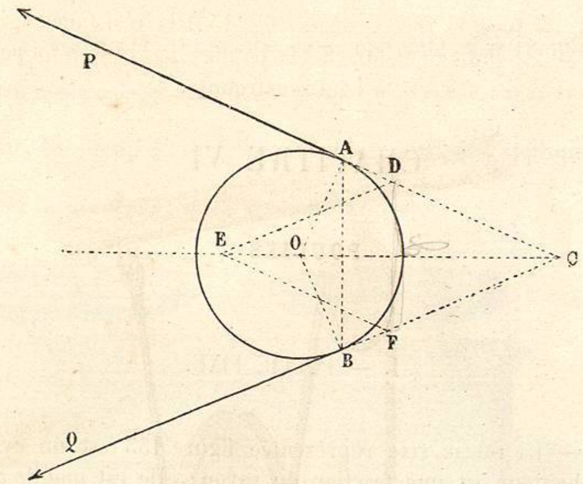


Fig. 134.

277. — Charge du point fixe. La poulie s'appuyant sur le point O, la charge de ce point est la résultante des deux forces P et Q. Prenons $CD = P$, et menons DE parallèle à CB : CE est la résultante de ces forces et, par suite, c'est aussi la charge du point O.

Les triangles CDE, OAB, qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, nous donnent :

$$\frac{CE}{CD} = \frac{AB}{OA}.$$

Ce qu'on énonce en disant :

La charge de l'axe d'une poulie fixe est à la résistance comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie.

D'ailleurs, si l'on désigne par 2α l'angle que font entre eux les deux brins de corde, on a :

$$CE = 2Q \cos \alpha.$$

C'est la valeur numérique de la charge de l'axe de la poulie.

§ II. — POULIE MOBILE.

278. — Dans la POULIE MOBILE (fig. 135) la résistance agit sur la chape et par suite au centre de la poulie ; la corde a *un point fixe*, et la puissance s'exerce à l'autre extrémité.

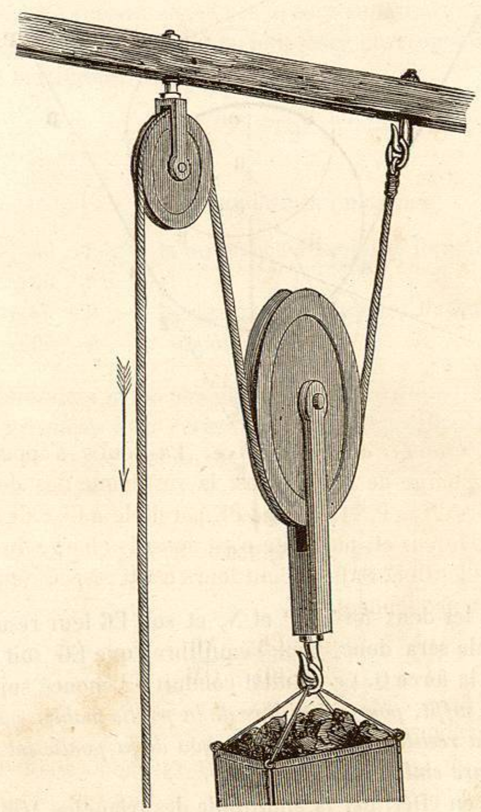


Fig. 135.

Soit C (fig. 136) le point fixe du cordon ; nous pouvons toujours imaginer une force N dirigée suivant AC, et remplaçant sur la corde l'action du point C. Dès lors, la poulie est un corps entièrement libre, et sollicité par les trois forces P, Q, N ; il faut donc et il suffit pour l'équilibre que la force Q soit égale et contraire à la résultante des forces P, N.

Donc déjà la direction de la résistance doit contenir le point E de concours des brins de corde AC, BD ; et la résultante des forces P et N devant être dirigée suivant EO bissectrice de leur angle, ces forces sont égales.

Ainsi, nous arrivons à dire que la force de réaction N que nous avons introduite pour remplacer la fixité du point C a même intensité que la puissance.

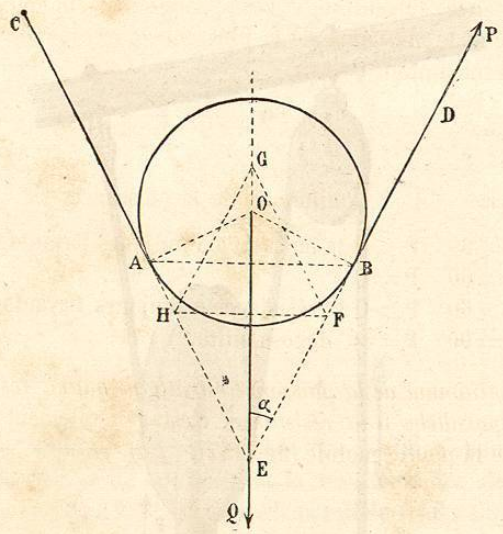


Fig. 136.

Composons les deux forces P et N, et soit EG leur résultante ; la condition finale sera donc, pour l'équilibre, que EG soit de même intensité que la force Q. Ce résultat conduit à l'énoncé suivant :

Il faut et il suffit, pour l'équilibre de la poulie mobile, que la puissance soit à la résistance comme le rayon de la poulie est à la soustendante de l'arc embrassé par la corde.

On obtient, en effet, par la similitude des triangles AOB, EFG :

$$\frac{EF}{EG} = \frac{OB}{AB}.$$

279. — En second lieu, si nous représentons par α l'angle que le brin de corde fait avec la direction de la résistance, nous avons visiblement :

$$EG = 2EF \times \cos\alpha ;$$

d'où la nouvelle forme de la condition d'équilibre :

$$Q = 2P \cos\alpha,$$

ou :

$$P = Q \times \frac{1}{2 \cos\alpha}.$$

Il en faut conclure que la puissance sera plus petite ou plus grande que la résistance, suivant que $(2 \cos\alpha)$ sera supérieur ou inférieur à l'unité, et que le *minimum* de la puissance correspond au cas où $(2 \cos\alpha)$ est maximum. Or,

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2};$$

donc :

$\alpha = 0 \quad P = \frac{Q}{2}$ minimum de la puissance,

$\alpha < 60 \quad P < Q$ la puissance a toujours l'avantage,

$\alpha = 60 \quad P = Q$

$\alpha > 60 \quad P > Q$ la résistance a toujours l'avantage,

$\alpha = 90 \quad P = \infty$ impossibilité.

Ainsi *le minimum de la puissance est atteint quand les brins de corde sont parallèles à la résistance*, c'est généralement ainsi que l'on emploie la poulie mobile (fig. 137).

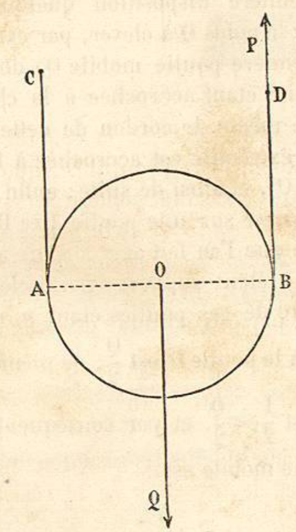


Fig. 137.

Enfin, si l'on veut tenir le cordon CD horizontal, par exemple, la

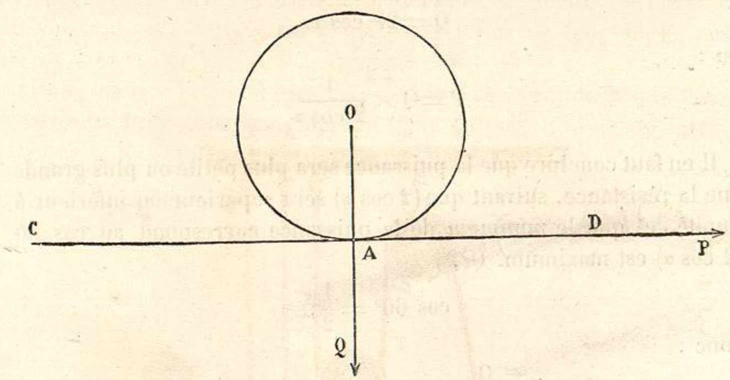


Fig. 138.

résistance étant verticale, il y a impossibilité (fig. 138); il faut une puissance infinie.

§ III. — SYSTÈMES DE POULIES.

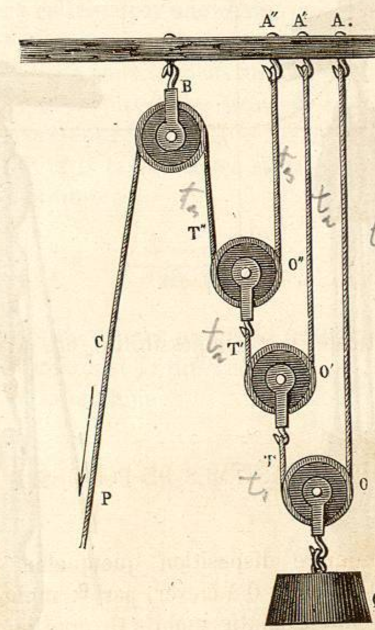
280. — Une première disposition quelquefois employée est figurée ici (fig. 139) : le poids Q à élever, par exemple, est suspendu à la chape d'une première poulie mobile O, dont la corde est fixée en A, l'autre extrémité étant accrochée à la chape d'une seconde poulie mobile O′; de même, le cordon de cette seconde poulie est fixé en A′, et l'autre extrémité est accrochée à la chape d'une troisième poulie mobile O″, et ainsi de suite; enfin la corde de la dernière poulie mobile passe sur une poulie fixe B, et c'est à l'extrémité C de cette corde que l'on fait agir la puissance P.

Les brins de corde étant supposés parallèles pour les poulies mobiles, et le nombre de ces poulies étant n, nous voyons que la résistance appliquée à la poulie O′ est $\frac{Q}{2}$; de même la résistance relative à la poulie O″ est $\frac{1}{2} \times \frac{Q}{2}$, et par conséquent, la résistance qui sollicite la $n^{\text{ième}}$ poulie mobile est :

$$\frac{Q}{2^{n-1}}.$$

Donc l'équilibre entre cette force et la puissance P, qui agit sur la corde de cette poulie, a lieu quand on a :

$$P = \frac{1}{2}\frac{Q}{2^{n-1}},$$



$t_1 = \frac{q}{2}$
$t_2 = \frac{t_1}{2}$
$t_3 = \frac{t_2}{2}$
$p = t_3$
$t_1 t_2 t_3 p = \frac{q t_1 t_2 t_3}{2^3}$
$p = \frac{q}{2^3}$

Fig. 139.

ou :

$$P = \frac{Q}{2^n}.$$

mufla

281. — MOUFLE. On appelle ainsi un assemblage de plusieurs poulies dans une même chape : le plus souvent les poulies sont de même rayon et sont montées sur un même axe (fig. 140) qui fait corps avec la chape.

D'autre fois, les poulies inégales ont des axes différents, mais ces axes font partie de la même chape (fig. 141).

Lorsque les poulies sont ainsi assemblées, on dit qu'elles sont *mouflées*.

garrucha

282. — PALAN. On appelle PALAN un système de deux moufles l'une fixe, et l'autre mobile, qui sont reliées par une corde passant alternativement sur une poulie de chaque moufle.

Dans chacune de ces dispositions (fig. 140 et 141), nous supposons les cordes parallèles; alors la chape de la moufle mobile est

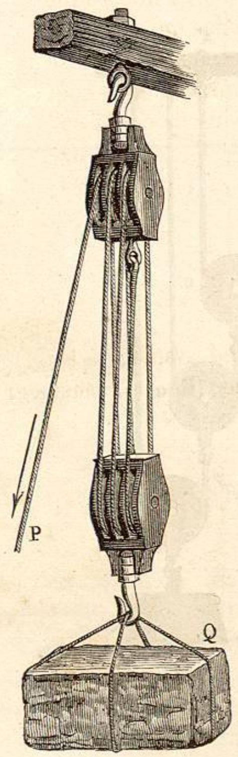


Fig. 140.

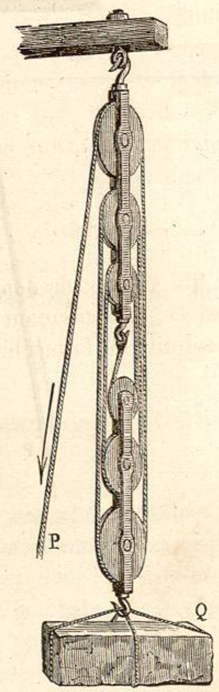


Fig. 141.

sollicitée par autant de forces égales à 2P qu'il y a de poulies : si donc le nombre des poulies d'une des moufles est n, l'équilibre sera atteint quand on aura :

$$Q = 2nP,$$

d'où :

$$P = \frac{Q}{2n}.$$

Si l'on représente par n' le nombre des brins de corde entre les deux moufles, on aura :

$$P = \frac{Q}{n'}.$$

283. — *POULIES DIFFÉRENTIELLES. On emploie aussi quelquefois une disposition représentée (fig. 142), dans laquelle on trouve deux poulies fixes centrées sur le même axe, mais de rayons différents, et une poulie mobile reliée à celles-ci par une chaîne qui s'enroule sur l'une des premières poulies pendant qu'elle se déroule sur l'autre ; nous laissons au lecteur le soin de prouver qu'en supposant les brins de corde parallèles, et représentant par R, r les rayons des poulies fixes, P et Q la puissance et la résistance, la relation d'équilibre est :

$$P = \frac{Q(R-r)}{2R}.$$

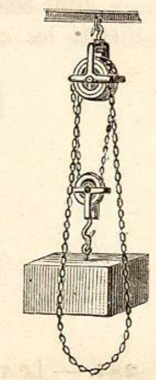
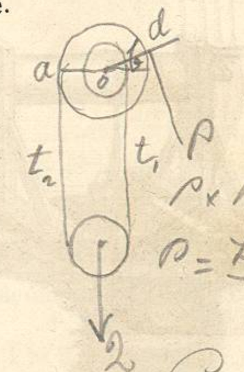


Fig. 142.

Ce qui permet de donner un grand avantage à la puissance, en diminuant la différence $(R-r)$, sans pour cela nuire à la solidité de la machine.



$P \times R + t_1 \times r - t_2 \times R = 0$

$P = \frac{t_2 R - t_1 r}{R}$

$A_2 = A_1 = \frac{Q}{2}$

$P = \frac{Q}{2}\left(\frac{R-r}{R}\right)$

$P = \frac{Q(R-r)}{2R}$