

Il a été indispensable, pour atteindre une précision suffisante, de donner quelques notions sur les *coordonnées du point* et sur la *représentation analytique de la droite*.

La notion de *dérivée* dont nous avons fait un usage très limité en algèbre pour rester absolument d'accord avec les programmes, s'est imposée de nouveau dans les définitions de *vitesse* et d'*accélération* : il y aura avantage pour le lecteur à revoir particulièrement le premier chapitre du livre IV dans le *Cours d'algèbre*.

E. COMBETTE.

Mai 1882.

68  
COURS

DE

MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

LIVRE PREMIER

FORCES CONCOURANTES ET PARALLÈLES

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

§ I. — DÉFINITIONS.

**1. — Corps solide.** Les phénomènes physiques nous amènent à concevoir les corps comme composés de parties insécables, appelées *molécules*, dont les dimensions échappent par leur ténuité à tous nos procédés de mesure.

Ces molécules sont situées les unes des autres à des distances très petites, appelées *espaces intermoléculaires*, qui nous sont également inconnues, qui varient dans un même corps avec les circonstances physiques dans lesquelles il se trouve, et que l'on considère comme beaucoup plus grandes que les dimensions des molécules.

En *mécanique* nous faisons abstraction des dimensions de ces molécules, et nous substituons au corps physique un système de *points matériels*, dont nous négligeons les dimensions, placés à des distances déterminées les uns des autres.

En particulier nous disons qu'un corps solide est *rigide* ou *invariable* quand les distances mutuelles des *points matériels* qui le composent sont invariables.

**2. — Repos. Mouvement.** Lorsque les points A, B, C, D... d'un système P restent à des distances mutuelles invariables, on dit que chacun de ces points est en *repos* dans le système P, ou relativement aux autres points de ce même système. Nous pouvons concevoir le repos *absolu*, mais la nature ne nous en donne aucun exemple.

Dans le cas, au contraire, où les distances du point A aux points B, C, D, ... changent avec le temps, on dit que ce point A est en *mouvement* dans le système P.

Il est clair qu'un point en repos dans le système P peut être en mouvement dans un autre système P'.

**3. — Inertie.** Nous admettons, comme fait d'expérience, qu'un corps ne peut de lui-même se mettre en mouvement s'il est au repos, ou modifier le mouvement qu'il possède.

Cet axiome, que nous retrouverons plus tard sous le nom de *Loi expérimentale de l'inertie*, se vérifie dans ses conséquences, mais ne peut être démontré dans toute sa généralité.

**4. — Force.** On appelle *FORCE* toute cause de production ou de modification de mouvement.

Il résulte de cette définition que les forces sont de diverses espèces.

Ainsi, tous les corps que nous voyons, abandonnés à eux-mêmes, se mettent en mouvement vers la terre : ils sont donc sollicités par une force qui s'appelle *PESANTEUR*.

Le *fer*, situé dans le voisinage d'un *aimant*, tend à se déplacer vers l'aimant : il est donc sollicité par une force qu'on appelle *attraction magnétique*.

Un corps électrisé attire ou repousse les corps légers et isolés placés auprès de lui : *attraction et répulsion électriques*.

Quand on élève la température d'un gaz, renfermé dans un vase à parois inextensibles par exemple, il se produit sur les parois une pression de plus en plus grande qui est due à la *force élastique du gaz*.

Enfin, l'homme utilise la *force musculaire* des animaux.

**5. — Pressions.** Mais il est évident que l'action d'une force sur un corps ne se manifeste pas toujours par un mouvement de ce

corps : ainsi, la pesanteur agit sur les objets placés sur une table, car si nous supprimons la résistance que la table oppose au mouvement de ces objets, ils tombent : on dira alors que la pesanteur produit une *pression* aux points où ces objets sont en contact avec la table. Il en est de même si un corps pesant suspendu en un point reste en repos ; la pesanteur exerce une pression sur le point de suspension.

**6. —** Trois données importantes servent à déterminer une force agissant sur un corps :

1° Le *point d'application* ;

2° La *direction* : c'est la droite suivant laquelle se déplacerait le point d'application supposé en repos s'il était libre d'obéir isolément à l'action de la force ;

3° L'*intensité*, que nous apprendrons à mesurer dans le paragraphe suivant.

**7. — Équilibre.** On conçoit aisément que deux forces, agissant simultanément sur un même point matériel libre, puissent se détruire mutuellement, de sorte que l'état de ce point ne soit en rien modifié par la suppression de ces deux forces : on exprime ce fait en disant que *ces forces se font équilibre*.

De même, si des forces, en nombre quelconque, sollicitant un corps, sont telles que l'on ne trouble pas l'état de ce corps, supposé libre, en faisant cesser simultanément leurs actions, on dira que le *système de ces forces est en équilibre*.

**8. —** Il est évident que l'on ne doit pas confondre l'état d'un corps *en repos* avec celui d'un corps sollicité par des *forces qui se font équilibre*, car un corps en mouvement peut n'être sollicité par aucune force.

**9. — Divisions de la mécanique.** La mécanique se subdivise en trois parties bien distinctes :

1° La *STATIQUE*, qui traite de l'équilibre des forces et des transformations que l'on peut leur faire subir ;

2° La *CINÉMATIQUE*, qui a pour objet l'étude du mouvement du point matériel ou des systèmes de points, indépendamment des causes qui le produisent ;

3° La *DYNAMIQUE*, dont le but est d'étudier l'effet produit sur un corps par des forces qui le sollicitent.

On comprend que la *statique* puisse être considérée comme un cas

particulier de la *dynamique* : nous suivrons l'ordre précédent, spécifié dans les programmes.

## § II. — COMPARAISON ET MESURE DES FORCES.

**10. — Égalité de deux forces.** On dit que deux forces sont égales, quand elles sont susceptibles de produire des effets identiques dans des conditions identiques.

Ainsi, deux forces seront égales si, en les faisant agir successivement sur un même point matériel libre partant du repos, elles lui communiquent le même mouvement.

Ou encore, deux forces sont d'égale intensité si elles se font équilibre en agissant sur un point matériel en même direction, mais dans des sens opposés.

**11. — Force multiple d'une autre.** On dit qu'une force  $F$  est double, triple... d'une force  $F'$  lorsque la force  $F$  est capable de remplacer l'action de deux, trois... forces égales à  $F'$  agissant en même direction et en même sens sur un point libre.

Il est clair que la force  $F$  est alors susceptible de tenir en équilibre le système de deux, trois... forces égales à  $F'$ , appliquées au même point, dans la même direction, mais en sens inverse.

La force  $F$  est alors appelée *force multiple de  $F'$* .

Une force  $\varphi$  est dite *commune mesure* entre les forces  $F$  et  $F'$  lorsque ces forces sont multiples de  $\varphi$ .

**12. — Rapport de deux forces.** Le rapport de la force  $F$  à la force  $F'$  est le nombre qui exprime comment  $F$  se compose avec  $F'$ . Si ces forces sont commensurables entre elles, c'est-à-dire s'il existe entre elles une commune mesure  $\varphi$ , contenue  $m$  fois dans  $F$  et  $m'$  fois dans  $F'$ , on aura :

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}$$

Mais, dans le cas où il n'existe pas de commune mesure entre  $F$  et  $F'$ , on obtiendra des valeurs de plus en plus approchées du rapport de  $F$  à  $F'$  en cherchant le nombre de fois que la force  $F$  contient des parties aliquotes de plus en plus petites de  $F'$ .

Par exemple, si l'on veut évaluer  $\frac{F}{F'}$  à  $\frac{1}{10^n}$  près, on comparera  $F$  à

la force  $f$  qui est la fraction  $\frac{1}{10^n}$  de  $F'$ , et, si  $m$  est le plus grand nombre de fois que  $F$  contient  $f$ , on aura :

$$\frac{m}{10^n} < \frac{F}{F'} < \frac{m+1}{10^n}$$

**13. — Unité de force.** On choisit pour *unité de force* le kilogramme, c'est-à-dire l'action exercée par la terre sur un décimètre cube d'eau distillée à 4 degrés centigrades, placé à la surface du sol.

**14. — Mesure des forces. Dynamomètres.** On appelle *mesure* d'une force le rapport de cette force au kilogramme.

Pour effectuer la comparaison d'une force au kilogramme, on emploie des instruments appelés *DYNAMOMÈTRES*, qui sont formés dans leur partie essentielle de corps élastiques, tels que des ressorts d'acier, pouvant subir des déformations sous l'action des forces, et reprenant leur forme primitive lorsque cette action cesse. On conçoit aisément que l'on puisse constater ainsi l'égalité de deux forces par l'identité des déformations qu'elles produisent sur le même dynamomètre.

Pour graduer un dynamomètre, on observera directement les flexions produites par des poids connus, et l'on inscrira les poids vis-à-vis des positions occupées par un point déterminé, appelé *repère*, de la partie flexible.

**15. — Peson à ressort.** On donne à ce dynamomètre plusieurs dispositions représentées dans les figures 1, 2, 5.

1° — *Peson en arc* (fig. 1). — Il se compose d'une lame d'acier flexible courbée en forme de V. Un arc métallique (laiton) fixé en A passe librement à travers l'autre branche dans laquelle on a pratiqué une fenêtre et se termine par un anneau destiné à fixer l'appareil à un obstacle fixe. Un deuxième arc analogue au premier est fixé au contraire en B et passe librement dans l'autre branche; il porte à son extrémité un crochet permettant de faire agir successivement les forces que l'on veut comparer. Il est évident que si l'on fixe l'anneau et que l'on suspende un corps pesant à l'aide du crochet, le ressort fléchira et l'on pourra définir cette flexion par le point du premier

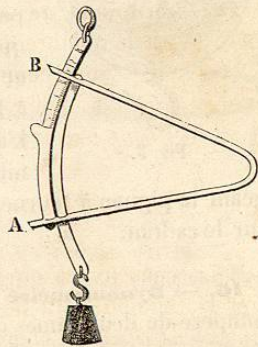


Fig. 1.

arc en contact avec la partie B du ressort. On graduera ainsi l'instrument en suspendant des corps pesant 1, 2, 3... kilogrammes, et marquant 1, 2, 3... aux points d'affleurement. Enfin, pour éviter qu'on ne dépasse la *limite d'élasticité* du ressort, ce qui produirait une déformation permanente, on place sur le premier arc un talon contre lequel vient buter le ressort dans le cas où l'on fait agir une force de trop grande intensité.



Fig. 2.

2° — *Peson cylindrique* (fig. 2). — Ici la lame élastique est un ressort à boudin enfermé dans un tube de laiton qui porte à sa partie supérieure un anneau A. L'autre base du cylindre laisse passer librement une tige terminée à la partie inférieure par un crochet C, et à l'autre extrémité par un disque faisant piston et qui a pour but de comprimer le ressort à boudin contre la base inférieure du cylindre. Une rainure B, pratiquée dans la paroi latérale du tube, laisse saillir un index fixé à la tige, qui peut ainsi se mouvoir sur une échelle tracée sur le bord de la rainure.

L'usage de cet instrument est évident.

3° — *Peson à cadran* (fig. 5). — Dans cette disposition, la lame d'acier R est cintrée; elle est fixée en l'une de ses extrémités à une plaque circulaire dont le contour porte la graduation. L'autre extrémité porte une crémaillère c qui engrène sur un pignon p dont l'arbre porte une aiguille A se mouvant sur le cadran. On suspend l'appareil à un point fixe par un anneau qui part de la première extrémité du ressort, et l'on fait agir la force que l'on veut mesurer à l'aide d'un crochet fixé à l'autre extrémité. L'action de la force tend à abaisser l'extrémité mobile du ressort, et la crémaillère, obli-

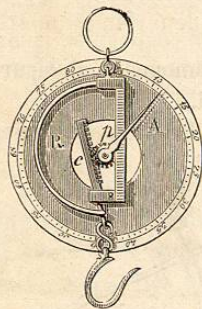


Fig. 5.

geant le pignon à tourner autour de son axe, fait déplacer l'aiguille sur le cadran.

16. — *Dynamomètre de M. Poncelet*. Cet appareil (fig. 4) se compose de deux lames d'acier AB, CD qui au repos sont parallèles, et qui sont articulées à leurs extrémités à deux petites tiges métalliques AC, BD. Un anneau et un crochet sont fixés au milieu de ces lames et à l'extérieur, tandis qu'aux mêmes points sont vissées inté-

rieurement deux règles divisées, glissant l'une contre l'autre. Il est évident qu'en fixant l'anneau E, et faisant agir une force en F, on produira un écartement des deux ressorts qui sera apprécié par le déplacement relatif des divisions des deux tiges.

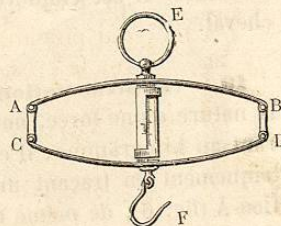


Fig. 4.

17. — *REMARQUE*. On constate aisément, en voyant la graduation d'un peson, que les divisions sont inégales : elles sont d'autant plus petites pour un même excès de force que la force a une plus grande intensité : il en résulte que l'approximation avec laquelle une force est mesurée par ces instruments va en décroissant quand la force augmente.

Dans le dynamomètre de M. Poncelet, cet inconvénient n'existe pas : l'écartement des points milieux des deux lames est proportionnel à l'intensité de l'effort exercé pour les écarter, dans des limites assez grandes. C'est un avantage important.

18. — *Dynamomètre de Regnier* (fig. 5). — Cet instrument peut servir à l'évaluation des efforts de traction et de compression. Il se compose d'un ressort d'acier *abcd* formé de deux lames minces courbées en ellipse, et réunies à leurs extrémités par une partie épaisse et peu élastique.

Il est clair qu'on produira un rapprochement des points milieux des deux parties flexibles en comprimant le ressort perpendiculairement à *ab*, et aussi en le soumettant à une traction dans la direction *ab*.

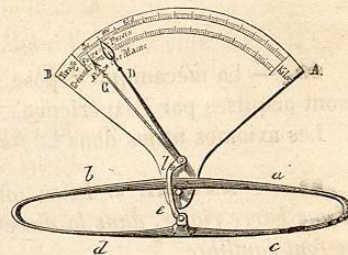


Fig. 5.

Le déplacement relatif de ces deux points milieux est transmis par un levier coudé *cl* à une aiguille C dont l'extrémité se déplace sur un cadran divisé.

Les deux graduations indiquées sur la figure sont relatives l'une à la traction, l'autre à la compression.

Une seconde aiguille D a pour but d'indiquer l'effort maximum : elle est entraînée par l'aiguille C, et peut se déplacer librement autour du même centre.

Quant à la graduation, cet appareil présente les inconvénients des pesons, mais il est plus précis que ces dynamomètres et sert particulièrement à la mesure des forces supérieures à 100 kilogrammes. Il est employé pour estimer la force de traction du cheval.

**19. — Représentation graphique d'une force.** Quelle que soit la nature d'une force, nous avons obtenu sa mesure en la comparant au kilogramme; il est possible alors de la représenter géométriquement en traçant une droite passant par le point d'application A (fig. 6), de même direction que la force, et portant à partir

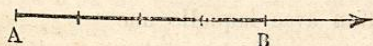


Fig. 6.

de A, dans le sens où agit cette force, une longueur AB ayant même mesure que la force. Ainsi, en prenant le mètre pour unité de longueur, et le kilogramme pour unité de force, la longueur  $AB = 2,7$  représentera la force 2,7.

On indiquera d'ailleurs par une flèche le sens d'action.

### § III. — AXIOMES ET CONSÉQUENCES.

**20. —** La mécanique repose sur des propriétés ou *axiomes* qui sont acquises par l'expérience.

Les axiomes utiles dans la statique sont au nombre de quatre.

**21. — AXIOME I.** Deux forces égales agissant aux extrémités d'une barre rigide, dans la direction de cette barre et en sens inverse, se font équilibre.

Ainsi, soit (fig. 7) les deux points A, B, liés l'un à l'autre, de sorte



Fig. 7.

que leur distance soit invariable, et soit F et F' des forces d'égale intensité agissant dans la direction AB, mais en sens inverse; nous admettons que le système est en équilibre.

**22. — AXIOME II.** Lorsqu'un corps invariable a un point fixe, et qu'il est sollicité par une force unique, il faut et il suffit pour l'équilibre que la direction de la force passe par ce point fixe.

Le corps invariable M (fig. 8) dont le point A est fixe, sera en équilibre sous l'action de la seule force F si le point A est situé sur BF, et seulement dans ce cas.

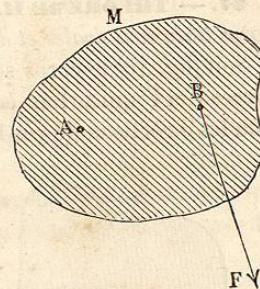


Fig. 8.

**23. — AXIOME III.** Lorsqu'un corps invariable a un axe fixe (c'est-à-dire s'il ne peut que tourner autour d'une droite), et qu'il est sollicité par une force unique, il faut et il suffit pour l'équilibre que la force soit dans un même plan avec l'axe.

**24. — AXIOME IV.** Lorsqu'un corps invariable au repos est en équilibre sous l'action d'un système de forces, on ne trouble pas l'équilibre en fixant un ou plusieurs points du corps.

**25. — AXIOME V.** On ne trouble pas l'état d'un corps invariable en détruisant des forces qui se font équilibre sur ce corps, ou en faisant agir des forces se tenant en équilibre sur le corps.

**26. — THÉORÈME I.** On peut, sans changer l'action d'une force sur un corps, transporter son point d'application en un point quelconque du corps situé sur sa direction.

Soit, en effet (fig. 9), la force F sollicitant le point A du corps M,

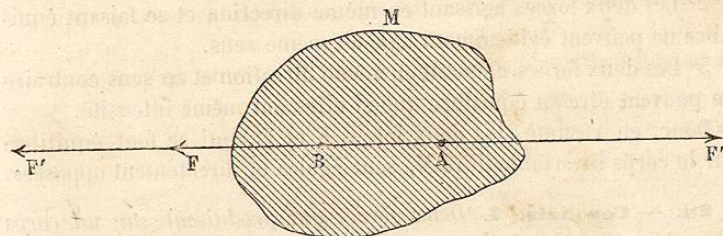


Fig. 9.

et soit B un point quelconque de sa direction : nous ne changerons en rien l'état du système (25) en introduisant deux nouvelles forces F' et F'' égales entre elles et à la force F, agissant l'une F' en B, l'autre F'' en A dans la direction AB et en sens inverse, car AB est une barre rigide, et par suite les forces F' et F'' sont en équilibre (21). Or, les forces F et F'' égales et directement opposées se font équi-

libre, donc nous pouvons les supprimer (25), le corps ne sera plus sollicité que par la force  $F'$  appliquée au point B.

**27. — THÉORÈME II.** Deux forces qui se font équilibre sur un corps libre sont égales et directement opposées.

Soit (fig. 10) le corps solide M absolument libre, et soient les deux forces  $F$  et  $F'$  qui se font équilibre sur ce corps; nous voulons prouver que les directions de ces forces coïncident, qu'elles agissent en sens

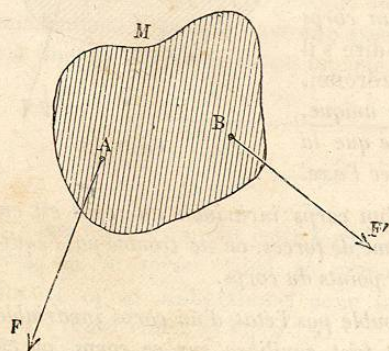


Fig. 10.

inverse et qu'elles ont même intensité : c'est ce que l'on exprime en disant qu'elles sont égales et directement opposées.

1° Soit A un point arbitraire de la force  $F$ , que nous pouvons prendre comme point d'application de cette force (26) : nous ne troublerons pas l'équilibre supposé en fixant le point A (24); or, à ce moment, l'effet de la force  $F$  sera détruit, et le

corps ayant un point fixe A sera en équilibre sous l'action de la seule force  $F'$ ; donc (22) la direction de  $F'$  passe par le point A.

Les directions  $F$  et  $F'$  coïncident donc, puisqu'elles ont en commun un point quelconque de  $F$ .

2° Les deux forces agissant en même direction et se faisant équilibre ne peuvent évidemment agir en même sens.

3° Les deux forces agissant en même direction et en sens contraire ne peuvent être en équilibre que si elles ont même intensité.

Donc, en résumé, les deux forces  $F$  et  $F'$ , qui se font équilibre sur le corps invariable libre M, sont égales et directement opposées.

**28. — Corollaire I.** Deux forces qui produisent sur un corps libre des effets identiques sont identiques.

Soient en effet (fig. 10) les deux forces  $F$  et  $F'$  produisant des effets identiques sur le corps M; nous détruirons l'action de  $F$  en faisant agir, par exemple au point A, une force  $F''$  égale et contraire à  $F$ : Donc cette force  $F''$  est capable de tenir en équilibre la force  $F'$  dont l'effet sur M est identique à l'action de  $F$ ; par suite  $F'$  et  $F''$  sont égales et directement opposées (27). Donc  $F$  et  $F'$  sont identiques, puisque chacune d'elles est égale et directement opposée à  $F''$ .

**29. — Corollaire II.** (Réciproque du théorème I.)

Si l'on ne change pas l'effet d'une force sur un corps libre en transportant son point d'application de A en B, ce point B est sur la direction de la force.

Car deux forces qui produisent des effets identiques sur un corps libre sont en même direction (28).

**30. — THÉORÈME III.** Trois forces qui se font équilibre sur un corps sont situées dans le même plan.

Soit en effet (fig. 11) le corps M, en équilibre sous l'action des forces  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$ ; prenons arbitrairement un point sur la direction de chacune d'elles; en fixant les points A et B, nous ne troublerons pas l'équilibre supposé (24). Or, à ce moment, les deux forces  $F$  et  $F'$  étant détruites par la fixité des points A et B, le corps, toujours en équilibre, sera sollicité par la seule force  $F''$  et aura un axe fixe AB : donc (23) la force  $F''$  est dans un même plan avec AB, c'est-à-dire qu'elle est contenue dans le plan ABC; ce plan contenant l'une quelconque des trois forces les contient toutes, c'est ce qu'il fallait prouver.

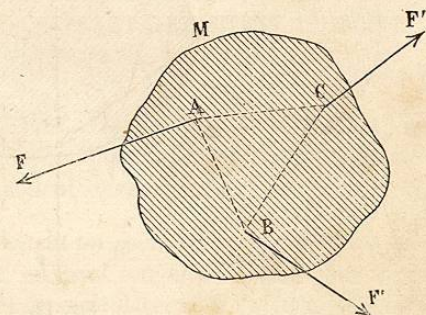


Fig. 11

**31. — Définition.** On dit qu'un système de forces sollicitant un corps admet une RÉSULTANTE, lorsqu'il existe une force produisant sur ce corps un effet identique à l'effet simultané des forces considérées.

Dans le cas général, ainsi que nous le verrons, un système de forces n'admet pas de résultante : il faut, pour qu'il en soit ainsi, certaines conditions que nous déterminerons. Mais, lorsqu'un système de forces admet une résultante, il n'en peut admettre qu'une seule; en effet, d'après (28), si deux forces produisent des effets identiques sur un corps elles sont identiques.

**32. — THÉORÈME IV.** Lorsque des forces sont en équilibre sur un corps libre, chacune d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

Soit en effet le corps M (fig. 12) en équilibre sous l'action des

forces  $F_1, F_2, F_3 \dots$ ; appliquons une force  $F'_1$  égale et contraire à  $F_1$ , le corps obéira uniquement à l'action de  $F'_1$ : mais, d'autre part, cette force  $F'_1$  tenant en équilibre  $F_1$ , nous ne troublerons pas l'état du système en supprimant  $F_1$  et  $F'_1$ ; donc le corps obéira à l'action

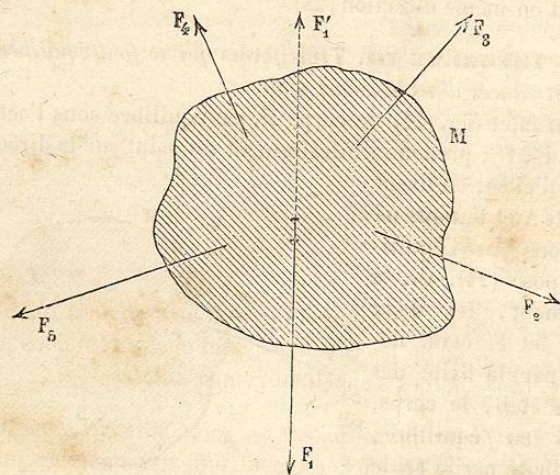


Fig. 12.

simultanée des forces  $F_2, F_3 \dots$ . Il en faut conclure que la force  $F'_1$  produit le même effet sur le corps que l'action simultanée des forces  $F_2, F_3 \dots$ ; donc  $F'_1$  est, par définition, la résultante du système des forces  $F_2, F_3 \dots$ , ce qu'il fallait démontrer, puisque  $F_1$  est égale et contraire à  $F'_1$  par hypothèse.

**33. — THÉORÈME V.** Deux forces qui ne sont pas dans un même plan n'ont pas de résultante.

Car si les forces  $F$  et  $F'$  ont une résultante  $R$ , en appliquant au corps une force  $R'$  égale et contraire à  $R$ , on produira un équilibre entre les forces  $F, F'$  et  $R'$ . Ces forces sont donc dans le même plan (50). Donc si les forces  $F$  et  $F'$  ne sont pas dans le même plan, elles ne peuvent admettre de résultante.

## CHAPITRE II

### FORCES CONCOURANTES

#### § I. — COMPOSITION DES FORCES QUI SOLLICITENT UN POINT MATÉRIEL.

**34. — Définition.** Lorsque les forces d'un système admettent une résultante, on dit qu'on les *compose* quand on les remplace par cette résultante, et ces forces s'appellent *composantes*.

**35. —** Des forces qui sollicitent un point matériel admettent toujours une résultante. En effet, on peut toujours imaginer une force qui empêche le point matériel de se déplacer sous l'action des forces qui le sollicitent : cette force tient donc en équilibre les forces considérées, qui admettent dès lors une résultante égale et contraire à cette force.

#### **36. — COMPOSITION DES FORCES AGISSANT EN MÊME DIRECTION.**

**PREMIER CAS.** — Supposons que deux forces agissent sur un même point matériel en même direction et en même sens. On pourra les remplacer par une force unique égale à leur somme, agissant dans la même direction et dans le même sens que ces composantes.

Soient en effet  $F$  et  $F'$  les intensités de ces forces et  $\varphi$  une commune mesure contenue  $m$  fois dans  $F$  et  $m'$  fois dans  $F'$ . Cela signifie, par définition, que la force  $F$  produit le même effet que les  $m$  forces égales à  $\varphi$ , agissant dans la même direction et dans le même sens que  $F$  : donc par les mêmes raisons, la force  $F + F'$  produira le même effet que les  $(m + m')$  forces égales à  $\varphi$ , c'est-à-dire que les forces simultanées  $F$  et  $F'$ .

**37. — DEUXIÈME CAS.** — Considérons des forces en nombre arbitraire agissant sur un même point matériel, en même direction et en