deux pignons, et par R et R′ les rayons de la manivelle et de la

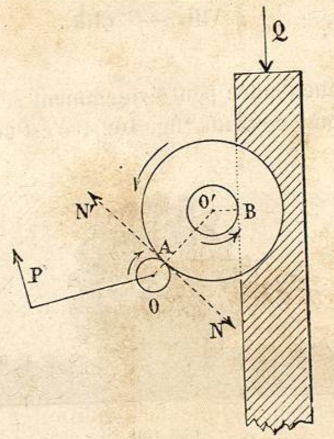

Fig. 164.

roue, et en écrivant que les deux treuils sont séparément en équilibre, nous aurons :

$$PR = N'r, \qquad NR' = Qr',$$

d'où :

$$P = Q \times \frac{rr'}{RR'}.$$

CHAPITRE VIII

PLAN INCLINÉ

304. — Nous rappelons que la condition générale d'équilibre d'un corps assujetti à rester sur un plan parfaitement poli est que les forces qui le sollicitent admettent une résultante, que cette force soit normale au plan, tende à appuyer le corps sur le plan, et que sa direction rencontre le plan à l'intérieur du polygone convexe que forment les points d'appui.

Nous supposons un corps pesant, placé sur un plan incliné parfaitement poli et sollicité par une force P, et nous cherchons dans ce cas simple les conditions particulières de l'équilibre.

305. — Soit G le centre de gravité du corps et Q son poids : les forces P et Q devant admettre une résultante sont dans un même plan ; de plus ce plan, qui est vertical parce qu'il contient la force Q, doit aussi être perpendiculaire au plan incliné, puisque la résultante doit être normale au plan : donc la force P doit être dans le plan passant par le point G perpendiculaire à l'horizontale du plan incliné.

Nous prenons ce plan pour plan de la figure 165 : soit AB la ligne de plus grande pente du plan incliné qui fait l'angle donné α avec l'horizon, et soit θ l'angle que la puissance fait avec BA.

Nous traçons par le point O une parallèle XX′ à AB et une normale YY′ au plan, puis nous décomposons les forces P et Q suivant ces deux directions : les quatre composantes devant avoir même résultante que les forces P et Q, il est nécessaire, pour que cette résultante soit normale au plan, que les composantes suivant XX′ aient une somme nulle, d'où :

$$P \cos\theta = Q \sin\alpha. \qquad (1)$$

En second lieu, la résultante qui est dès lors dirigée suivant YY′ doit agir dans le sens OY′, c'est-à-dire que l'on doit encore avoir :

$$P \sin \theta < Q \cos \alpha. \qquad (2)$$

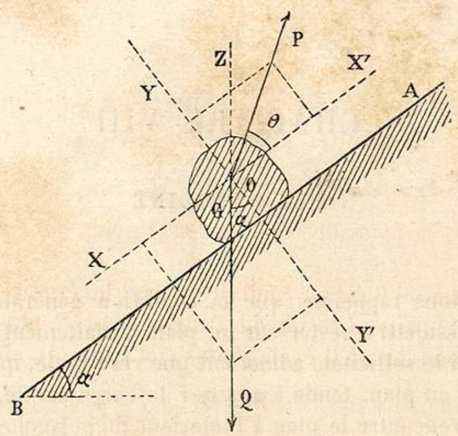

Fig. 165.

Il est évident que cette condition (2) sera toujours satisfaite quand la force P aura une direction située au-dessous de XX′; dans tout autre cas cette inégalité complète avec (1) la condition d'équilibre. Pour l'interpréter géométriquement, nous en tirons l'inégalité équivalente :

$$\frac{\sin \theta}{\cos \alpha} < \frac{Q}{P},$$

et comme (1) devient :

$$\frac{Q}{P} = \frac{\cos \theta}{\sin \alpha},$$

l'inégalité (2) équivaut à :

$$\frac{\sin \theta}{\cos \alpha} < \frac{\cos \theta}{\sin \alpha},$$

c'est-à-dire encore :

$$\operatorname{tg} \theta < \operatorname{tg} (90^0 - \alpha),$$

et enfin :

$$\theta < 90^0 - \alpha. \qquad (3)$$

Or, l'angle $(90 - \alpha)$ est formé par OX′ avec la verticale OZ; donc la condition (3) signifie que la direction de la puissance n'est pas extérieure à l'angle ZOX′.

306. — Cas particuliers. Le minimum de la puissance, dont la valeur est :

$$P = Q \times \frac{\sin \alpha}{\cos \theta},$$

est atteint lorsque $\cos \theta$ est maximum, c'est-à-dire quand la puissance agit parallèlement au plan incliné; dans ce cas on a :

$$P = Q \sin \alpha;$$

autrement dit, la puissance doit égaler le poids du corps *relatif* au plan incliné.

Le maximum de P est au contraire atteint lorsque $\cos \theta$ a sa plus petite valeur, c'est-à-dire quand l'angle θ est le plus grand possible; c'est donc lorsqu'il égale $(90 - \alpha)$ d'après (3), alors :

$$P = Q.$$

Effectivement, dans cette hypothèse, la puissance est égale et directement opposée à la résistance.

307. — Pressions sur les points d'appui. La charge du plan, au moment de l'équilibre, est :

$$R = Q \cos \alpha - P \sin \theta,$$

ou :

$$R = Q \cos \alpha - Q \frac{\sin \alpha \sin \theta}{\cos \theta},$$

et enfin :

$$R = \frac{Q \cos (\alpha + \theta)}{\cos \theta}.$$

Cette réaction est nulle au moment où la puissance atteint son maximum, car dans ce cas :

$$\alpha + \theta = 90^0.$$

308. — Si l'on veut calculer les pressions aux points d'appui, nous ferons remarquer que la question a été résolue quand il y a trois points, et nous avons prouvé que dans le cas d'un plus grand nombre de points le problème est indéterminé.

309. — Système de deux plans inclinés. Supposons deux plans inclinés qui se coupent suivant une horizontale; soit AB et AB′ leurs lignes de plus grande pente faisant avec l'horizon des angles α et α'; deux corps pesants M et M' dont les poids sont Q et Q' reposent sur ces plans (fig. 166) et sont reliés par une corde successivement parallèle aux lignes de pente, et passant sur une poulie de renvoi.

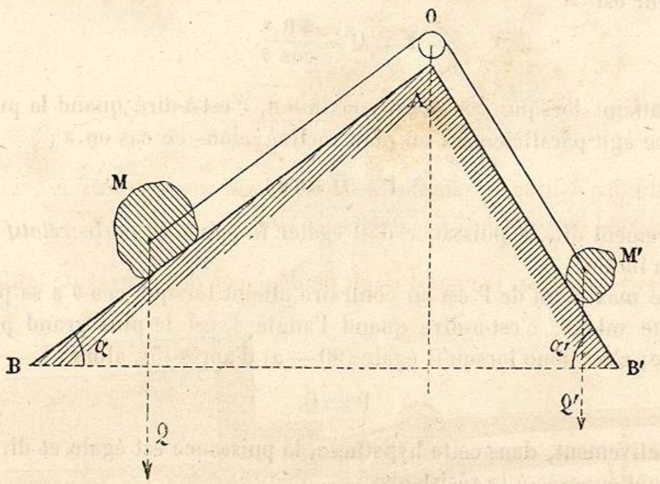

Fig. 166.

Cherchons la condition d'équilibre de ce système. Il faut et il suffit que les composantes des forces de pesanteur parallèles aux plans s'équilibrent par l'action de la corde ; autrement dit, il faut et il suffit que l'on ait :

$$Q \sin \alpha = Q' \sin \alpha'.$$

310. — *Haquet. Supposons un plan incliné (fig. 167) dont AB

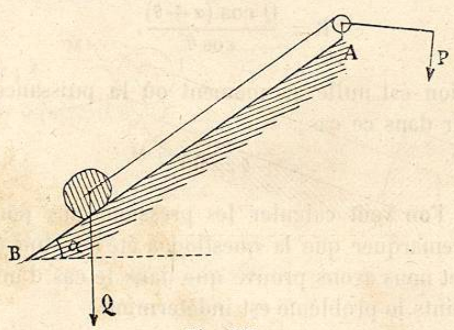

Fig. 167.

est la ligne de plus grande pente, et cherchons à faire remonter le

long de ce plan un corps pesant dont le poids est Q ; à cet effet, plaçons un treuil à la partie supérieure, dont le rayon de l'arbre est r et la longueur de la manivelle R ; en représentant par P la puissance nécessaire pour équilibrer le poids du fardeau, nous avons :

$$Qr \sin \alpha = PR,$$

d'où :

$$P = Q \times \frac{r \sin \alpha}{R}.$$

Cette disposition est employée dans les voitures appelées HAQUETS, qui servent au transport des pièces de vin.

311. — Binard. Lorsqu'il s'agit de déplacer des pierres de taille,

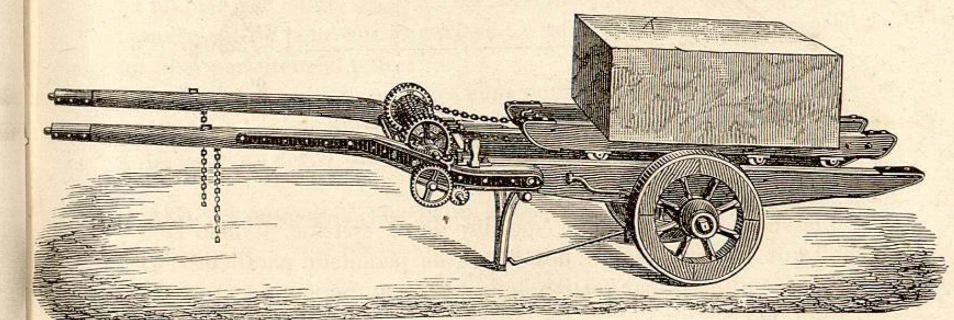

Fig. 168.

on emploie maintenant une machine fondée sur le même principe,

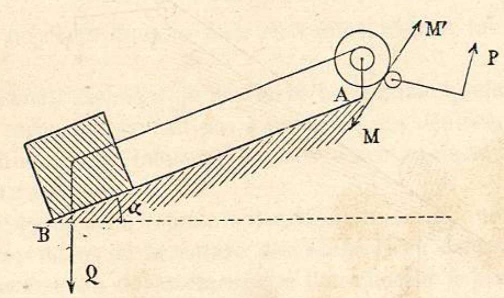

Fig. 169.

appelée BINARD (fig. 168). Seulement, pour augmenter l'action de la puissance, on emploie un treuil à roues dentées ; l'équilibre exige que l'on ait la relation (fig. 169) :

$$Qr \sin \alpha = MR,$$
$$M'r' = PR',$$

d'où :

$$P = Q \times \frac{rr' \sin \alpha}{RR'}.$$

*CHAPITRE IX

NOTIONS SUR LE FROTTEMENT

312. — Dans toutes les questions précédentes nous avons admis qu'un plan sur lequel est placé un point matériel ne s'oppose à aucun mouvement du point sur sa surface : c'est ce que nous avons appelé un plan parfaitement poli.

Or il n'en est jamais ainsi, et nous nous proposons d'étudier sommairement le phénomène physique qui se produit lorsqu'on cherche à déplacer un corps sur une surface naturelle.

313. — Supposons une table horizontale (fig. 170) sur laquelle

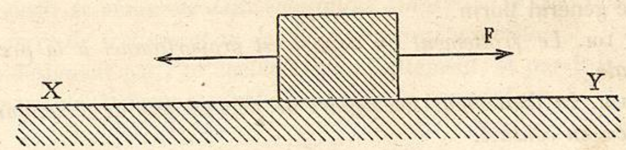

Fig. 170.

est placé un corps dont la face en contact avec la table est aussi plane.

On reconnaît aisément qu'une force horizontale quelconque sollicitant le corps ne parvient pas à produire son déplacement; il y a un minimum pour l'intensité de cette force au-dessous duquel le corps reste au repos.

Tout se passe donc comme s'il existait une certaine force horizontale dépendant de la nature des surfaces en contact et dirigée en sens inverse du déplacement que l'on cherche à produire ; c'est ce que nous appellerons *la force de frottement ;* cette force a précisément même intensité que la force F au moment où celle-ci, supposée croissante à partir de zéro, produit le déplacement.

314. — Considérons aussi un corps pesant placé sur un plan d'abord horizontal AB (fig. 171), mais mobile autour d'une horizontale représentée ici par sa projection en A.

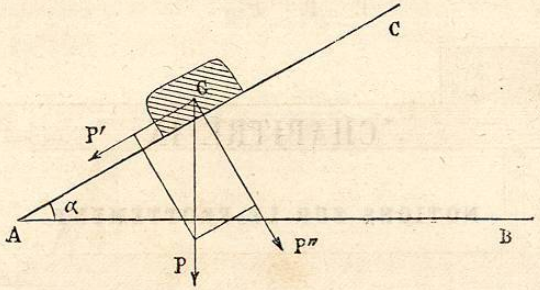

Fig. 171.

Si nous faisons tourner ce plan d'une façon continue, le déplacement du corps ne se produira que pour une certaine inclinaison α : au moment même où le mouvement va se produire, la composante $P \sin \alpha$ du poids du corps est la seule force qui le sollicite à descendre. La force de frottement a donc pour mesure $P \sin \alpha$.

315. — Lois du frottement au départ. C'est Amontons qui a indiqué ces lois; elles ont été depuis vérifiées par Coulomb et enfin par le général Morin.

1re LOI. *Le frottement au départ est proportionnel à la pression normale.*

2e LOI. *Le frottement au départ ne dépend pas de l'étendue des surfaces en contact.*

Nous indiquerons seulement le procédé employé par Coulomb pour vérifier ces lois.

Il employait une sorte de table formée de deux madriers parallèles (fig. 172) et juxtaposés, sur la face supérieure desquels il plaçait une lame de la substance sur laquelle le corps devait frotter ; une caisse sous le fond de laquelle il fixait une lame d'une autre substance reposait sur les madriers ; un fil attaché à la caisse et passant sur une poulie fixe portait à l'autre extrémité un plateau.

Pour vérifier la première loi, il plaçait un poids dans la caisse et déposait avec précaution des poids marqués sur le plateau jusqu'au moment où le mouvement de la caisse se produisait; puis il recommençait l'expérience en changeant le poids placé dans la caisse.

Soient p, p', p'', ... les poids minima déterminant le mouvement

(y compris le poids du plateau), et P, P′, P″, ... les poids de la caisse dans ces circonstances; il vérifia que l'on avait la suite de rapports égaux :

$$\frac{p}{P} = \frac{p'}{P'} = \frac{p''}{P''} = \ldots..$$

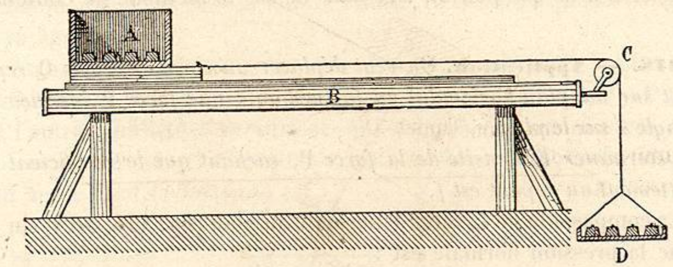

Fig. 172.

Or, les poids P, P′, P″ .... mesurent la pression normale, et p, p', p'' mesurent la force de frottement. Donc la première loi était vérifiée.

Pour vérifier la seconde loi, il faisait varier l'étendue de la lame appliquée au fond de la caisse et vérifiait que la force de frottement, pour une même pression normale, avait la même valeur.

316. — Coefficient de frottement. *On appelle* COEFFICIENT DE FROTTEMENT AU DÉPART *de deux substances données, le rapport constant de la force de frottement au départ à la pression normale.*

En désignant par f le coefficient de frottement, et par P la pression normale, la force de frottement a donc pour valeur :

$$f \times P.$$

Si nous reprenons l'expérience du plan d'inclinaison variable (314), nous voyons qu'elle peut fournir une valeur approchée du coefficient de frottement; en effet, en mesurant l'angle α maximum pour que le déplacement du corps ne se produise pas, nous avons trouvé que la force de frottement était :

$$P \sin \alpha.$$

Or la pression normale est dans ce cas ($P \cos \alpha$), donc :

$$f = \operatorname{tg} \alpha.$$

317. — REMARQUE. Nous ne nous occupons que du frottement au départ ; il faut se garder de croire que la force de frottement est la même au départ ou pendant le mouvement : généralement le frottement pendant le mouvement est moindre, et, pour les vitesses ordinaires, il ne dépend pas de cette vitesse.

L'étude de cette dernière question a été faite par le général Morin à l'aide d'appareils à indications graphiques, bien supérieurs comme précision à ce que pouvait être dans ce cas la méthode de Coulomb.

318. — Application. *On veut déplacer un corps de poids Q reposant sur un plan horizontal en faisant agir une force P inclinée de l'angle α sur le plan.*

Déterminer l'intensité de la force P, sachant que le coefficient de frottement au départ est f.

La composante de la force P normale au plan (fig. 173) est $P \sin \alpha$; donc la pression normale est :

$$Q - P \sin \alpha.$$

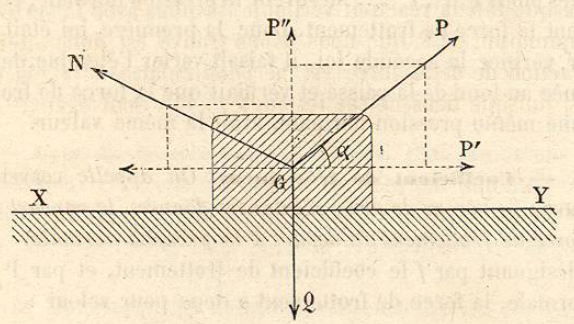

Fig. 173.

Or, au moment du départ la force de frottement qui est opposée à la composante P' a pour valeur :

$$f\,(Q - P \sin \alpha);$$

donc à ce moment on devra avoir :

$$P \cos \alpha = f\,(Q - P \sin \alpha);$$

d'où :

$$P = \frac{fQ}{\cos \alpha + f \sin \alpha}.$$

Si nous remplaçons f par $\operatorname{tg} \varphi$, nous aurons la valeur :

$$P = \frac{Q \sin \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)}.$$

Nous voyons que la valeur minimum de la force cherchée sera atteinte quand $\cos (\alpha - \varphi)$ vaudra l'unité, c'est-à-dire quand l'angle α sera égal à φ.

Au moment où le corps va se mettre en mouvement, le plan peut être remplacé par deux forces, l'une normale égale à $(Q - P \sin \alpha)$ et l'autre parallèle à sa surface qui est $f(Q - P \sin \alpha)$; ces deux forces admettent une résultante qui fait avec la normale au plan un angle dont la tangente est :

$$\frac{f\,(Q - P \sin \alpha)}{Q - P \sin \alpha} \quad \text{ou : } f.$$

L'angle auxiliaire φ, que nous avons employé, n'est autre chose que l'angle que fait la réaction véritable du plan avec la verticale.

Le minimum de P que nous avons trouvé est donc atteint quand la direction de cette force est perpendiculaire à la réaction oblique N, puisque dans ce cas les angles α et φ sont égaux.

CHAPITRE X

EXERCICES PROPOSÉS SUR LE LIVRE II

1. — On peut généralement réduire toutes les forces qui sollicitent un corps à deux forces rectangulaires dont l'une passe par un point donné.

2. — On peut toujours réduire toutes les forces qui sollicitent un corps à une force et un couple, de sorte que la force soit perpendiculaire au plan du couple.

3. — On peut toujours réduire toutes les forces qui sollicitent un corps à deux forces faisant entre elles un angle donné, et cela d'une infinité de manières.

4. — Quelle est la condition d'équilibre de forces appliquées aux extrémités d'une barre rigide?

5. — Condition de l'équilibre d'une barre rigide libre sollicitée par des forces quelconques.

6. — Condition d'équilibre d'une barre rigide mobile autour d'un de ses points et sollicitée par des forces quelconques.

7. — Un cordon passe sur deux poulies de renvoi A et B et ses extrémités sont sollicitées par des poids connus P et P'; un anneau dans lequel passe le cordon est sollicité par le poids Q, on demande de déterminer la position de cet anneau au moment de l'équilibre.

8. — Un levier coudé OAB formé de deux barres rigides OA, AB pesantes et homogènes, assemblées à angle droit, est suspendu en O ; il est sollicité en B par une force horizontale dont on demande l'intensité, sachant qu'elle maintient le levier en équilibre lorsque OA fait l'angle θ avec la verticale. Les longueurs des barres sont $2a$ et $2b$, et leurs poids sont p et p'.

9. — Si, perpendiculairement aux milieux des côtés d'un triangles on applique dans le plan de cette figure des forces proportionnelles aux longueurs de ces côtés, et dirigées toutes du dedans au dehors ou inversement, il y aura équilibre.

Généraliser ce théorème en considérant un polygone plan quelconque, et pour cela prouver que si la propriété est vraie pour un polygone de n côtés, elle est aussi vraie pour un polygone de $(n+1)$ côtés.

10. — Plus généralement, si l'on considère des forces perpendiculaires aux côtés d'une ligne brisée et dont les intensités sont les côtés eux-mêmes, leur résultante sera perpendiculaire à la droite qui ferme le contour et aura pour intensité cette longueur.

Si les points d'application des composantes sont les milieux des côtés, il en sera de même pour la résultante.

11. — Un triangle libre, sollicité par trois forces égales appliquées à ses sommets, étant en équilibre, déterminer les directions de ces forces.

12. — Une barre rigide pesante s'appuie par ses deux extrémités sur une circonférence donnée de position : construire la position d'équilibre.

13. — Une barre rigide pesante s'appuie contre un mur vertical, et contre un obstacle placé sur le plan horizontal : calculer la composante horizontale de la pression supportée par cet obstacle.

14. — Une barre rigide pesante s'appuie contre un mur incliné à 60° et sur un plan horizontal : au moment de l'équilibre, la barre faisant un angle de 30° avec l'horizon est sollicitée par une force horizontale que l'on demande de calculer.

15. — On considère un cylindre oblique à base circulaire pesant, placé par sa base sur un plan horizontal : la génératrice faisant un angle donné α avec ce plan, calculer la limite de la hauteur que l'on peut donner à ce solide pour qu'il reste en équilibre dans la position indiquée.

16. — Même question pour un cône oblique à base circulaire dans lequel on donne l'angle que fait avec le plan horizontal la droite qui joint le sommet au centre de la base.

17. — Quelles sont les positions d'équilibre stable et instable d'un cône oblique à base circulaire pesant, placé sur un plan horizontal auquel il est tangent?

18. — Une lame circulaire homogène était suspendue par son centre, placer trois points matériels pesants sur la circonférence, de sorte que la lame soit horizontale.

19. — Deux points matériels pesants assujettis à se déplacer sur une circonférence verticale sont reliés entre eux par un cordon de longueur donnée qui s'enroule sur la circonférence : déterminer la position d'équilibre.

20. — Deux points matériels A et B, dont les poids sont P et Q, sont liés entre eux et à deux points fixes a et b par des cordons : on suppose que les cordons étant tendus il y ait équilibre, et l'on propose de prouver que si l'on prend les points C et D où les directions aA et bB rencontrent Q et P, on a la proportion :

$$\frac{P}{Q}=\frac{BC}{AD}.$$

21. — Une barre rigide pesante est sollicitée à ses extrémités par des poids donnés : un cordon fixé aux extrémités de cette barre peut glisser en un point fixe. Déterminer la position d'équilibre du système.

22. — Une lame pesante qui a la forme d'un triangle rectangle ABC est suspendue par l'extrémité C de l'hypoténuse : trouver au moment de l'équilibre l'inclinaison du côté AC sur la verticale.

23. — Démontrer que des forces perpendiculaires aux forces d'un tétraèdre aux centres de gravité de ces forces et proportionnelles à leurs aires sont en équilibre.

Généraliser cette propriété.

24. — On considère trois sphères $O_1 O_2 O_3$ de rayons $r_1 r_2 r_3$ et de poids $p_1 p_2 p_3$; on place ces sphères dans une coupe hémisphérique, et l'on demande de déterminer la position d'équilibre du système.

25. — Une lame pesante ayant la forme d'un triangle isocèle dont les éléments sont donnés est placée dans une coupe hémisphérique de rayon R; déterminer la position d'équilibre.

26. — On considère une barre pesante AOB mobile autour de son milieu O ; une deuxième barre pesante CD est mobile autour de son extrémité C, qui est située sur la verticale du point O, à une distance de ce point égale à OA : la seconde extrémité D s'appuie sur la portion OA de la première barre, et l'extrémité B de cette dernière est sollicitée par un poids connu. Déterminer l'équilibre du système.

27. — On considère une barre rigide non pesante OAM, mobile autour du point O : on veut maintenir cette barre horizontale en la chargeant d'un poids P appliqué en A, et en faisant agir sur l'extrémité M une force Q dont la direction passe par un point B donné sur la verticale du point A.

1° On donne OA, OM et AB, calculer la force Q.

2° Quelle est la longueur minimum qu'il faut donner à OM pour que la force Q ait la plus petite valeur possible?

28. — On considère trois points A, B, C placés sur une même horizontale : une corde a ses extrémités fixées en A et C, et passe en B sur une poulie fixe (de dimensions négligeables); cette corde passe dans deux anneaux D, E auxquels sont appliqués des poids donnés, de sorte que dans l'équilibre la figure formée par le cordon se compose des triangles isocèles ADB, BEC. On demande de déterminer le rapport des poids considérés, de sorte que l'équilibre ait lieu quand les deux portions ADB, BEC de la corde ont des longueurs $2l$ et $2l'$ données. On donne $AB=a$, $BC=b$.

29. — Une barre pesante AB a 10^{m} de longueur : on demande de calculer son poids, sachant qu'elle est en équilibre quand on la suspend par le point C tel que $AC=4$, et que si l'on charge le point B de 6 kilogrammes, il faudra, pour avoir l'équilibre, suspendre la barre par le point D tel que $AD=6$.

30. — Un levier coudé à 135° est formé de deux barres homogènes rigides dont les bras, qui ont pour longueur a et b, pèsent par mètre de longueur π; on applique aux extrémités des poids déterminés P et Q et l'on demande de calculer, lors de l'équilibre, les inclinaisons des deux bras sur l'horizon.

31. — Le *pèse-lettres* est une balance qui se compose essentiellement d'un levier rectiligne AOB dont le point fixe O est le centre de gravité; une tige pesante OC, fixée à angle droit sur AOB, fait corps avec AOB et son extrémité C parcourt un cercle divisé : prouver qu'en suspendant un corps pesant P en A, la tige OC fait avec la verticale, au moment de l'équilibre, un angle dont la tangente est proportionnelle à P : on en conclut aisément la graduation de cet appareil.

32. — On considère une table horizontale supportée par trois pieds verticaux : le centre de gravité G et le poids π de cette table sont donnés; on sait de plus que les pieds peuvent supporter des pressions ayant respectivement pour valeur maximum N, N′, N″.

1° Calculer le poids maximum que peut avoir un corps placé sur cette table dans une position déterminée.

2° Trouver la région où l'on peut placer un corps de poids donné sur cette table sans dépasser la limite de résistance des pieds.

33. — Une voiture à deux roues est traînée par un cheval sur une route plane dont l'inclinaison sur l'horizon est 0,4. Le poids total de la voiture et du chargement est 900 kilogrammes; on sait que lorsque les brancards sont horizontaux, le centre de gravité est sur la verticale qui passe par le milieu de l'essieu et à $1^m,5$ au-dessus de cette ligne, et que la distance de l'essieu à la ligne qui passe par les points d'attache du cheval est $4^m,5$.

1° Calculer le poids supporté par le cheval quand il remonte la rampe, les brancards étant parallèles à la ligne de plus grande pente.

2° Calculer l'effort nécessaire au cheval pour tenir la voiture en équilibre.

3° Calculer les pressions exercées par les roues normalement à la route.

LIVRE III

ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

319. — Définition. *On dit qu'un point est animé d'un* MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME *lorsqu'il parcourt des espaces égaux en des temps égaux, quels que soient ces temps.*

Si donc nous représentons par e l'espace parcouru depuis l'instant où l'on commence à compter le temps jusqu'à l'époque t, on aura :

$$e = bt,$$

en représentant par b la quantité constante qui est le chemin parcouru pendant l'unité de temps.

Si l'espace parcouru est a à l'origine du temps, l'espace e parcouru au temps t sera donné par la formule :

$$e = a + bt.$$

320. — Équation du mouvement. La relation que nous venons de trouver et qui lie le chemin parcouru au temps employé à le parcourir s'appelle l'*équation du mouvement:* il est clair que le mouvement est complètement déterminé quand on connait cette relation. Quand le mouvement est uniforme, cette équation est du premier degré en e et t et réciproquement.

Le coefficient a représente l'espace parcouru au temps zéro, c'est-à-dire l'*espace initial*.