portionnelle à P : on en conclut aisément la graduation de cet appareil.

32. — On considère une table horizontale supportée par trois pieds verticaux : le centre de gravité G et le poids π de cette table sont donnés ; on sait de plus que les pieds peuvent supporter des pressions ayant respectivement pour valeur maximum N, N′, N″.

1° Calculer le poids maximum que peut avoir un corps placé sur cette table dans une position déterminée.

2° Trouver la région où l'on peut placer un corps de poids donné sur cette table sans dépasser la limite de résistance des pieds.

33. — Une voiture à deux roues est traînée par un cheval sur une route plane dont l'inclinaison sur l'horizon est 0,4. Le poids total de la voiture et du chargement est 900 kilogrammes ; on sait que lorsque les brancards sont horizontaux, le centre de gravité est sur la verticale qui passe par le milieu de l'essieu et à $1^m,5$ au-dessus de cette ligne, et que la distance de l'essieu à la ligne qui passe par les points d'attache du cheval est $4^m,5$.

1° Calculer le poids supporté par le cheval quand il remonte la rampe, les brancards étant parallèles à la ligne de plus grande pente.

2° Calculer l'effort nécessaire au cheval pour tenir la voiture en équilibre.

3° Calculer les pressions exercées par les roues normalement à la route.

LIVRE III

ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

319. — Définition. *On dit qu'un point est animé d'un* MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME *lorsqu'il parcourt des espaces égaux en des temps égaux, quels que soient ces temps.*

Si donc nous représentons par e l'espace parcouru depuis l'instant où l'on commence à compter le temps jusqu'à l'époque t, on aura :

$$e = bt,$$

en représentant par b la quantité constante qui est le chemin parcouru pendant l'unité de temps.

Si l'espace parcouru est a à l'origine du temps, l'espace e parcouru au temps t sera donné par la formule :

$$e = a + bt.$$

320. — Équation du mouvement. La relation que nous venons de trouver et qui lie le chemin parcouru au temps employé à le parcourir s'appelle l'*équation du mouvement :* il est clair que le mouvement est complètement déterminé quand on connaît cette relation. Quand le mouvement est uniforme, cette équation est du premier degré en e et t et réciproquement.

Le coefficient a représente l'espace parcouru au temps zéro, c'est-à-dire l'*espace initial.*

321. — Vitesse. La constante b est la *vitesse*.

On appelle donc VITESSE *d'un mouvement rectiligne uniforme l'espace parcouru pendant l'unité de temps.*

En désignant par V la vitesse et par e_0 l'espace initial, l'équation générale du mouvement rectiligne uniforme est donc :

$$e = e_0 + Vt.$$

322. — Remarque I. Il résulte de la relation précédente que *dans un mouvement uniforme les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.*

Si nous représentons, en effet, par h et h' des durées quelconques, comptées à partir des époques t et t' du mouvement, les espaces parcourus e, e' pendant ces intervalles seront donnés par les formules :

$$e = a + b\,(t + h) - (a + bt) = bh,$$
$$e' = a + b\,(t' + h') - (a + bt') = bh',$$

d'où enfin :

$$\frac{e}{e'} = \frac{h}{h'}.$$

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que *si dans un mouvement rectiligne les espaces parcourus sont toujours proportionnels aux temps employés à les parcourir, ce mouvement est uniforme* : il en résulte, en effet, que les espaces parcourus pendant des temps égaux sont égaux, ce qui est la définition du mouvement uniforme.

323. — Remarque II. De ce que nous venons de dire il faut conclure que *la vitesse d'un mouvement uniforme est le quotient de l'espace parcouru pendant le temps employé à le parcourir.*

324. — * Tracé géométrique représentant la loi du mouvement. Figurons deux axes, par exemple rectangulaires (fig. 174), et comptons sur OX le temps à l'aide d'une unité convenue; comptons sur OY l'espace parcouru : nous obtiendrons ainsi des points M, M′M″… du plan dont les coordonnées seront déterminées par le mouvement uniforme que nous considérons : traçons la ligne qui passe par tous ces points, et nous aurons la représentation graphique de la fonction qui lie l'espace au temps.

Dans le cas de mouvement uniforme, cette ligne représentative est une droite; soit, en effet, le mouvement dont la loi est :

$$e = a + bt,$$

et soit :

$$OP = t, \qquad OP' = t', \qquad OP'' = t'',$$

puis :

$$MP = e, \qquad M'P' = e', \qquad M''P'' = e''$$

les espaces parcourus correspondant à ces temps ; nous aurons :

$$e = a + bt,$$
$$e' = a + bt',$$
$$e'' = a + bt'',$$

d'où :

$$\frac{e' - e}{t' - t} = \frac{e'' - e}{t'' - t}. \qquad (1)$$

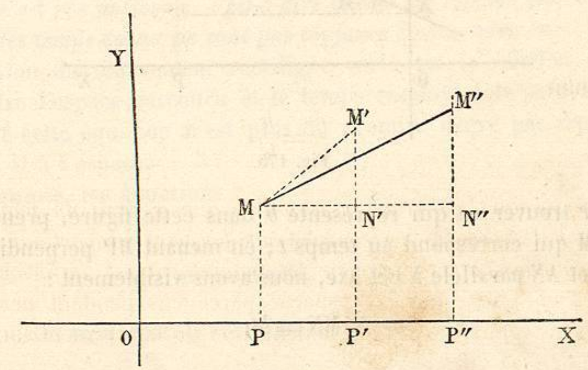

Fig. 174.

Or, si nous menons MN′N″ parallèle à OX, nous obtiendrons :

$$M'N' = e' - e, \qquad M''N'' = e'' - e,$$
$$MN' = t' - t, \qquad MN'' = t'' - t,$$

et, par suite, la relation (1) donne :

$$\frac{M'N'}{M''N''} = \frac{MN'}{MN''}.$$

Donc les triangles MM′N′ et MM″N″ sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Il en faut conclure que les droites MM′ et MM″ se confondent, c'est-à-dire que trois quelconques des points de la ligne considérée sont en ligne droite : cette ligne est donc une droite.

Soit alors (fig. 175) la droite AZ représentant la loi du mouvement uniforme que nous considérons :

$$e = a + bt.$$

Nous voyons que l'ordonnée à l'origine OA représente l'espace initial a.

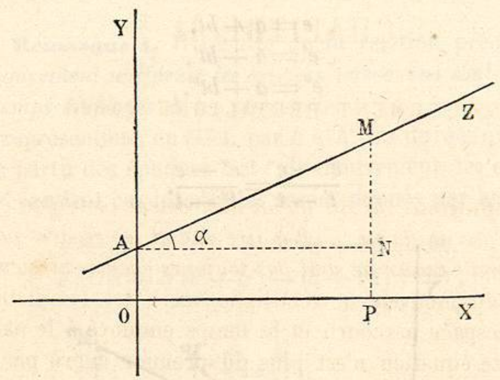

Fig. 175.

Pour trouver ce qui représente b dans cette figure, prenons un point M qui correspond au temps t ; en menant MP perpendiculaire à OX, et AN parallèle à cet axe, nous avons visiblement :

$$MN = bt,$$

ou :

$$MN = b \times AN;$$

donc b est la tangente trigonométrique de l'angle que fait AM avec OX; c'est ce qu'on appelle le *coefficient angulaire* de la droite AZ.

Ainsi, dans la ligne droite figurative de la loi d'un mouvement uniforme, la vitesse est représentée par le coefficient angulaire de cette ligne. La vitesse est d'autant plus grande que l'angle α est plus grand.

CHAPITRE II

MOUVEMENT RECTILIGNE VARIÉ

325. — Définition. *On dit qu'un mouvement rectiligne est* VARIÉ *quand il n'est pas uniforme, c'est-à-dire quand les espaces parcourus pendant des temps égaux ne sont pas toujours égaux entre eux.*

L'équation du mouvement rectiligne varié est la relation constante entre l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir; seulement cette équation n'est plus du premier degré par rapport au temps et à l'espace.

Par exemple, les équations :

$$e = at^2 + bt + c,$$
$$e = a \sin bt,$$

définissent des mouvements rectilignes variés.

326. — Vitesse moyenne pendant un intervalle de temps donné.

Soit OX (fig. 176) la droite suivant laquelle se déplace le point

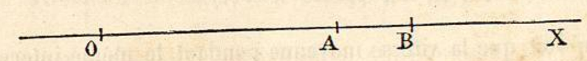

Fig. 176.

mobile; il est au point O à l'origine du temps, se trouve en A au temps t et en B au temps $t + h$.

$K = AB$ est donc l'accroissement de l'espace parcouru qui correspond à l'accroissement h pris par le temps t.

On appelle VITESSE MOYENNE *pendant l'intervalle h qui succède à l'instant t, le rapport de l'espace parcouru pendant cet intervalle au temps h.*

Ainsi, la vitesse moyenne dans les hypothèses précédentes est :

$$\frac{AB}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{K}{h}.$$

Il faut remarquer que cette vitesse moyenne est la vitesse du mouvement uniforme que l'on substituerait au mouvement varié à l'instant t, si l'on voulait que le mobile se trouvât encore au point B à la fin de l'intervalle h, car cette vitesse est le rapport du chemin AB au temps h employé à le parcourir.

D'ailleurs, la vitesse moyenne pendant l'intervalle h dépend en général du temps à partir duquel on compte cet intervalle :

Ainsi, en cherchant la vitesse moyenne pendant l'intervalle $0^s,1$ après 1^s, 2^s, 3^s, ..., on ne trouvera pas généralement le même nombre.

327. — *Exemple.* Soit le mouvement rectiligne varié dont la loi est :

$$e = 3t^2 - 2t + 1.$$

La vitesse moyenne pendant l'intervalle h qui succède à l'instant t a pour expression générale :

$$\frac{k}{h} = \frac{\left[3(t+h)^2 - 2(t+h) + 1\right] - \left[3t^2 - 2t + 1\right]}{h},$$

car le numérateur étant la différence des espaces parcourus pendant les temps t et $(t+h)$, est bien l'accroissement de l'espace qui correspond à l'accroissement h du temps ; or, ce résultat devient visiblement :

$$\frac{k}{h} = 3h + 6t - 2,$$

d'où l'on voit que la vitesse moyenne pendant le même intervalle h va en croissant quand t croît.

Ainsi, en faisant $h = 0^s,1$ et donnant à t les valeurs 1^s, 2^s, 3^s... nous obtenons pour la vitesse moyenne les nombres :

4,3 10,3 16,3 .....

328. — VITESSE A UN INSTANT QUELCONQUE.

On appelle VITESSE A UN INSTANT DONNÉ t, *dans un mouvement rectiligne varié, la limite vers laquelle tend la vitesse moyenne comptée à partir de ce temps pendant un intervalle h, quand h tend vers zéro.*

Ainsi, en représentant par k l'accroissement de l'espace parcouru correspondant à l'accroissement h donné au temps t, on a par définition :

$$V = \lim \left(\frac{k}{h}\right) \text{ quand } h \text{ tend vers zéro.}$$

(Cette limite s'appelle aussi la *dérivée de l'espace parcouru par rapport au temps.*)

329. — Exemple I. Soit le mouvement rectiligne dont la loi du mouvement est :

$$e = 3t^2 - 2t + 1.$$

Nous avons trouvé (327) pour la vitesse moyenne, pendant l'intervalle h qui succède à l'instant t, l'expression :

$$\frac{k}{h} = 3h + 6t - 2.$$

Prenons la limite vers laquelle tend cette vitesse moyenne quand h tend vers zéro, et nous obtiendrons l'expression :

$$V = 6t - 2,$$

pour la vitesse à l'instant t.

330. — Exemple II. Soit plus généralement le cas où la loi du mouvement rectiligne varié est donnée par l'équation :

$$e = a + bt + ct^2.$$

Calculons d'abord l'accroissement K de l'espace, quand le temps reçoit l'accroissement h :

$$K = \left[a + b(t+h) + c(t+h)^2\right] - (a + bt + ct^2),$$

ou, en réduisant :

$$K = bh + 2cth + ch^2,$$

la vitesse moyenne a donc pour expression :

$$\frac{K}{h} = b + 2ct + ch,$$

et, en faisant tendre h vers zéro, nous en tirons :

$$V = \lim \left(\frac{K}{h}\right) = b + 2ct.$$

331. — Exemple III. Soit encore le mouvement rectiligne défini par l'équation :

$$e = a \sin \alpha t + b \cos \beta t,$$

dans laquelle a, b, α, β, sont des constantes.

L'accroissement K de l'espace, correspondant à l'accroissement h du temps, a pour expression :

$$K = a \sin \alpha\,(t+h) + b \cos \beta\,(t+h) - a \sin \alpha t - b \cos \beta t,$$

et par suite la vitesse moyenne est :

$$\frac{K}{h} = a\,\frac{\sin \alpha\,(t+h) - \sin \alpha t}{h} + b\,\frac{\cos \beta\,(t+h) - \cos \beta t}{h}.$$

Nous en concluons que la vitesse cherchée a pour valeur :

$$V = a \lim\left[\frac{\sin \alpha\,(t+h) - \sin \alpha t}{h}\right] + b \lim\left[\frac{\cos \beta\,(t+h) - \cos \beta t}{h}\right].$$

Pour obtenir ces deux limites, nous écrivons :

$$\frac{\sin \alpha(t+h) - \sin \alpha t}{h} = \frac{2 \sin \frac{\alpha h}{2} \cos \alpha\left(t+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \alpha \times \frac{\sin \frac{\alpha h}{2}}{\frac{\alpha h}{2}} \times \cos \alpha\left(t+\frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{\cos \beta\,(t+h) - \cos \beta t}{h} = \frac{2 \sin\left(-\frac{\beta h}{2}\right) \sin \beta\left(t+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\beta \times \frac{\sin \frac{\beta h}{2}}{\frac{\beta h}{2}} \times \sin \beta\left(t+\frac{h}{2}\right).$$

Remarquant alors que le rapport du sinus à l'arc a pour limite l'unité quand l'arc tend vers zéro, nous obtenons aisément les deux limites :

$$\alpha \cos \alpha t \quad \text{et} \quad -\beta \sin \beta t,$$

d'où enfin :

$$V = a\alpha \cos \alpha t - b\beta \sin \beta t.$$

332. — * Tracé géométrique représentant la loi du mouvement. Nous avons appelé loi ou équation d'un mouvement rectiligne varié la relation constante qui existe entre l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir. Cette relation peut être absolument quelconque, et nous la supposons mise sous la forme :

$$e = \varphi(t), \tag{1}$$

la lettre φ représentant une suite quelconque d'opérations à effectuer sur la lettre t pour obtenir l'espace.

Pour représenter graphiquement cette loi du mouvement, nous traçons deux axes OX, OY (fig. 177) par exemple rectangulaires ; nous

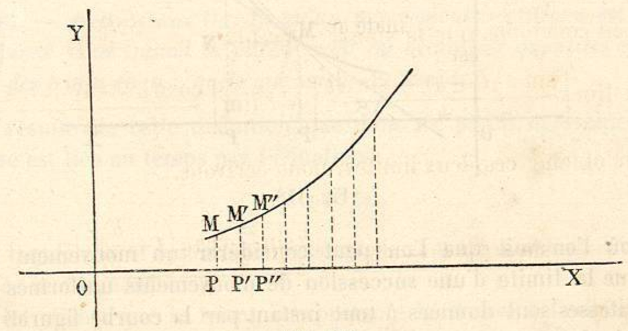

Fig. 177.

portons alors à partir du point O sur OX le temps compté positivement dans le sens OX et négativement en sens inverse, et nous portons sur OY les valeurs correspondantes de l'espace, fournies par l'équation (1) : en donnant au temps des valeurs très peu différentes et très nombreuses, nous obtiendrons ainsi des points M, M', M'', ..., que nous joindrons par un trait continu, et la ligne ainsi obtenue représentera la liaison entre e et t qui est exprimée par l'équation (1).

333. — Il est aisé de déduire de ce qui précède la signification géométrique de la vitesse moyenne et de la vitesse à un instant donné.

Soit, en effet (fig. 178), la courbe figurative de la loi du mouvement, et soit $OP = t$ et $PP' = h$: l'espace parcouru pendant l'intervalle h qui suit l'instant t est donc NM', et par suite, la vitesse moyenne pendant cet intervalle qui est, par définition :

$$\frac{M'N}{MN}$$

est la tangente trigonométrique de l'angle que fait la corde MM' avec OX.

Remplacer le mouvement varié pendant l'intervalle h par un mouvement uniforme, sans altérer le chemin parcouru pendant cet intervalle, revient donc à remplacer l'arc de courbe MM' par sa corde.

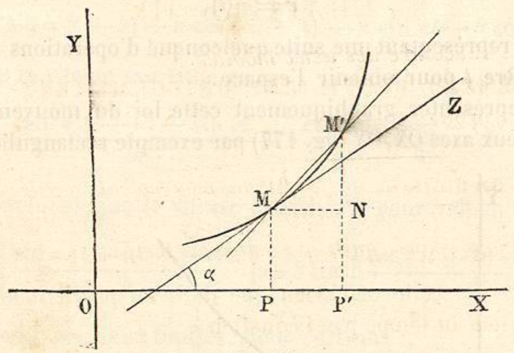

Fig. 178.

D'où l'on voit que l'on peut considérer un mouvement varié comme la limite d'une succession de mouvements uniformes dont les vitesses sont données à tout instant par la courbe figurative et dont la durée tend vers zéro.

334. — Si nous faisons tendre vers zéro l'intervalle PP', c'est-à-dire h, le point M' tend vers la position M, et la corde MM' a pour direction-limite la tangente MZ au point M, par définition. Mais en même temps la vitesse moyenne :

$$\frac{M'N}{MN} = \operatorname{tg} \widehat{M'MN},$$

a pour limite la vitesse V à l'instant OP; cette vitesse est donc la tangente trigonométrique de l'angle α que la tangente en M à la courbe figurative fait avec OX.

Ainsi, lorsqu'on connaît la courbe qui représente la loi d'un mouvement, on peut trouver la vitesse à tout instant en traçant la tangente à cette courbe aux points qui ont pour abscisses les temps considérés.

CHAPITRE III

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT VARIÉ

335. — Définition. *On dit qu'un mouvement rectiligne est* UNIFORMÉMENT VARIÉ *quand la vitesse croît ou décroît de quantités égales dans des temps égaux, quels que soient ces temps.*

Il résulte de cette définition que dans un pareil mouvement la vitesse est liée au temps par l'équation :

$$V = a + bt,$$

dans laquelle a et b sont des constantes, et cette équation caractérise ce mouvement.

Il est visible que le terme a représente la vitesse à l'origine du temps, c'est-à-dire la *vitesse initiale*.

336. — ACCÉLÉRATION. *La quantité constante b, dont la vitesse varie dans l'unité de temps, s'appelle* ACCÉLÉRATION *du mouvement uniformément varié.*

D'ailleurs le mouvement est *accéléré* ou *retardé* suivant que l'accélération est positive ou négative.

On représente généralement l'accélération par γ et la vitesse initiale par V_0; la formule précédente s'écrit donc :

$$V = V_0 + \gamma t.$$

337. — ÉQUATION DU MOUVEMENT. La définition précédente nous donne la relation entre la vitesse et le temps; nous devons donc chercher la relation entre l'espace et le temps, c'est-à-dire l'*équation du mouvement*.

On voit, comme au nº 334, que la ligne figurative de la relation entre la vitesse et le temps est une droite : soit AZ (fig. 179), alors $OA = V_0$ et en représentant par OP le temps t, on a :

$$MP = V_0 + \gamma t.$$

On aura de même la vitesse à un instant quelconque OD, dans la longueur DD'. Proposons-nous d'évaluer l'espace parcouru pendant le temps OP, et pour cela cherchons des valeurs approchées de cet espace.

Nous divisons le temps OP en n parties égales ($t = n\theta$) représentées sur la figure par les longueurs OB, BC, CD, ..., FP. : et nous substituons au mouvement varié des mouvements uniformes successifs ayant tous pour durée θ.

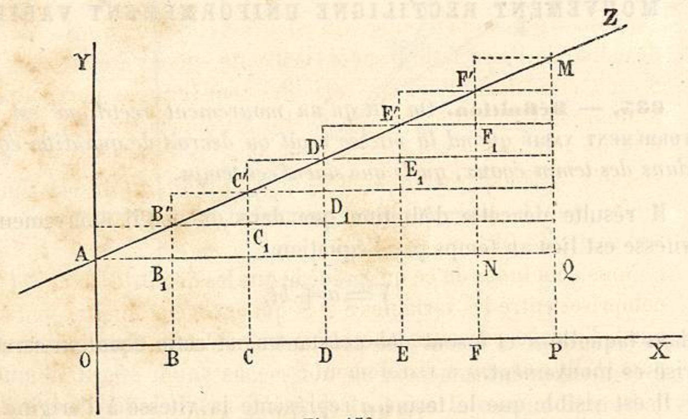

Fig. 179.

En donnant pour vitesse à chacun de ces mouvements la vitesse que possède le mouvement varié au commencement de l'intervalle, nous diminuons l'espace parcouru. Ainsi le premier mouvement qui dure OB aura pour vitesse OA, tandis que dans le mouvement varié cette vitesse part de la valeur OA et va en croissant jusqu'à la valeur BB'; de même, dans le second mouvement uniforme qui dure BC, la vitesse a pour valeur BB', tandis que dans le mouvement varié cette vitesse qui part de la valeur BB' va, dans le même temps, en croissant de BB' à CC', et ainsi de suite.

D'ailleurs il est évident que les espaces parcourus dans ces mouvements uniformes sont représentés par les mesures des aires rectangulaires $OABB_1$, BCC_1B', CDD_1C' .... Si donc on représente par S la somme de ces aires, et par e l'espace parcouru dans le mouvement varié, on aura toujours, quel que soit n :

$$S < e.$$

En second lieu, nous attribuons pour vitesse à chacun des mouvements uniformes la vitesse que possède le mouvement varié à la fin de l'intervalle pendant lequel dure ce mouvement uniforme. Ainsi, les premier, deuxième, troisième, ..., mouvements uniformes ont pour vitesses : BB', CC', DD', ..., quantités supérieures à la vitesse au même instant dans le mouvement varié : donc la somme des espaces parcourus sera certainement supérieure à l'espace que nous cherchons. Si donc nous représentons par S' la somme des aires rectangulaires OBB', BDC', CDD', ..., nous aurons :

$$e < S'.$$

Ainsi, e est compris entre les valeurs S et S' : il en est évidemment de même de l'aire T du trapèze OAMP. Or, quand n croît sans limite, S croît et S' décroît, et ces variables sont limitées parce que S est toujours inférieure à T et que S' lui est supérieure; de plus, il est aisé de voir que ces limites sont égales; la différence (S' — S) est, en effet, égale au rectangle MNQ dont la hauteur MQ est constante, tandis que la base NQ tend vers zéro, puisqu'elle représente la n^{me} partie de OP.

Nous concluons de ce qui précède que les quantités fixes e et T étant comprises entre les variables S et S' qui ont même limite, sont égales : ainsi, l'espace parcouru cherché a même mesure que l'aire du trapèze OAMP; or, on a visiblement :

$$OAMP = OAQP + AMQ,$$

donc :

$$e = V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

C'est l'expression de l'espace parcouru pendant le temps t; si le mobile a parcouru un espace e_0 avant l'origine du temps, il faudra ajouter cette valeur au résultat précédent; on arrive ainsi à l'équation générale du mouvement uniformément varié :

$$e = e_0 + V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

338. — Remarque. Nous avons supposé dans la figure 179 que la vitesse allait constamment en croissant, c'est-à-dire que le mouvement était accéléré : la méthode précédente s'applique aussi dans l'hypothèse contraire.

Supposons le mouvement retardé; l'accélération γ est négative, et en mettant le signe en évidence, la vitesse, à l'instant t, est donnée par l'équation :

$$V = V_0 - \gamma t.$$

Soit alors AZ (fig. 180) la droite qui représente géométriquement la loi de la vitesse : elle rencontre OX au point B, ce qui veut dire qu'au temps représenté par OB la vitesse devient nulle : à partir de cette époque elle est négative, et au temps représenté par OP, cette vitesse a pour valeur absolue la longueur PM. Le chemin parcouru depuis l'instant *zéro* jusqu'au temps OB est la mesure de l'aire du

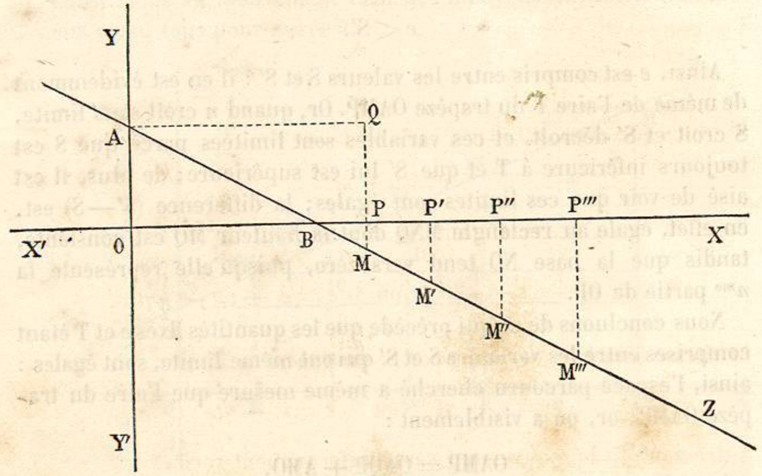

Fig. 180.

triangle OAB ; pour un temps OP supérieur à OB, cet espace est la différence des mesures des triangles OAB, BMP, ou leur somme algébrique, en regardant l'aire BPM comme négative, ce qui est légitime, puisque l'un des facteurs de l'aire devient négatif.

Ainsi, nous aurons l'espace au temps $t = \text{OP}$, en traçant AQ parallèle à OX qui rencontre MP en Q, et en retranchant du rectangle OAQP l'aire du triangle AMQ.

Or,

$$\begin{aligned} \text{OA} &= \text{V}_0 \\ \text{PM} &= \gamma t - \text{V}_0 \\ \text{QM} &= \gamma t - \text{V}_0 + \text{V}_0 ; \end{aligned}$$

donc :

$$e = \text{V}_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

D'où la formule générale de l'espace dans le mouvement retardé :

$$e = e_0 + \text{V}_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Si donc l'on considère γ comme une quantité algébrique, la formule déjà trouvée :

$$e = e_0 + \text{V}_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

est générale.

339. — Réciproque. Nous avons démontré (330) que si la loi de l'espace est de la forme :

$$e = a + bt + ct^2,$$

la loi de la vitesse est donnée par l'équation :

$$v = b + 2ct.$$

Donc, la loi de l'espace étant :

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad \text{ou} \quad e = e_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

la vitesse sera liée au temps par l'équation :

$$v = v_0 + \gamma t \quad \text{ou} \quad v = v_0 - \gamma t.$$

Autrement dit le mouvement sera uniformément varié.

340. — RÉSUMÉ. *Dans un mouvement uniformément varié l'espace parcouru et la vitesse sont liés au temps par les équations :*

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2,$$
$$v = v_0 + \gamma t,$$

et RÉCIPROQUEMENT, *chacune de ces relations implique l'autre, et caractérise le mouvement uniformément varié.*