Or, il résulte de la définition de la longueur d'un arc de courbe que la limite du rapport de cette longueur à la corde qui le sous-tend est l'unité quand cet arc tend vers zéro, donc :

$$\lim\left(\frac{MM'}{h}\right) = \lim\left[\frac{\text{arc } MM'}{h}\right].$$

On peut donc dire :

La vitesse à l'instant t dans un mouvement curviligne est dirigée suivant la tangente à la trajectoire, au point où se trouve le mobile, et elle a pour valeur la limite du rapport de la longueur de l'arc de courbe, décrit pendant l'intervalle h qui succède à l'instant t, à cet intervalle quand h tend vers zéro.

359. — Projection de la vitesse. Si l'on projette le mouvement curviligne sur un axe, la vitesse du mouvement de projection sera la projection de la vitesse sur cet axe, car la projection du chemin parcouru est le chemin parcouru par la projection.

Il en résulte que l'on peut décomposer la vitesse à un instant quelconque suivant trois axes et obtenir des relations analogues à celles que nous avons déjà indiquées.

CHAPITRE VI

COMPOSITION DES MOUVEMENTS

§ I. — MOUVEMENTS RECTILIGNES UNIFORMES.

360. — Définition. Supposons un point matériel parcourant la droite OX d'un mouvement uniforme de vitesse V, et se trouvant en O à l'origine du temps (fig. 187), soit A la position qu'il occupe au temps t; en même temps, imaginons que la droite OX soit animée d'un mouvement de translation (ses points décrivant dans le

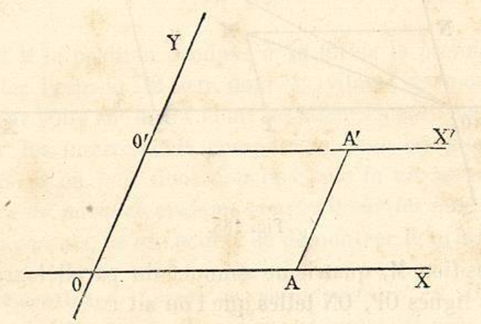

Fig. 187.

même temps des droites égales et parallèles) uniforme de vitesse V', de sorte que le point O de OX, parcourant OY, occupe la position O' au temps t; le point matériel considéré exécutera son mouvement sur OX indépendamment de l'état de repos ou de mouvement de cette ligne, et se trouvera au temps t dans la position A' telle que O'A' soit égale et parallèle à OA.

On dit alors que *le point matériel considéré est animé de deux mouvements* SIMULTANÉS *rectilignes et uniformes*.

Il est facile de concevoir ainsi ce qu'il faut entendre en général par un point matériel animé de plusieurs mouvements simultanés rectilignes uniformes.

Nous nous proposerons de composer ces mouvements, c'est-à-dire de trouver la trajectoire du mobile, et la nature de son mouvement sur cette ligne.

361. — THÉORÈME. *Lorsqu'un point matériel est animé de deux mouvements simultanés rectilignes et uniformes, il prend un mouvement résultant rectiligne et uniforme, et la vitesse de ce mouvement est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses des mouvements composants.*

Soient, en effet, OX, OY (fig. 188) les directions des deux mouvements simultanés de vitesses V et V' : au bout du temps t le point

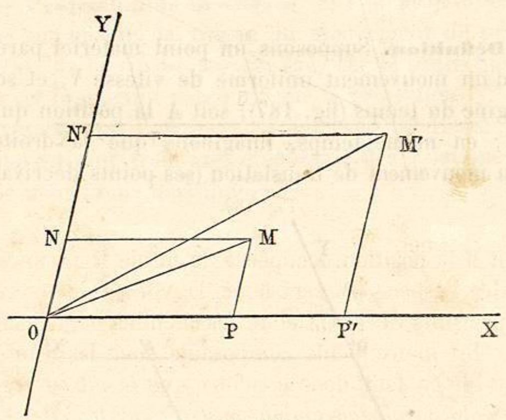

Fig. 188.

occupe la position M, quatrième sommet du parallélogramme construit sur les lignes OP, ON telles que l'on ait :

$$OP = Vt, \qquad ON = V't.$$

Soit, de même, la position M' occupée par le mobile au temps t' ; on aura :

$$OP' = Vt', \qquad ON' = V't'.$$

Il en résulte que les triangles OMP, OM'P' sont semblables, parce qu'ils ont un angle égal ($M\widehat{P}O = M'\widehat{P'}O$) compris entre côtés proportionnels, puisque l'on a :

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{t}{t'}, \qquad \frac{MP}{M'P'} = \frac{ON}{ON'} = \frac{t}{t'}.$$

Donc les angles MOP, M'OP' sont égaux, et les directions OM, OM' se confondent : *le mouvement résultant est donc rectiligne.*

D'ailleurs les mêmes triangles (fig. 189) donnent :

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{t}{t'};$$

donc le mouvement résultant est uniforme, puisque les espaces sont dans le rapport des temps employés à les parcourir.

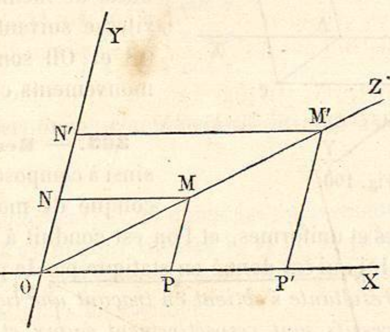

Fig. 189.

Enfin, soit M la position occupée à la fin de la première seconde par le mobile; l'espace OM sera donc la vitesse du mouvement résultant, et par suite OP et ON étant les chemins parcourus dans une seconde par les mouvements composants sont les vitesses de ces mouvements. Il en faut donc conclure que *la vitesse résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses des mouvements composants,* ce qui achève de démontrer le principe énoncé.

362. — Corollaire. *Lorsqu'un point matériel est animé de trois mouvements simultanés rectilignes et uniformes, il prend un mouvement résultant rectiligne et uniforme, et la vitesse de ce mouvement est la diagonale du parallélépipède construit sur les droites qui représentent en grandeur et en direction les vitesses des mouvements composants.*

Soient (fig. 190) OX, OY, OZ les directions des mouvements composants, tels que OA, OB, OD soient les espaces parcourus pendant le temps t dans chacun de ces mouvements.

Par le fait des mouvements suivant OX et OY, le point matériel parcourt la diagonale OC du parallélogramme OACB, et se trouve au temps t en C.

Le troisième mouvement se combine avec celui-ci, en fait parcourir au point matériel la diagonale OE du parallélogramme DOCE; par suite le point vient en E à l'époque t, et parcourt ainsi la diagonale OE du parallélépipède construit sur OA, OB et OD.

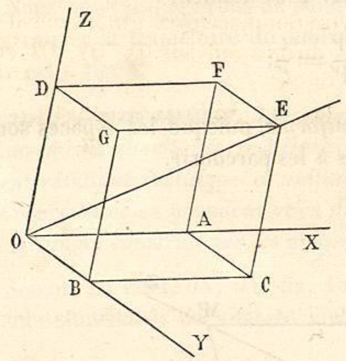

Fig. 190.

D'ailleurs le mouvement suivant OC est uniforme; il en est aussi de même suivant OE, et la vitesse suivant OE est OE, si OA, OB et OD sont les vitesses des mouvements composants.

363. — Remarque. On arrive ainsi à composer un nombre quelconque de mouvements simultanés rectilignes et uniformes, et l'on est conduit à un résultat en tout analogue à celui qui est donné en statique par le polygone des forces.

La vitesse résultante s'obtient en traçant une ligne polygonale dont les côtés successifs sont respectivement égaux et parallèles aux vitesses des mouvements composants, et en fermant le polygone. C'est ce qu'on appelle le POLYGONE DES VITESSES.

364. — *Décomposition d'une vitesse suivant trois axes. Soient les axes rectangulaires OXYZ et la vitesse V représentée en

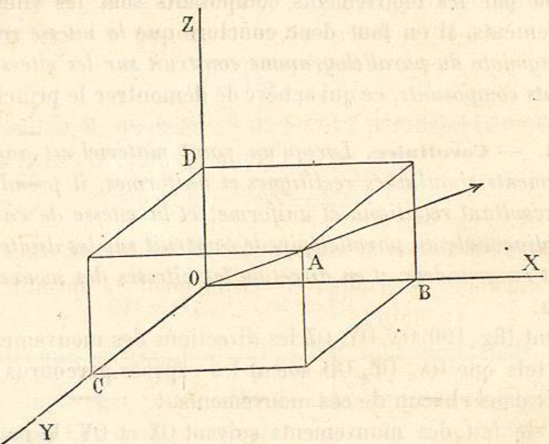

Fig. 191.

grandeur et en direction par OA (fig. 191). On la décompose suivant

les axes en la projetant sur ces lignes; si ces projections sont OB, OC, OD, il est visible que la vitesse V sera la résultante des vitesses OB, OC, OD, c'est-à-dire que le mouvement rectiligne et uniforme suivant OA, de vitesse OA, peut être remplacé par les mouvements simultanés rectilignes et uniformes dirigés suivant OX, OY, OZ et ayant pour vitesses OB, OC, OD.

En représentant par α, β, γ les angles que fait OA avec les axes OX, OY, OZ, nous aurons :

$$(1)\qquad \begin{cases} V_x = V\cos\alpha, \\ V_y = V\cos\beta, \\ V_z = V\cos\gamma, \end{cases}$$

équations qui déterminent complètement les mouvements composants.

365. — *Réciproquement*, si on donne les mouvements composants suivant OX, OY, OZ ayant pour vitesses $V_x\, V_y\, V_z$, la vitesse V du mouvement résultant sera complètement déterminée par les équations (1) qui conduisent d'ailleurs au résultat :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

366. — En général, si nous considérons un point matériel animé de mouvements simultanés rectilignes, dont les vitesses $v, v', v'', \ldots$, font des angles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, ..., avec trois axes rectangulaires, la vitesse w du mouvement résultant faisant avec les mêmes axes les angles λ, μ, ν, satisfera aux équations :

$$w\cos\lambda = v\cos\alpha + v'\cos\alpha' + v''\cos\alpha'' + \ldots = \sum v\cos\alpha,$$

$$w\cos\mu = v\cos\beta + v'\cos\beta' + v''\cos\beta'' + \ldots = \sum v\cos\beta,$$

$$w\cos\nu = v\cos\gamma + v'\cos\gamma' + v''\cos\gamma'' + \ldots = \sum v\cos\gamma.$$

Ces équations détermineront visiblement la quantité w et les angles λ, μ, ν. On aura :

$$w = \sqrt{\left(\sum v\cos\alpha\right)^2 + \left(\sum v\cos\beta\right)^2 + \left(\sum v\cos\gamma\right)^2},$$

$$\cos\lambda = \frac{\sum v\cos\alpha}{w},\quad \cos\mu = \frac{\sum v\cos\beta}{w},\quad \cos\nu = \frac{\sum v\cos\gamma}{w}.$$

367. — On conclut aisément de là les conditions nécessaires et suffisantes du repos du point matériel relatif aux axes considérés :

$$\sum v\cos\alpha = 0,\ \sum v\cos\beta = 0,\ \sum v\cos\gamma = 0.$$

***368. — Projection du mouvement sur trois axes.** Soit un mouvement suivant la droite AM, uniforme, et de vitesse v (fig. 192), et soient trois axes rectangulaires quelconques OX, OY, OZ auxquels on rapporte les positions du mobile.

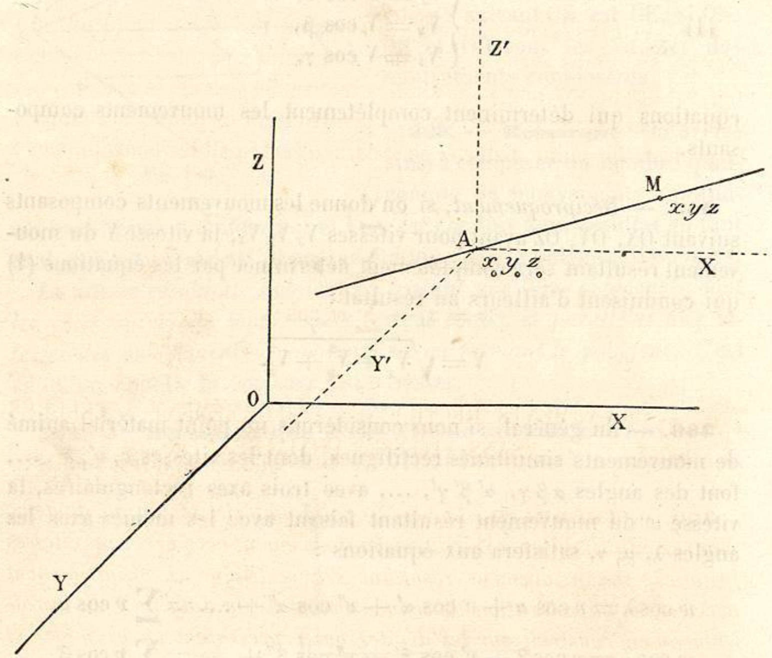

Fig. 192.

Nous pouvons remplacer ce mouvement par trois mouvements simultanés dirigés suivant les axes OX', OY', OZ' parallèles aux premiers et les vitesses de ces mouvements seront :

$$v\cos\alpha,\quad v\cos\beta,\quad v\cos\gamma.$$

Par suite, à une époque t arbitraire, les projections du point mobile sur les axes seront à des distances de l'origine représentées par :

$$x' = vt\cos\alpha,\ y' = vt\cos\beta,\ z' = vt\cos\gamma.$$

Donc, en représentant par $x_0\, y_0\, z_0$ les coordonnées de la position du mobile au temps zéro, on aura au temps t, par rapport aux axes choisis OX, OY, OZ :

$$x = x_0 + vt\cos\alpha,$$
$$y = y_0 + vt\cos\beta,$$
$$z = z_0 + vt\cos\gamma.$$

On pourra donc, par ces relations, obtenir les coordonnées de la position du mobile à une époque quelconque.

369. — Plus généralement, supposons un point matériel qui occupe au temps zéro la position déterminée par les coordonnées $x_0 y_0 z_0$: des mouvements simultanés rectilignes de vitesse $v, v', v'', \ldots$, définies par les angles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, ..., sollicitent ce point : au temps t, la position du point matériel sera caractérisée par les coordonnées :

$$x = x_0 + \sum vt\cos\alpha,$$
$$y = y_0 + \sum vt\cos\beta,$$
$$z = z_0 + \sum vt\cos\gamma.$$

§ II. — MOUVEMENTS RECTILIGNES UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉS SANS VITESSES INITIALES.

370. — THÉORÈME. *Lorsqu'un point matériel est animé de deux mouvements simultanés rectilignes uniformément accélérés sans vitesses initiales, son mouvement résultant est rectiligne et uniformément acceléré, et l'accélération de ce mouvement est la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent en grandeur et en direction les accélérations des mouvements composants.*

Soit le point matériel O (fig. 193) animé d'un mouvement uniformément accéléré suivant OX sans vitesse initiale, et d'accélération γ. En même temps la droite OX est animée d'un mouvement de translation tel que le point O de cette ligne parcourt OY d'un mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale, et dont l'accélération est γ'.

Si la droite OX reste fixe, le point matériel sera en P et P' sur cette ligne aux époques t et t' : mais en même temps la droite s'est déplacée parallèlement à elle-même, de sorte que le point O occupe à ces époques les positions N et N'. Il est clair qu'à ces mêmes époques le mobile sera en M et M', quatrièmes sommets des parallélogrammes construits sur OP, ON et OP', ON' : nous voulons prouver

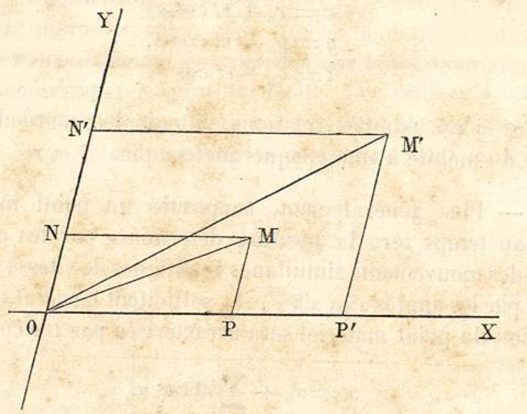

Fig. 193.

d'abord que les points O, M, M' sont en ligne droite, c'est-à-dire que le mouvement résultant est rectiligne. On a en effet :

$$\frac{OP}{OP'}=\frac{t^2}{t'^2} \quad \text{et} \quad \frac{ON}{ON'}=\frac{MP}{M'P'}=\frac{t^2}{t'^2};$$

donc :

$$\frac{OP}{OP'}=\frac{MP}{M'P'},$$

et les triangles OPM, OP'M' sont semblables : donc les directions OM, OM' coïncident.

Le mouvement résultant qui est donc rectiligne est aussi uniformément accéléré, car les triangles semblables OMP, OM'P' (fig. 194) donnent :

$$\frac{OM}{OM'}=\frac{OP}{OP'}=\frac{t^2}{t'^2};$$

donc les espaces décrits dans le mouvement résultant sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir, ce qui caractérise le mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale.

Enfin, des relations :

$$OP=\frac{1}{2}\gamma t^2,$$

$$ON=\frac{1}{2}\gamma' t^2;$$

nous déduisons, si $t=1$:

$$\gamma=2OP, \quad \gamma'=2ON.$$

Dans cette hypothèse ($t=1$) OM est donc l'espace parcouru pendant la première seconde dans le mouvement résultant, c'est-à-dire que OM est la moitié de l'accélération de ce mouvement. Or OM est la

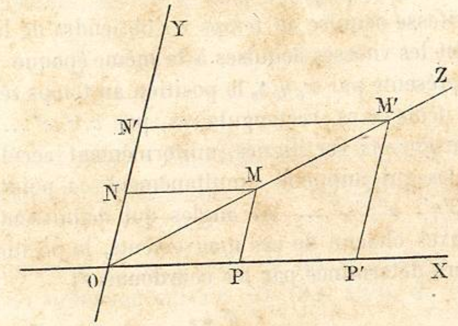

Fig. 194.

diagonale du parallélogramme construit sur OP et ON ; donc le double de OM sera la diagonale du parallélogramme construit sur les doubles de OP et de ON, *l'accélération de mouvement résultant est donc bien la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations des mouvements composants.*

371. — Corollaire. *La vitesse acquise au bout d'un temps quelconque par le point matériel est la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses acquises au bout du même temps dans les mouvements composants.*

Si nous représentons, en effet, par $\gamma, \gamma', \gamma''$ les accélérations des mouvements composants et du mouvement résultant, et par v, v', v'' les vitesses acquises à la même époque t, nous aurons :

$$v=\gamma t,$$
$$v'=\gamma' t,$$
$$v''=\gamma'' t.$$

Or γ'' est la diagonale du parallélogramme construit sur γ et γ' ; donc v'' est la diagonale du parallélogramme construit sur v et v'.

***372. — Remarque I.** Il est évident que l'on pourra composer un nombre quelconque de mouvements simultanés, rectilignes et uniformément accélérés sans vitesses initiales, et que l'on obtiendra un mouvement résultant rectiligne et uniformément accéléré.

L'accélération du mouvement résultant s'obtiendra en construisant une ligne polygonale dont les côtés sont égaux et parallèles aux accélérations des mouvements composants : le côté qui ferme ce polygone représente en grandeur et en direction l'accélération du mouvement résultant.

Enfin la vitesse acquise au temps t s'obtiendra de la même façon en composant les vitesses acquises à la même époque.

Si l'on représente par $x_0 y_0 z_0$ la position au temps zéro du mobile, rapportée à trois axes rectangulaires, par c, c', c'' ... les accélérations de mouvements rectilignes, uniformément accélérés, sans vitesses initiales qui animent simultanément ce point matériel, et par $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$.... les angles qui définissent par rapport aux mêmes axes chacun de ces mouvements, la position du mobile au temps t sera déterminée par les coordonnées :

$$x = x_0 + \frac{t^2}{2}\sum c\cos\alpha,$$

$$y = y_0 + \frac{t^2}{2}\sum c\cos\beta,$$

$$z = z_0 + \frac{t^2}{2}\sum c\cos\gamma.$$

L'accélération C faisant avec les axes les angles λ, μ, ν, sera déterminée par les équations :

$$\mathrm{C}\cos\lambda = \sum c\cos\alpha,$$

$$\mathrm{C}\cos\mu = \sum c\cos\beta,$$

$$\mathrm{C}\cos\nu = \sum c\cos\gamma.$$

d'où :

$$\mathrm{C} = \sqrt{\left(\sum c\cos\alpha\right)^2 + \left(\sum c\cos\beta\right)^2 + \left(\sum c\cos\gamma\right)^2}.$$

Enfin on aura de même, pour la vitesse acquise au temps t :

$$\mathrm{V} = \sqrt{\left(\sum ct\cos\alpha\right)^2 + \left(\sum ct\cos\beta\right)^2 + \left(\sum ct\cos\gamma\right)^2}$$

373. — ***Remarque II.*** Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les mouvements composants n'ont pas de vitesse initiale ; dans le cas de deux mouvements *avec vitesses initiales* $v_0 v_0'$ et d'accélération γ, γ', la trajectoire du point matériel est généralement une *parabole*, sauf dans le cas où l'on a :

$$\gamma v_0' - \gamma' v_0 = 0.$$

Cette condition est précisément vérifiée dans les circonstances que nous avons supposées, où l'on a, en même temps :

$$v_0 = 0, \quad v_0' = 0.$$

§ III. — *DEUX MOUVEMENTS RECTILIGNES, L'UN UNIFORME, L'AUTRE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ SANS VITESSE INITIALE.

374. — Supposons un point matériel animé de deux mouvements simultanés, l'un uniforme suivant OY (fig. 195), de vitesse V_0, et

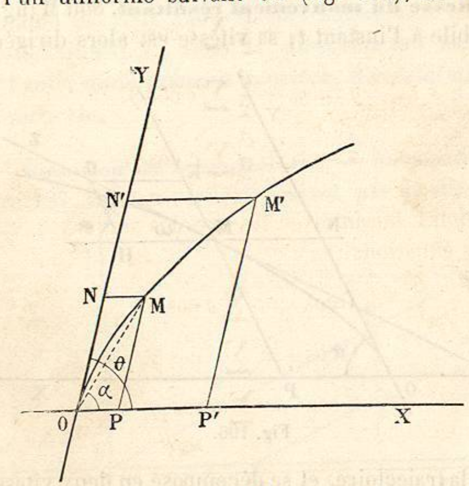

Fig. 195.

l'autre uniformément accéléré sans vitesse initiale suivant OX, l'accélération étant γ. La position M du mobile au temps t s'obtiendra en construisant un parallélogramme OPMN sur les espaces parcourus dans les deux mouvements composants, c'est-à-dire tels que :

$$\mathrm{ON} = \mathrm{V}_0 t,$$

$$\mathrm{OP} = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Il est facile de voir que le mouvement résultant ne sera pas rectiligne, car l'on tire des égalités précédentes :

$$\frac{MP}{OP}=\frac{2V_0}{\gamma t}.$$

Ce rapport décroissant quand le temps croit, le droit OM fera avec OX un angle variable constamment décroissant ; on a, en effet :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{2V_0}{\gamma t};$$

d'où :

$$tg\alpha=\frac{2V_0\sin\theta}{2V_0\cos\theta+\gamma t}.$$

On démontre d'ailleurs que la trajectoire est une parabole tangente en O à OY et dont l'axe est parallèle à OX.

375. — Vitesse du mouvement résultant. Soit M (fig. 196) la position du mobile à l'instant t ; sa vitesse est alors dirigée suivant la

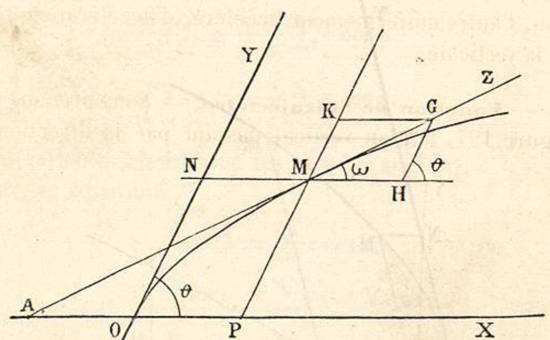

Fig. 196.

tangente MZ à la trajectoire, et se décompose en deux vitesses MH, MK parallèles aux directions OX, OY, qui sont précisément les vitesses au temps t dans les mouvements composants, donc :

$$MH=\gamma t,$$
$$MK=V_0.$$

Par suite, en représentant par ω l'angle que la vitesse fait, à l'instant t, avec l'axe OX, et par W cette vitesse, nous aurons, dans le triangle MGH :

$$W^2=V_0^2+\gamma^2t^2+2V_0\gamma t\cos\theta, \qquad (1)$$

puis :

$$\frac{\sin\omega}{\sin(\theta-\omega)}=\frac{V_0}{\gamma t}.$$

On en tire aisément :

$$tg\omega=\frac{V_0\sin\theta}{V_0\cos\theta+\gamma t}. \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) définissent complètement la vitesse à l'instant t.

376. — Remarque. Nous allons trouver un exemple intéressant de cette question dans le mouvement des projectiles dans le vide.

§ IV. — *MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE.

377. — Nous nous proposons d'étudier le mouvement d'un point matériel animé de deux mouvements simultanés rectilignes, l'un uniforme, de vitesse V_0, dont la direction fait un angle α avec l'horizon, l'autre uniformément accéléré, d'accélération g, et dirigé suivant la verticale.

378. — Équation de la trajectoire. — Nous prenons pour plan de la figure 197, le plan vertical passant par la direction OZ de la

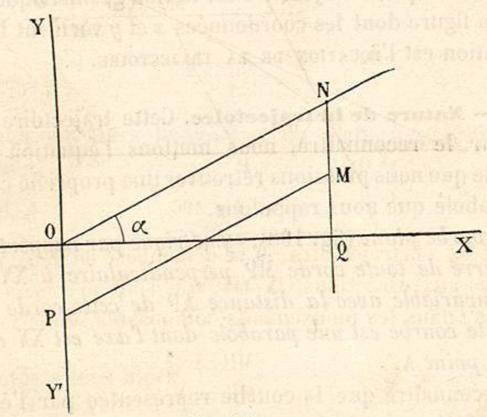

Fig. 197.

vitesse V_0, et nous traçons deux axes rectangulaires OX, OY dont l'un OY est vertical. Nous cherchons les coordonnées de la position occupée au temps t par le point matériel.