CHAPITRE VII

MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME

390. — Définition. Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe, chacun de ses points décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à cet axe et dont le centre est sur cette droite.

De plus, les arcs parcourus dans le même temps par deux points quelconques du corps sont *semblables*, c'est-à-dire qu'ils sont interceptés par des angles aux centres égaux, puisque tous les points tournent du même angle dans le même temps, le corps considéré étant invariable.

On dit qu'un mouvement de rotation est UNIFORME *lorsque les arcs parcourus par un point quelconque sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.*

Autrement dit, *dans des temps égaux un point parcourt des arcs égaux.*

391. — Vitesse. *La* VITESSE ANGULAIRE *d'un mouvement de rotation uniforme est la longueur de l'arc parcouru dans l'unité de temps par un point du corps situé à une distance de l'axe égale à l'unité de longueur.*

Si l'on représente la vitesse angulaire par ω, le chemin parcouru e pendant le temps t par un point du corps dont la distance à l'axe est R, sera :

$$e = \omega R t,$$

car les arcs dont les longueurs sont e et ωt étant semblables, sont dans le rapport des rayons.

Cette relation permettra de calculer l'une quelconque des quantités qui y figurent quand les trois autres seront connues.

392. — Au lieu de donner la vitesse angulaire d'un pareil mou-

vement, on donne souvent le nombre des tours complets effectués par le corps dans un certain temps.

Soit n le nombre des tours effectués dans le temps θ. On a visiblement :

$$2n\pi = \omega\theta,$$

et par suite :

$$e = \frac{2n\pi R t}{\theta}.$$

393. — Enfin, si l'on ne connaît que l'angle α dont le corps a tourné pendant le temps θ, en supposant α exprimé en degrés, on aura :

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\theta\omega}{\pi},$$

d'où :

$$\omega = \frac{\pi\alpha}{180\theta}.$$

394. — Vitesse d'un point de la terre. Proposons-nous de trouver le chemin parcouru en une seconde par un point de la surface de la terre dont la latitude est λ.

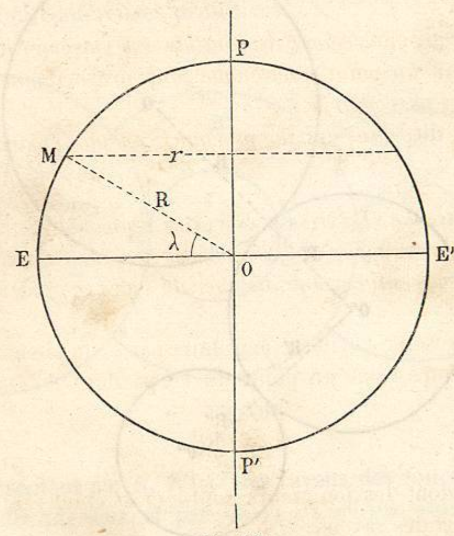

Fig. 205.

En supposant la terre sphérique, l'équateur a pour longueur :

40 000 000 mètres.

Or, la terre faisant un tour complet en vingt-quatre heures sidérales, un point de l'équateur parcourt la longueur de ce cercle dans le même temps; on sait de plus que ce temps vaut 86 164 secondes de temps moyen; il en résulte l'arc parcouru en une seconde par ce point :

$$\frac{40\,000\,000}{86\,164}.$$

Or, le rayon r du parallèle de latitude λ (fig. 205) est lié au rayon de l'équateur par la formule :

$$r = \mathrm{R} \cos \lambda.$$

Donc l'arc parcouru par tout point de latitude λ, en une seconde de temps moyen, est :

$$\frac{40\,000\,000}{86\,164} \times \cos \lambda.$$

395. — Supposons (fig. 206) plusieurs roues dentées ayant des

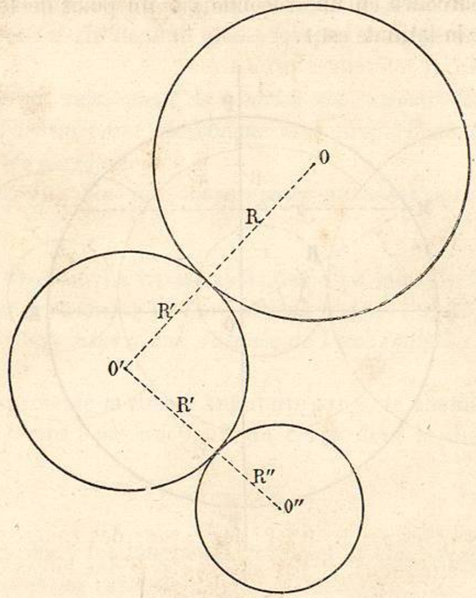

Fig. 206.

axes parallèles, telles que chacune engrène avec la suivante : en supposant l'une des roues animée d'un mouvement de rotation uniforme,

proposons-nous de trouver le rapport des vitesses angulaires de la première et de la dernière roue.

Soient ω, ω', ω'', ω''' les vitesses angulaires des roues successives et R, R′, R″, R‴ les rayons des circonférences primitives auxquelles nous réduisons ces roues; on a visiblement :

$$\mathrm{R}\omega = \mathrm{R}'\omega' = \mathrm{R}''\omega'' = \mathrm{R}'''\omega''',$$

donc enfin :

$$\frac{\omega}{\omega'''} = \frac{\mathrm{R}'''}{\mathrm{R}},$$

les vitesses de deux roues quelconques sont donc dans le rapport inverse des rayons de ces roues.

396. — Si l'on veut obtenir un rapport de grande valeur numérique entre les vitesses des roues extrêmes, on fera engrener chaque roue avec un *pignon* (fig. 208), c'est-à-dire avec une roue de même axe que la suivante, mais d'un rayon moindre, qui fait corps avec cette roue, ainsi qu'il est représenté figure 207, où les roues sont réduites aux circonférences primitives.

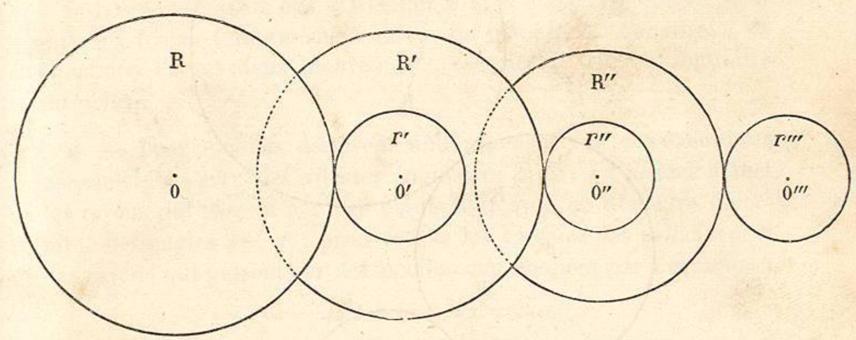

Fig. 207

En représentant par R, R′, R″ les rayons des roues, par r', r'', r''' les rayons des pignons, et par ω, ω', ω'', ω''' les vitesses angulaires, on a successivement :

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\omega &= r'\omega', \\ \mathrm{R}'\omega' &= r''\omega'', \\ \mathrm{R}''\omega'' &= r'''\omega''', \end{aligned}$$

d'où, en multipliant membre à membre, et divisant par $\omega'\omega''$:

$$RR'R''\omega = r'r''r'''\omega''' ;$$

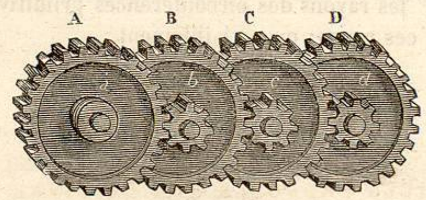

Fig. 208.

et par suite :

$$\frac{\omega'''}{\omega} = \frac{RR'R''}{r'r''r'''}.$$

CHAPITRE VIII

EXERCICES PROPOSÉS SUR LE LIVRE III

1. — Une barre rigide AB se déplace de sorte que ses extrémités A,B parcourent deux axes rectangulaires OX, OY.

1° Trouver la loi du mouvement de l'extrémité B quand A est animé d'un mouvement uniforme, et donner la formule générale de la vitesse de l'extrémité B.

2° En supposant que le point milieu C de AB, qui décrit une circonférence, tourne uniformément autour du point O, donner la loi du mouvement de chaque extrémité A, B et la formule générale de la vitesse dans chacun de ces mouvements.

3° Les mouvements des extrémités A et B étant tels que le point milieu C tourne uniformément autour du point O, et connaissant les équations de ces deux mouvements, calculer la vitesse angulaire du point C

2. — Deux mobiles décrivent uniformément des circonférences concentriques avec des vitesses angulaires ω, ω'; à l'instant actuel les rayons qui passent par ces points font avec un diamètre déterminé des angles α et α' : prouver que les époques des coïncidences des rayons qui passent par ces mobiles sont données par l'équation :

$$(\omega - \omega')\, t + (\alpha - \alpha') = 2k\pi,$$

dans laquelle k représente un nombre entier quelconque, négatif, nul ou positif.

3. — *Horloge magique.* — Une aiguille formée d'un anneau circulaire creux A, auquel est fixé en B une tige pesante BCD, suivant un rayon de l'anneau, est mobile autour du point C : le centre de gravité g de ce corps est placé entre C et D : un mobile pesant M, animé par un mouvement d'horlogerie, parcourt uniformément la circonférence de l'anneau :

1° Si l'aiguille est fixe, le centre de gravité G du système formé par l'aiguille et le mobile M parcourent une circonférence de centre O.

2° Si l'aiguille est mobile, et si le point C coïncide avec O, le mouvement de l'aiguille sera uniforme.

4. — En tombant en chute libre, un corps a parcouru 50 mètres; trouver le temps qu'il emploiera à descendre encore d'une hauteur de 20 mètres.

5. — Calculer le temps employé par un corps pesant pour tomber d'une hauteur inconnue, sachant que pendant la dernière seconde de chute il a parcouru les $\frac{3}{4}$ de la hauteur totale. Quelle est cette hauteur?

6. — Avec quelle vitesse verticale dirigée de haut en bas faut-il lancer un corps pesant pour qu'il parcoure 120 mètres dans les deux premières secondes?

7. — Un observateur placé à 120 mètres au-dessus du sol lance un corps pesant verticalement de bas en haut, et ce corps touche le sol au bout de 8 secondes : calculer la vitesse initiale.

8. — Un corps pesant tombe librement d'une hauteur H : lorsqu'il a parcouru une partie h de cette hauteur, on lance verticalement de la même hauteur H un second corps pesant : quelle doit être la vitesse initiale de ce second projectile pour que les deux corps pesants arrivent en même temps au sol?

9. — Avec quelle vitesse initiale faut-il lancer un projectile dans la direction qui fait 30° avec le plan horizontal, pour atteindre un point situé dans le plan horizontal du point de départ à 1800 mètres de ce point?

10. — Sous quelle inclinaison faut-il lancer un projectile avec une vitesse initiale de 400 mètres pour atteindre un but placé dans le plan horizontal du point de départ et situé à 9000 mètres de ce point?

11. — Quelle est la portée maximum du tir, la vitesse initiale étant 300 mètres?

12. — En cherchant à atteindre un point M du plan vertical qui contient la vitesse initiale V_0 du projectile, on obtient généralement deux directions de cette vitesse qui font des angles α et α' avec l'horizon. Prouver que toutes les fois que le point M est extérieur à l'ellipse, lieu des sommets des trajectoires, il est atteint par les deux trajectoires en descendant; que si, au contraire, le point M est intérieur à cette courbe, il est atteint par l'une des trajectoires en montant, et par l'autre en descendant.

13. — On lance, au même instant, deux projectiles des points O et O' situés sur le même plan horizontal à une distance a, avec des vitesses initiales b, b', dont les directions contenues dans le même plan vertical font entre elles un angle droit.

On propose de calculer la distance minimum de ces projectiles, et le temps au bout duquel cette circonstance se présentera.

On en déduira la condition nécessaire et suffisante pour que les deux projectiles se rencontrent.

14. — Si on lance avec une même vitesse initiale et d'un même point des projectiles dans toutes les directions de l'espace, ils seront tous situés au même instant sur une même sphère :

Trouver le centre et le rayon de cette sphère.

15. — On lance un projectile horizontalement avec une vitesse initiale de 300 mètres. On demande le temps qu'il mettra pour atteindre un plan horizontal placé à 15 mètres au-dessous du point de départ.

16. — On lance du point O un projectile dans une direction qui fait un angle α avec l'horizon : on demande à quelle époque il atteindra un point M de sa trajectoire, ce point étant déterminé par la longueur $OM = a$, et par l'angle θ que fait OM avec l'horizon, la vitesse initiale étant V_0.

17. — On lance au même instant deux projectiles du point O avec des vitesses V et V' sous des inclinaisons α et α' : les trajectoires ont en commun le point O et un second point M : trouver l'intervalle de temps qui s'écoule entre les passages des deux projectiles au point M.

18. — On suppose un canal à bords parallèles XY, X'Y' de largeur c dont l'eau se déplace d'un mouvement uniforme de vitesse a; on suppose de plus que toutes les molécules du liquide possèdent le même mouvement : un bateau se déplace pour aller d'un point A de XY à un point B de X'Y' d'un mouvement uniforme de vitesse b. La distance des deux points A, B est d.

Comment faut-il diriger le bateau pour aller de A en B, et quelle est la vitesse du mouvement résultant? Discuter.

19. — Un mobile possède un mouvement rectiligne uniforme de vitesse V, et se trouve toujours placé sur l'axe d'un tube qui fait un angle α avec le déplacement du mobile, et qui se meut parallèlement à lui-même avec une vitesse V' : trouver la relation nécessaire entre les quantités V, V' α.

20. — Un projectile se déplaçant perpendiculairement à la voie rectiligne suivie par un wagon a traversé celui-ci de part en part. Connaissant la vitesse du wagon et les positions occupées par les traces du projectile, déterminer la vitesse du projectile.

21. — Un cylindre creux est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe de figure : ses deux bases sont en papier et divisées en degrés, de sorte que les zéros soient sur une même génératrice du cylindre.

Un projectile est lancé parallèlement à l'axe du cylindre de manière à franchir la partie intérieure, et à laisser ainsi deux traces sur les écrans en papier.

On propose de trouver la vitesse du projectile, connaissant la longueur a du cylindre, la vitesse de rotation ω, la distance b des traces du projectile à l'axe de rotation, et l'angle α que font entre eux les rayons des bases passant par ces traces.

22. — Connaissant la vitesse V d'un navire à voiles, et la direction rectiligne moyenne de la route qu'il suit, l'angle α que fait cette droite avec la direction du vent dont la vitesse est V', calculer l'angle des directions véritable et apparente du vent.

LIVRE IV

NOTIONS DE DYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX ET CONSÉQUENCES

§ I. — LOI DE L'INERTIE.

397. — La DYNAMIQUE, c'est-à-dire la partie de la mécanique où l'on étudie le mouvement que produit la force, repose sur des principes que l'on ne démontre pas dans toute leur généralité. On vérifie par l'expérience certaines conséquences que l'on en peut déduire, et l'on *admet* le principe général. Ces vérités tirées de l'observation par *induction* sont au nombre de deux.

398. — La LOI DE L'INERTIE, énoncée par Kepler, a déjà été invoquée au début de la statique pour la définition du mot *Force :*

Un corps ne peut se mettre de lui-même en mouvement, ou modifier le mouvement qu'il possède.

Nous en concluons immédiatement que *si un point matériel libre n'est sollicité par aucune force, ou bien il est* EN REPOS, *ou bien il est animé d'un* MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME.

De même, *si un corps libre n'est sollicité par aucune force, ou bien ce corps est* EN REPOS, *ou bien il est animé d'un mouvement de* TRANSLATION UNIFORME, c'est-à-dire que ses points décrivent dans le même temps des droites égales et parallèles.

Il en sera évidemment de même dans le cas où toutes les forces qui sollicitent le point matériel avec le corps se font équilibre.

Ainsi, une machine sur laquelle les forces se font équilibre n'est pas nécessairement en repos; mais, dans le cas contraire, son