Comment faut-il diriger le bateau pour aller de A en B, et quelle est la vitesse du mouvement résultant? Discuter.

19. — Un mobile possède un mouvement rectiligne uniforme de vitesse V, et se trouve toujours placé sur l'axe d'un tube qui fait un angle α avec le déplacement du mobile, et qui se meut parallèlement à lui-même avec une vitesse V' : trouver la relation nécessaire entre les quantités V, V' α.

20. — Un projectile se déplaçant perpendiculairement à la voie rectiligne suivie par un wagon a traversé celui-ci de part en part. Connaissant la vitesse du wagon et les positions occupées par les traces du projectile, déterminer la vitesse du projectile.

21. — Un cylindre creux est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe de figure : ses deux bases sont en papier et divisées en degrés, de sorte que les zéros soient sur une même génératrice du cylindre.

Un projectile est lancé parallèlement à l'axe du cylindre de manière à franchir la partie intérieure, et à laisser ainsi deux traces sur les écrans en papier.

On propose de trouver la vitesse du projectile, connaissant la longueur *a* du cylindre, la vitesse de rotation ω, la distance *b* des traces du projectile à l'axe de rotation, et l'angle α que font entre eux les rayons des bases passant par ces traces.

22. — Connaissant la vitesse V d'un navire à voiles, et la direction rectiligne moyenne de la route qu'il suit, l'angle α que fait cette droite avec la direction du vent dont la vitesse est V', calculer l'angle des directions véritable et apparente du vent.

LIVRE IV

NOTIONS DE DYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX ET CONSÉQUENCES

§ I. — LOI DE L'INERTIE.

397. — La DYNAMIQUE, c'est-à-dire la partie de la mécanique où l'on étudie le mouvement que produit la force, repose sur des principes que l'on ne démontre pas dans toute leur généralité. On vérifie par l'expérience certaines conséquences que l'on en peut déduire, et l'on *admet* le principe général. Ces vérités tirées de l'observation par *induction* sont au nombre de deux.

398. — La LOI DE L'INERTIE, énoncée par Kepler, a déjà été invoquée au début de la statique pour la définition du mot *Force :*

Un corps ne peut se mettre de lui-même en mouvement, ou modifier le mouvement qu'il possède.

Nous en concluons immédiatement que *si un point matériel libre n'est sollicité par aucune force, ou bien il est* EN REPOS, *ou bien il est animé d'un* MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME.

De même, *si un corps libre n'est sollicité par aucune force, ou bien ce corps est* EN REPOS, *ou bien il est animé d'un mouvement de* TRANSLATION UNIFORME, c'est-à-dire que ses points décrivent dans le même temps des droites égales et parallèles.

Il en sera évidemment de même dans le cas où toutes les forces qui sollicitent le point matériel avec le corps se font équilibre.

Ainsi, une machine sur laquelle les forces se font équilibre n'est pas nécessairement en repos; mais, dans le cas contraire, son mouvement est uniforme : c'est dans le but d'obtenir un mouvement uniforme que l'on cherche toujours dans une machine à équilibrer toutes les forces.

Il est bien clair que si les phénomènes naturels, sauf les mouvements des astres, ne nous offrent pas d'exemple de mouvements uniformes, c'est que les forces ne sont pas en équilibre, car il faut toujours tenir compte dans ces conditions des forces résistantes telles que les frottements, les résistances opposées au mouvement par l'air, etc.

Par exemple, nous lançons une bille sur un plan horizontal aussi poli qu'on peut l'imaginer : nous remarquons que ce corps prend un mouvement retardé et finit par atteindre le repos : c'est que la force de frottement existe, car le poli parfait ne peut être réalisé; c'est aussi que l'air s'oppose au mouvement et qu'il naît de ces actions une vitesse en sens contraire de l'impulsion qui détruit peu à peu celle-ci.

399. — *Conséquence importante. Supposons un point matériel libre sollicité par une force; il se déplace évidemment dans la direction de cette force, et prend un mouvement rectiligne varié; si la force cesse d'agir à l'instant t, le mouvement du point devient uniforme, en vertu de la loi d'inertie, et nous allons prouver que *la vitesse de ce mouvement uniforme est précisément ce que nous avons appelé vitesse du mouvement varié à l'instant t.*

Représentons, en effet, par e l'espace parcouru au temps t, et par $(e+k)$ l'espace parcouru au temps $(t+h)$, en supposant h assez voisin de zéro pour que l'espace aille toujours en croissant ou toujours en décroissant pendant cet intervalle : la vitesse à l'instant t est, par définition :

$$V = \text{limite}\left(\frac{k}{h}\right),$$

quand h tend vers zéro. Représentons par W et W′ les vitesses des mouvements uniformes qui succéderaient au mouvement varié si la force cessait d'agir au temps t et au temps $t+h$: il est clair que si, par exemple, le mouvement est constamment accéléré pendant l'intervalle h, W est moindre que W′ et que l'espace k, parcouru pendant cet intervalle dans le mouvement varié, est supérieur à Wh, mais inférieur à $W'h$; on a donc :

$$W < \frac{k}{h} < W';$$

or, si h tend vers zéro, W′ a pour limite W, et par suite $\left(\frac{k}{h}\right)$ tend vers W; donc enfin :

$$W = V,$$

et *la vitesse du mouvement uniforme qui succède au moment varié à l'instant où la force cesse d'agir, est précisément la vitesse que possédait le point matériel à cet instant.*

400. — *Application. Il résulte de ces considérations un procédé pour apprécier la vitesse acquise à un instant déterminé par un corps que des forces sollicitent : il consiste à mesurer la vitesse du mouvement uniforme que prend ce corps quand on supprime à cet instant l'action de ces forces.

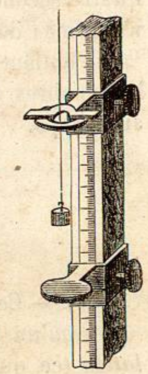

Fig. 209.

Prenons, par exemple, la machine d'Atwood et proposons-nous de vérifier la loi des vitesses dans le mouvement que prend le système des poids sous l'action du poids additionnel.

Pour avoir la vitesse acquise au bout de trois secondes, par exemple, nous placerons un curseur annulaire sur la règle graduée (fig. 209), de sorte qu'il soit traversé par le poids descendant à la fin de la troisième seconde; le poids additionnel sera arrêté par le curseur, le mouvement deviendra uniforme, et nous placerons le curseur plein de sorte qu'il soit frappé à la fin de la quatrième seconde : la distance des deux curseurs sera la vitesse cherchée.

On peut même vérifier le principe lui-même et constater de la sorte que le mouvement nouveau est bien uniforme.

En nous servant des données indiquées au nº 344, nous avons, pour les espaces parcourus :

pendant 1^s.	4
— 2^s.	16
— 3^s.	36
— 4^s.	64.

Donc, pour préciser la vérification précédente, nous placerons le curseur annulaire à la division 4, et le curseur plein à la division 12 : l'espace parcouru au bout de la première seconde étant 4, l'accélération est 8 $\left(e = \frac{1}{2}\gamma t^2\right)$, et c'est aussi la vitesse $(v = \gamma t)$ au bout de ce temps; nous constaterons que le curseur plein sera frappé à la fin de la deuxième seconde, ce qui vérifie que la vitesse acquise était bien 8.

Puis nous placerons le curseur annulaire à la division 16 et le curseur plein à la division 32; il sera frappé à la fin de la troisième seconde. Ce qui prouvera que la vitesse à la fin de la deuxième seconde est 16.

De même nous placerons le curseur annulaire à la division 36 et le curseur plein à la division 60; il sera frappé à la fin de la quatrième seconde : ce qui prouve que 60 a été parcouru pendant quatre secondes, 36 d'un mouvement varié et 24 d'un mouvement uniforme; donc la vitesse au bout de trois secondes est 24.

On obtient ainsi pour les vitesses, au bout des temps 1, 2, 3..., les nombres 8, 16, 24...; ces vitesses sont donc proportionnelles aux temps.

§ II. — LOI DU MOUVEMENT RELATIF.

401. — Cette loi, due à Galilée, s'énonce ainsi :

Lorsqu'un système de points est animé d'un mouvement de translation (ce qui veut dire que ces points parcourent dans le même temps des droites égales et parallèles), *toute force qui vient à agir sur l'un d'eux produit le même déplacement du point dans le système que si ce système était en repos.*

Il résulte de cet énoncé que l'action d'une force sur un point matériel est indépendant de l'état de repos ou de mouvement de ce point.

Si nous supposons, par exemple, que le point possède la vitesse V_0 au moment où une force vient à agir sur lui, dans la même direction que cette vitesse, et que cette force soit capable d'imprimer au même point partant du repos la vitesse V au bout du temps t, la vitesse W du point considéré au bout du temps t sera :

$$W = V_0 + V.$$

Cela résulte évidemment du principe de Galilée.

402. — **THÉORÈME.** *Lorsqu'une force constante en intensité et en direction agit sur un point matériel en repos, ou animé d'une vitesse initiale de même direction que la force, ce point prend un mouvement uniformément varié.*

Soit, en effet, V_0 la vitesse initiale possédée par le point matériel, et soit γ la vitesse que la force lui imprimerait pendant la première seconde d'action si le point partait du repos, la vitesse véritable du point à la fin de la première seconde sera :

$$V_1 = V_0 + \gamma.$$

La force agissant pendant la deuxième seconde produit sur le point un effet indépendant du mouvement qu'il possède : or cette force étant constante, ferait acquérir au point partant du repos une vitesse γ à la fin de la première seconde : donc ce point possédant déjà la vitesse $(V_0 + \gamma)$, aura pour vitesse à la fin de la deuxième seconde :

$$V_2 = V_0 + 2\gamma.$$

En continuant ainsi, il est visible qu'au bout de t secondes la vitesse acquise aura pour valeur :

$$V_t = V_0 + \gamma t.$$

D'ailleurs le raisonnement étant indépendant de l'unité de temps choisie, la vitesse au bout du temps t dans le mouvement que prend le point est :

$$V = V_0 + \gamma t.$$

Ce mouvement est donc, par définition, uniformément varié.

403. — **Remarque.** Il est clair que le raisonnement précédent s'applique au cas où la vitesse initiale serait nulle, c'est-à-dire si le point matériel part du repos.

404. — **THÉORÈME RÉCIPROQUE.** *Lorsqu'une force produit sur un point matériel libre un mouvement rectiligne uniformément varié, cette force est constante en grandeur et en direction.*

D'abord cette force a toujours la même direction, sans quoi le point matériel libre n'aurait pas un mouvement rectiligne.

En second lieu, la vitesse de ce point étant représentée à un instant quelconque par la formule :

$$V = V_0 + \gamma t.$$

C'est que la force produit dans chaque unité de temps une variation de vitesse égale à γ; son effet est donc le même dans les unités de temps successives : or la formule précédente est vraie, quelle que soit l'unité de temps adoptée ; donc la force est constante.

405. — Corollaire. *La force de pesanteur est constante.*

Car nous avons constaté que cette force communique à un corps, ou à chacun de ses points matériels, un mouvement uniformément varié. En effet, le mouvement commun que prennent les points matériels pesants qui forment un corps en mécanique est tel que chaque point prendrait le même mouvement s'il était seul.

Nous concluons de ce corollaire que *nous n'avons pas changé la nature du mouvement pris par un corps pesant en l'étudiant avec la machine d'Atwood.*

406. — * Conséquence. — Supposons une force variable agissant sur un point matériel et produisant un mouvement rectiligne de ce point; ce mouvement est nécessairement varié : si la force devient constante au temps t, le point prendra à partir de cet instant un mouvement uniformément varié : nous voulons prouver que *l'accélération de ce mouvement uniformément varié est précisément ce que nous avons appelé accélération du mouvement varié à l'époque t.*

Soit, en effet, V et $V+k$ les vitesses du mouvement varié aux époques t et $(t+h)$; nous pouvons toujours prendre h assez voisin de zéro pour que la vitesse soit toujours croissante ou toujours décroissante dans cet intervalle; supposons, par exemple, $k>0$; nous avons par définition, pour l'accélération γ à l'époque t :

$$\gamma = \lim\left(\frac{k}{h}\right).$$

Or, nous représentons par x l'accélération du mouvement uniformément accéléré que prendra le point si, à l'époque t, la force devient constante, et par x' ce qu'elle sera si c'est à l'époque $(t+h)$ que la force devient constante : la variation de vitesse pendant le temps h sera hx ou hx', suivant que l'accélération du mouvement uniformément accéléré sera x ou x'. On aura donc :

$$hx < k < hx',$$

puisque la vitesse croît dans le mouvement réel pendant l'intervalle de temps h.

On en déduit :

$$x < \frac{k}{h} < x'.$$

Si donc nous faisons tendre h vers zéro, il est clair que x' tendra vers x, et comme $\frac{k}{h}$ tend vers γ, on a :

$$x = \gamma.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

407. — Remarque. Cette propriété donne la raison qui a conduit à la définition de l'accélération dans un mouvement varié rectiligne.

§ III. — MASSE.

408. — THÉORÈME. *Deux forces constantes sont dans le même rapport que les accélérations qu'elles peuvent imprimer à un même point matériel.*

Supposons qu'en agissant sur un même point matériel les forces F et F′ lui communiquent des mouvements uniformément variés dont les accélérations soient γ et γ'; nous voulons prouver la relation importante :

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

A cet effet, supposons qu'une force f soit commune mesure entre F et F′, de sorte que l'on ait :

$$F = nf \qquad F' = n'f,$$

et, par suite :

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'}.$$

Soit φ l'accélération que cette force f imprimerait au point matériel déjà considéré : nous remarquons que si l'on fait agir simultanément un certain nombre de forces égales à f sur ce même point, chacune produit son effet comme si elle était seule, c'est-à-dire que chacune de ces forces produit dans l'unité de temps un accroissement de vitesse égal à φ : il en résulte que la force F, qui peut être remplacée par n forces égales à f, produit une accélération γ qui vaut $n\varphi$. On a donc :

$$\gamma = n\varphi,$$

et de même :

$$\gamma' = n'\varphi ;$$

par suite :

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{n}{n'} ;$$

et enfin :

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

409. — Remarque. Dans le cas où les forces F et F′ n'ont pas de commune mesure, on prend une force f qui soit la n^{me} partie de F′ ; alors on a :

$$mf < F < (m+1)f,$$ $F = nf$

d'où :

$$\frac{m}{n} < \frac{F}{F'} < \frac{m+1}{n}.$$

En faisant agir n forces égales à f, on obtient une accélération égale à γ ; tandis que m forces égales à f produisent une accélération moindre que γ' ; ce serait le contraire pour la force $(m+1)f$. Donc :

$$\frac{m}{n} < \frac{\gamma}{\gamma'} < \frac{m+1}{n}.$$

Les rapports $\frac{F}{F'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$ ont donc une différence inférieure à $\frac{1}{n}$, et qui est par suite nulle, puisque $\frac{1}{n}$ tend vers zéro quand n croît sans limite.

410. — DÉFINITION DE LA MASSE. D'après le théorème précédent, les forces F, F′, F″, F‴..., agissant sur un même point matériel, produisent des accélérations γ, γ', γ'', γ''', ... telles que l'on ait :

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = \frac{F'''}{\gamma'''} = \ldots.$$

Ce rapport constant entre la force qui agit sur un point matériel déterminé et l'accélération du mouvement qu'elle produit, s'appelle la MASSE *de ce point matériel.*

En particulier, la pesanteur produisant sur un point matériel un

mouvement dont l'accélération est g, en représentant par P son poids, on a :

$$m = \frac{P}{g}.$$

Les masses des corps sont proportionnelles à leurs poids.

411. — Unité de masse. On prend comme unité de masse la masse de l'eau distillée qui occupe à 4° le volume de g litres : il en résulte que la masse d'un corps a pour mesure le quotient du nombre qui exprime son poids en kilogrammes par l'accélération due à la pesanteur.

412. — EXPRESSION DES FORCES CONSTANTES. Entre l'intensité en kilogrammes d'une force F et l'accélération en mètres γ qu'elle imprime à un point matériel de masse m, nous avons par définition la relation :

$$F = m\gamma.$$

Il en résulte que si l'on connaît γ on pourra calculer F et réciproquement.

413. — Exemple I. Lorsqu'une force de 50 kilog. agit horizontalement sur le centre de gravité d'un corps dont le poids est 10 kilog., qui repose sur un plan horizontal parfaitement poli, l'accélération du mouvement résultant est :

$$\gamma = 50 \times \frac{g}{10},$$

ou :

$$\gamma = 5 \times 9{,}8094.$$

On aura donc aisément l'espace parcouru par le corps après un temps t donné, en supposant qu'il n'y ait pas de vitesse initiale :

$$e = \frac{1}{2} \times 5 \times 9{,}8094 \times t^2,$$

ou :

$$e = 24{,}5235 \times t^2,$$

en mètres.

414. — Exemple II. Réciproquement, quelle est la force qu'il faut faire agir horizontalement au centre de gravité d'un corps pesant 10 kilogrammes, reposant sur un plan horizontal parfaitement poli, pour lui faire parcourir 100 mètres en 40 secondes?

Nous cherchons l'accélération du mouvement produit :

$$100=\frac{1}{2}\times\overline{40}^2\times\gamma,$$

d'où :

$$\gamma=\frac{1}{8};$$

par suite :

$$F=\frac{10}{g}\times\frac{1}{8}=0,13$$

en kilogrammes.

415. — Vérification par la machine d'Atwood. On peut encore utiliser la machine d'Atwood pour la vérification du principe qui nous a conduit à la définition de la masse : nous remarquons en effet que la machine donne l'accélération du mouvement dans le double de l'espace parcouru pendant la première seconde, qui est aussi la vitesse à cette époque. Cela résulte visiblement de la formule :

$$e=\frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Par suite, les deux poids égaux accrochés aux extrémités du fil ayant pour valeur commune P, nous placerons sur le poids qui descend le long de la règle divisée, par exemple, sept poids additionnels égaux p.

Le système entraîné par le poids $7p$ sera $(2P+7p)$, soit γ le double de l'espace parcouru par le système dans la première seconde.

Nous déplaçons alors l'un des poids p pour l'accrocher à l'autre extrémité du fil; les deux poids sont alors :

$$P+6p \qquad \text{et} \qquad P+p.$$

La force qui produit le mouvement est donc $5p$ et le corps entraîné est toujours $2P+7p$: soit γ' l'accélération fournie par la machine.

Recommençons encore en déplaçant un nouveau poids p, la force qui produit le mouvement sera :

$$(P+5p)-(P+2p)=3p$$

et le corps entraîné sera toujours $(2P+7p)$: soit γ'' l'accélération.

Enfin, en déplaçant encore un poids p, nous aurons la force p produisant l'accélération γ''' sur le système $(2P+7p)$.

On constate alors que l'on a :

$$\frac{\gamma}{7p}=\frac{\gamma'}{5p}=\frac{\gamma''}{3p}=\frac{\gamma'''}{p}.$$

C'est-à-dire que les accélérations sont proportionnelles aux intensités des forces.

416. — Accélération dans la machine d'Atwood. Le principe de la proportionnalité des forces aux accélérations donne aisément le rapport de l'accélération du mouvement obtenu dans la machine d'Atwood à l'accélération due à la pesanteur dans la chute libre et dans le vide.

En effet, en représentant par γ l'accélération que prend le système $(2P+p)$ par l'action du poids p, nous avons :

$$\frac{2P+p}{g}=\frac{p}{\gamma},$$

Car en faisant agir sur le système en mouvement la force $(2P+p)$ qui est son poids, on aurait l'accélération g, tandis qu'en faisant agir la force p, ainsi que l'on fait en employant la machine, l'accélération est γ.

On déduit aisément de la proportion précédente :

$$\gamma=g\times\frac{p}{2P+p}.$$

417. — Remarque. — Théoriquement on peut donc déduire la valeur de g d'expériences faites à l'aide de la machine d'Atwood. Mais il faut tenir compte de la difficulté des mesures précises dans ces conditions, et par suite ne pas compter dans cette observation obtenir une valeur bien approchée du nombre g. L'importance de cette valeur exige des expériences plus délicates; on obtient à Paris, par des procédés dont nous parlerons plus loin, la valeur :

$$g=9^{m},8094,$$

à $\frac{1}{2}$ dix-millième près.

418. — Quantité de mouvement. *On appelle* QUANTITÉ DE MOUVEMENT *d'un point matériel à un instant donné, le produit de la masse par la vitesse acquise.*

Ainsi, m étant la masse d'un point matériel, et v sa vitesse acquise au temps t, la *quantité de mouvement* qu'il possède est mv.

La quantité de mouvement d'un corps qui pèse 10 kilogrammes tombant en chute libre, dans le vide, est au bout de 20 secondes :

$$\frac{10}{g}\times g\times 20=200.$$

419. — Théorème. *Deux forces constantes sont dans le même rapport que les quantités de mouvement qu'elles font acquérir au bout du même temps d'action à deux points matériels.*

Soient en effet F et F′ les intensités en kilogrammes de deux forces agissant sur des points matériels de masses m et m', et leur imprimant des accélérations représentées par γ et γ'. Nous avons par définition :

$$F=m\gamma,$$
$$F'=m\gamma'.$$

Or, au temps t, les vitesses des points matériels, que nous supposons partir du repos, sont :

$$V=\gamma t,$$
$$V'=\gamma' t;$$

donc :

$$\frac{F}{F'}=\frac{mV}{m'V'}.$$

420. — Corollaire. *Deux forces constantes égales agissant sur des points matériels, leur communiquent au bout du même temps d'action des vitesses inversement proportionnelles aux masses.*

Car les forces F et F′ étant supposées égales, le théorème précédent donne :

$$mV=m'V',$$

et par suite :

$$\frac{V}{V'}=\frac{m'}{m}.$$

421. — *Expression des forces variables au moyen des masses et des accélérations.

Supposons une force d'intensité variable agissant sur un point matériel de masse m, auquel elle imprime un mouvement rectiligne; soit F la valeur de la force au temps t, et γ l'accélération que possède le point matériel à cette même époque.

Nous avons montré (406) que si à cet instant la force devient constante, le point matériel prend un mouvement uniformément varié dont l'accélération est précisément γ. Donc on aura dans ces circonstances la relation :

$$F=m\gamma. \qquad (1)$$

D'où il suit qu'à toute époque du mouvement l'accélération du point matériel est le quotient de la valeur de la force à cet instant par la masse du point.

La formule (1) est donc toujours vraie, que la force soit constante ou variable, pourvu que F et γ soient les valeurs au même moment de la force et de l'accélération.

422. — Exemple. Considérons une arme à feu, et supposons que l'arme soit libre comme le projectile; pendant tout le temps que le projectile reste dans l'arme, il est sollicité par la force variable que produisent les gaz de la poudre, et une force d'égale intensité agit sur l'arme; donc, à tout instant de l'intervalle limité dont nous parlons, les accélérations imprimées au projectile et à l'arme seront dans le rapport inverse des masses, car on aura à tout instant :

$$M\Gamma=m\gamma.$$

C'est ainsi qu'il faut expliquer le recul des armes, sans tenir compte toutefois des frottements.

§ IV. — *MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT SUR UN PLAN INCLINÉ.

423. — Nous supposons un point matériel pesant placé sur un plan incliné parfaitement poli. Nous décomposons le poids p de ce point en deux forces, dont l'une est normale au plan; l'autre composante sera dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan, puisqu'elle est dans un plan perpendiculaire à la fois au plan horizontal et au plan incliné. Ainsi, soit AB (fig. 210) la ligne de plus grande pente qui passe par la position initiale A du point matériel, les composantes du poids P seront P_1 et P_2, et si α est l'angle de AB avec le plan horizontal, nous aurons :

$$P_1=P\sin\alpha.$$

C'est la seule force qui produit le mouvement du point, l'autre