inclinés qui passent par la perpendiculaire en A au plan de la figure, et qui ont pour lignes de pente les cordes AB, AB′, AB″..., ces points matériels partant en même temps du point A parcourent ces plans de manière à parvenir au même moment aux points B, B′, B″..., et le temps est précisément celui qu'il faudrait à un corps en chute libre pour parcourir AD. Enfin les vitesses à l'instant considéré sont les mêmes que dans la chute libre lorsque le point passe par les positions C, C′, C″.

CHAPITRE II

DU TRAVAIL MÉCANIQUE

§ I. — TRAVAIL D'UNE FORCE CONSTANTE.

428. — Travail d'une force constante dont le point d'application se déplace dans la direction de la force.

Supposons d'abord un point matériel parcourant la droite XY (fig. 213) sous l'action d'une force constante dirigée suivant XY et dans le sens du déplacement du point.

Fig. 213.

On appelle TRAVAIL DE LA FORCE, *pour amener le point matérie de* A *en* B, *le produit de* AB *en mètres par l'intensité de la force en kilogrammes.*

Ainsi, en supposant que la force ait une intensité de 20 kilogr. et que la longueur AB soit 30 mètres, le travail de la force sera :

$$30 \times 20 = 600.$$

Dans le cas très particulier que nous venons de supposer, la force agit dans le sens du déplacement du point, elle contribue à augmenter le chemin parcouru. On dit qu'elle est MOUVANTE.

Considérons, au contraire, le cas où la force constante agit en sens inverse du déplacement rectiligne du point matériel : quand le point se déplace de A en B (fig. 213), la force agit dans le sens BA, ce qu'on exprime en disant que la force est RÉSISTANTE ; alors le travail de la force est une quantité négative qui a pour valeur absolue le produit de AB par l'intensité de la force ; dans l'hypothèse des données numériques faites plus haut, ce travail sera :

$$-600.$$

429. — Travail d'une force constante dont le point d'application a un déplacement rectiligne qui n'est pas dans la direction de la force.

Lorsque le point matériel qui se déplace suivant XY (fig. 214), *est sollicité par une force constante* F *dont la direction ne coïncide pas avec* XY, *on appelle* TRAVAIL DE LA FORCE *relatif au déplacement* AB, *le produit de* AB *par l'intensité de la force et par le cosinus de l'angle* α *que font les directions* AB *dans le sens du déplacement et* AC *dans le sens d'action de la force.*

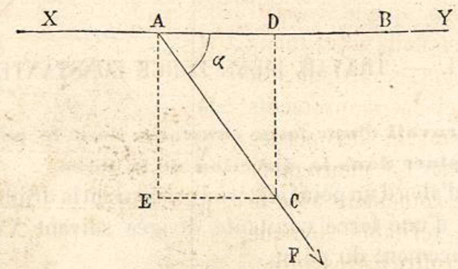

Fig. 214.

Ainsi, par définition, on a :

$$T = AB \times F \times \cos \alpha.$$

Il résulte de cette définition que le travail de la force est positif ou négatif suivant que l'angle α est aigu ou obtus : la définition donnée dans le cas simple que nous avons considéré en premier lieu, rentre visiblement dans cette définition plus générale ; ainsi, lorsque nous considérions (428) le cas de la force résistante, l'angle α était de 180° et le signe résultait de la valeur (— 1) de $\cos \alpha$.

Réciproquement d'ailleurs, on peut considérer la définition du travail dans ce cas plus général comme une sorte de conséquence de la première idée du travail ; en effet, la force F (fig. 214) peut être décomposée en deux, l'une AE perpendiculaire à AB, l'autre AD suivant AB : il est visible que la composante AE n'a aucune part dans le déplacement suivant AB, et que la seule partie de la force qui a une action sur le mouvement est la composante AD ou $F \cos \alpha$: on peut donc dire ainsi que le travail de la force se réduit au travail de sa projection sur XY.

430. — *Travail d'une force constante dont le point d'application a un déplacement curviligne.

Soit XY la direction constante de la force, et soit AB (fig. 215) le chemin curviligne parcouru par le point d'application ; nous nous proposons de définir le travail de la force d'intensité constante F, lorsque le point d'application se déplace de A en B.

Nous partageons l'arc AB en n arcs AA_1, A_1A_2, ..., qui tendent tous vers zéro quand n croît sans limite, et nous substituons au mouvement curviligne du point matériel des mouvements rectilignes suivant les cordes AA_1, A_1A_2, ... Le mouvement ainsi modifié coïncidera avec le mouvement véritable lorsque nous ferons croître n sans limite.

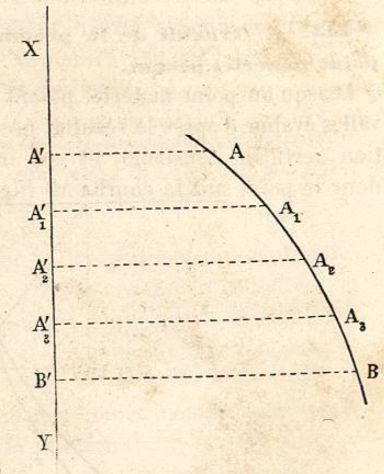

Fig. 215.

Nous appellerons alors TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE de la force le travail relatif à l'un quelconque de ces déplacements rectilignes en attribuant à n une valeur variable croissant sans limite.

Le travail de la force est, par définition, la limite de la somme des travaux élémentaires.

Or, en projetant les points A, $A_1 A_2$ .... B sur la direction constante XY de la force, les travaux élémentaires ont pour somme :

$$F \times A'A'_1 + F \times A'_1A'_2 + \ldots . + F \times A'_{n-1}B',$$

ou :

$$F \times A'B'.$$

La limite de cette somme, quand n croît sans limite, est donc le produit :

$$F \times A'B',$$

par suite, le travail est le produit de l'intensité de la force par la projection de l'arc AB *sur la direction de la force.*

431. — REMARQUE I. — Le travail, dans ce cas, ne dépend donc pas de la ligne AB, mais uniquement de sa projection sur XY : ainsi le travail eût été le même si le point matériel avait parcouru la droite AB.

432. — REMARQUE II. — Le théorème ne suppose pas la trajectoire plane : la démonstration est indépendante de cette hypothèse.

433. — * Travail de la pesanteur dans le mouvement d'un point matériel pesant.

Loasqu'un point matériel pesant se déplace sur une ligne, le travail s'évalue d'après le résultat précédent, car la force a une direction verticale constante, et son intensité est aussi constante : si donc le point suit la courbe AB (fig. 216), le travail de la pesanteur

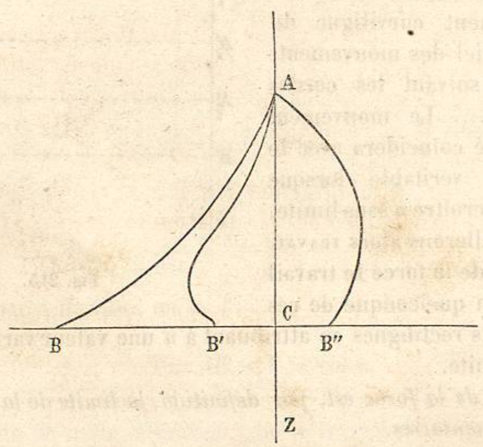

Fig. 216.

relatif au déplacement vertical AC de ce point sera :

$$P \times AC.$$

Il ne dépend donc pas de la ligne suivie par le point matériel, mais uniquement de la distance verticale AC.

Il est d'ailleurs bien clair que si le point matériel se meut de B en A, en suivant une ligne quelconque, le travail de la pesanteur sera égal et de signe contraire au précédent.

Enfin ce résultat important ne suppose pas la courbe AB plane.

434. — Unité de travail. — Kilogrammètre. *L'unité de travail choisie est le travail nécessaire pour élever un kilogramme à la hauteur de un mètre.*

C'est ce qu'on appelle KILOGRAMMÈTRE.

Il faut remarquer que dans cette définition il n'est pas question du chemin suivi pour le déplacement du poids ; cela tient à la propriété précédente qui nous a montré que ce travail ne dépendait pas de la ligne parcourue, mais seulement du déplacement vertical.

Nous voyons aussi que le temps employé pour le déplacement du poids ne figure pas dans les définitions précédentes. Le travail mécanique d'une force ne dépend pas du temps.

435. — * Travail de la résultante de plusieurs forces. *Le travail de la résultante de plusieurs forces constantes appliquées à un point matériel est la somme des travaux des composantes.*

1° — Considérons d'abord le cas où le déplacement du point matériel est rectiligne : soit $F, F', F'', \ldots.$ les forces qui le sollicitent et $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots.$ les angles constants qu'elles font avec la direction du déplacement ; soit R la résultante et λ l'angle qu'elle fait avec la direction du déplacement.

En projetant sur cette direction les forces composantes et la résultante, nous savons que l'on a la relation :

$$R \cos \lambda = F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + F'' \cos \alpha'' + \ldots.$$

Multiplions les deux membres par le déplacement e du point matériel, nous obtenons :

$$Re \cos \lambda = Fe \cos \alpha + F'e \cos \alpha' + F''e \cos \alpha'' + \ldots.$$

c'est-à-dire :

$$T.R = T.F + T.F' + T.F'' + \ldots.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

436. — 2° — En second lieu, considérons le cas où les forces étant constantes, le déplacement du point est curviligne.

Nous remarquons que le travail d'une force F dans le déplacement curviligne AMB (fig. 217) étant le produit de F par la projection de AB sur la direction de F, est aussi le produit de la droite AB par la projection de F sur cette droite ; or on a sur tout axe, et aussi sur AB :

$$p^{on} R = p^{on} F + p^{on} F' + p^{on} F'' + \ldots.$$

d'où :

$$AB \times p^{on} R = AB \times p^{on} F + AB \times p^{on} F' + AB \times p^{on} F'' + \ldots.$$

c'est-à-dire :

$$T.R = T.F + T.F' + T.F'' + \dots$$

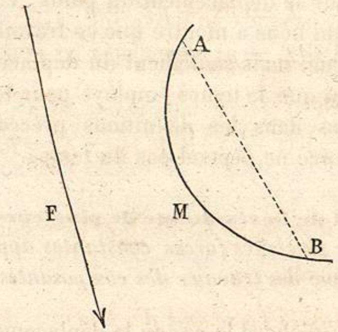

Fig. 217.

Le théorème est donc général, tant que les forces sont constantes.

***437. — Travail de la pesanteur dans le mouvement d'un corps pesant.**

Lorsqu'un corps solide pesant se déplace dans l'espace, la somme des travaux des forces de pesanteur relatifs à tous les points matériels qui le composent est égale au travail du poids de ce corps relatif au déplacement de son centre de gravité.

Soit, en effet, p le poids de l'un quelconque des points matériels, et z_0, z_1 les distances de ce point à un même plan horizontal dans deux positions déterminées du corps solide ; le travail de la pesanteur relatif à ce point matériel est :

$$p\,(z_0 - z_1).$$

La somme des travaux de toutes les forces de pesanteur sera donc :

$$\sum p\,(z_0 - z_1),$$

en étendant le signe Σ à tous les points matériels pesants dont se compose le corps considéré.

Soit alors P le poids du corps, et Z_0, Z_1 les distances de son centre de gravité au plan déjà considéré ; le travail de la pesanteur relatif à ce point, sollicité par la force P, sera donc :

$$P \times (Z_0 - Z_1).$$

Or, en appliquant le théorème des moments des forces parallèles

par rapport au plan horizontal auquel nous rapportons les positions du corps, nous avons :

$$P \times Z_0 = pz_0 + p'z'_0 + p''z''_0 + \dots$$
$$P \times Z_1 = pz_1 + p'z'_1 + p''z''_1 + \dots$$

d'où nous déduisons :

$$P \times (Z_0 - Z_1) = p\,(z_0 - z_1) + p'\,(z'_0 - z'_1) + p''\,(z''_0 - z''_1) + \dots$$

et par suite :

$$P \times (Z_0 - Z_1) = \sum p\,(z_0 - z_1).$$

Ce qu'il fallait prouver.

***438. — Corollaire.** *La somme des travaux des forces de pesanteur dans le déplacement d'un corps solide pesant est le produit du poids de ce corps par le déplacement vertical de son centre de gravité.*

Il faut remarquer que ce travail ne dépend pas des positions intermédiaires occupées par ce corps, mais uniquement du déplacement vertical du centre de gravité.

Le travail est le même que si toutes les masses des points matériels étaient concentrées au centre de gravité.

§ II. — * TRAVAIL D'UNE FORCE VARIABLE.

439. — Travail élémentaire. Soit AB la trajectoire d'un point matériel (fig. 218) sollicité par une force variable en intensité et en direction.

Supposons un point A_1 de cette trajectoire dont la distance au point A tende vers zéro : en représentant par a_1 la distance rectiligne AA_1, par F_1 la valeur de l'intensité de la force lorsque le point matériel est en A, et par α_1 l'angle que fait sa direction avec la droite AA_1 ; le produit

$$a_1 F_1 \cos \alpha_1$$

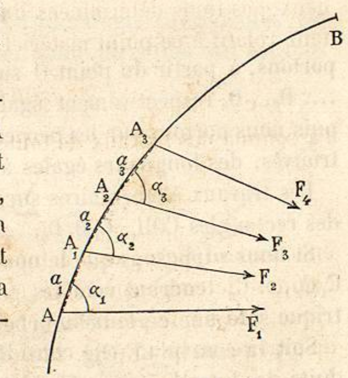

Fig. 218.

est le TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE de la force variable ; c'est donc une quantité qui tend vers zéro quand le point A_1 tend vers le point A.

440. — Travail de la force variable. Soit AB l'arc parcouru par le point matériel : nous partageons cet arc en n parties, telles que chacune de ces longueurs ait zéro pour limite quand n croît sans limite; nous représentons par A_1, A_2, ... A_{n-1} B les points de division, et par $a_1\, a_2 \ldots.\, a_n$ les longueurs des cordes de ces arcs :

Le travail de la force relatif au déplacement considéré du point matériel est la limite de la somme des travaux élémentaires :

$$\left(a_1F_1\cos\alpha_1 + a_2F_2\cos\alpha_2 + a_3F_3\cos\alpha_3 + \ldots. + a_nF_n\cos\alpha_n\right),$$

quand n croît sans limite.

441. — Représentation graphique du travail d'une force variable.

Nous traçons deux axes rectangulaires OX, OY (fig. 219) et nous

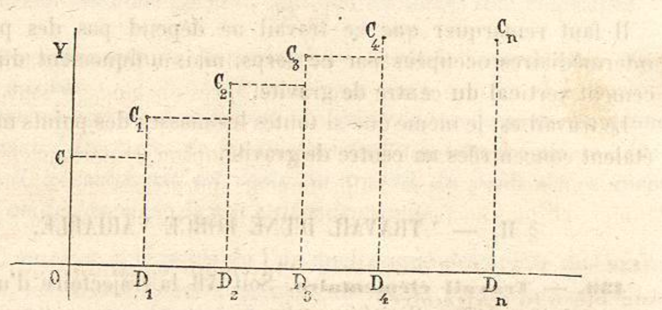

Fig. 219.

portons, à partir du point O sur OX, les longueurs OD_1, D_1D_2, D_2D_3, ... $D_{n-1}\,D_n$ respectivement égales aux droites $a_1\,a_2 \ldots.\, a_n$ (fig. 218), puis nous portons sur les perpendiculaires à OX menées par les points trouvés, des longueurs égales à $F_1\cos\alpha_1$, $F_2\cos\alpha_2$, ..., $F_n\cos\alpha_n$.

Les travaux élémentaires successifs sont représentés par les aires des rectangles COD_1, $C_1D_1D_2$, ... $C_{n-1}D_{n-1}D_n$.

Si nous supposons que le nombre n croisse sans limite, les points $C_1\,C_2 \ldots.\, C_n$ tendront vers des positions limites, dont le lieu géométrique sera une certaine courbe que l'on peut construire par points.

Soit la courbe CE (fig. 220) dans laquelle OC et ED sont les produits des intensités F et F' de la force, aux moments où le mobile passe en A et B (fig. 218), par les cosinus des angles α et α' que fait la force avec les tangentes en A et B à la trajectoire.

Nous admettons que la somme des aires des rectangles (fig. 219)

a pour limite l'aire S comprise entre l'arc CE, les ordonnées OC, DE et l'axe OX.

Il est alors évident que le travail défini (438) étant la limite de la somme des rectangles dont nous venons de parler, est précisément l'aire S.

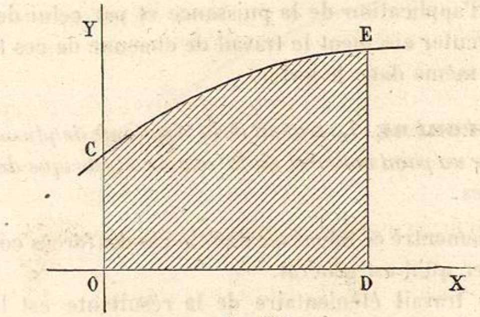

Fig. 220.

De cette façon l'évaluation du travail d'une force constante est ramenée à la mesure d'une aire, ou, d'après un langage convenu, à une *quadrature*.

Il faut citer les formules de Thomas Simpson et de Poncelet, qui conduisent à des valeurs suffisamment approchées des aires ainsi définies, et dont on trouvera le détail à la fin de ce chapitre.

442. — Travail d'une force d'intensité constante qui reste tangente à la trajectoire.

Un cas particulier fréquent des considérations précédentes est celui où la force, d'intensité constante, a une direction qui est toujours tangente à la courbe que décrit le point matériel.

Il est facile de voir que *le travail est alors le produit de l'intensité de la force par la longueur de l'arc parcouru.*

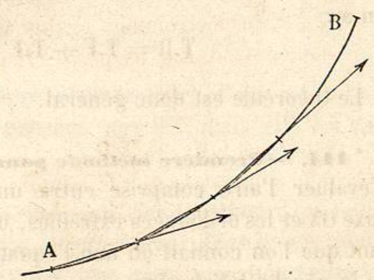

Fig. 221.

En nous reportant à la définition générale donnée ci-dessus, nous voyons que dans ce cas (fig. 221) les angles $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots.\, \alpha_n$ tendent tous vers zéro, les cosinus ont donc l'unité pour limite, et par suite le travail est la limite du produit :

$$P\,(a_1 + a_2 \ldots. + a_n).$$

Or, par définition, la parenthèse a pour limite l'arc AB, quand n croît sans limite; donc le travail de la force est :

$$F \times \text{arc AB}.$$

Ainsi, dans le treuil, il suffit de connaître les chemins parcourus par le point d'application de la puissance et par celui de la résistance pour calculer aisément le travail de chacune de ces forces.

Il en est de même dans le levier.

443. — THÉORÈME. *Le travail de la résultante de plusieurs forces qui agissent sur un point matériel est la somme algébrique des travaux des composantes.*

Nous avons démontré ce théorème dans le cas des forces constantes; on peut prouver qu'il est général.

En effet, le travail élémentaire de la résultante est la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes, puisque dans la définition du travail élémentaire d'une force on suppose celle-ci constante; donc, en désignant par $\tau.F$ le travail élémentaire d'une force, on a :

$$\tau.R = \tau.F + \tau.F' + \tau.F'' + \dots..$$

R étant la résultante des forces F, F′, F″.....

Par suite :

$$\sum \tau.R = \sum \tau.F + \sum \tau.F' + \sum \tau.F'' + \dots..$$

La limite du second membre étant la somme des limites de ses termes, qui sont en nombre fini égal au nombre des composantes, on a :

$$T.R = T.F + T.F' + T.F'' + \dots..$$

Le théorème est donc général.

***444. — Première méthode pour la quadrature.** Lorsqu'il s'agit d'évaluer l'aire comprise entre un arc de courbe AM (fig. 222), l'axe OX et les ordonnées extrêmes, on doit distinguer deux cas, suivant que l'on connaît ou non l'équation générale qui lie l'ordonnée de la courbe à l'abscisse.

Dans le premier cas on est conduit par le calcul infinitésimal à rechercher une fonction qui s'appelle l'*intégrale* de l'expression de y en fonction de x, question que nous ne pouvons indiquer ici.

Dans le second cas, ne connaissant que quelques valeurs corres-

pondantes de l'ordonnée et de l'abscisse, on est amené à une évaluation approximative, laquelle se pratique encore lorsqu'on ne peut obtenir, dans le premier cas, la fonction inverse dont nous avons parlé.

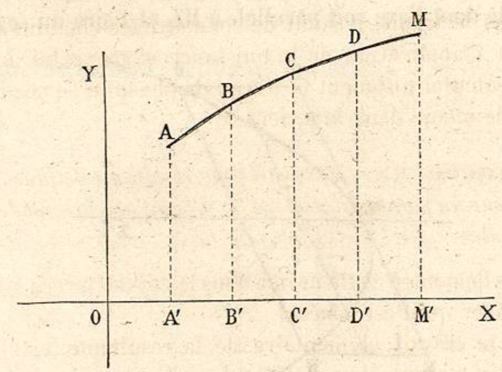

Fig. 222.

Voici une première méthode approchée qui rend des services :

Supposons A′M′ (fig. 222) partagé en n parties égales : A′B′, B′C′, C′D′ ..., soit $a = \frac{A'M'}{n}$, et soient $y_1\, y_2 \dots y_{n+1}$ les ordonnées correspondantes aux points de division A′, B′, C′.., M. Nous allons substituer à la courbe AM la ligne brisée ABC... M qui forme avec les ordonnées des trapèzes dont la somme des aires est :

$$S = \frac{a}{2}\left(y_1 + y_2\right) + \frac{a}{2}\left(y_2 + y_3\right) + \dots.. + \frac{a}{2}\left(y_n + y_{n+1}\right)$$

ou :

$$S = \frac{a}{2}\left[y_1 + 2(y_2 + y_3 + \dots.. + y_n) + y_{n+1}\right]$$

On prend alors S pour valeur approchée de l'aire. Cette valeur est par défaut quand la courbe est concave vers OX, mais elle est par excès dans le cas contraire.

*** 445. — Méthode de Thomas Simpson.** Cette méthode, qui fournit un résultat plus approché que la précédente dans le cas général, repose sur les principes suivants, que nous admettons dans ce cours :

I. — *Par trois points donnés on peut faire passer une parabole dont l'axe a une direction donnée.*

II. — *L'aire du segment de parabole compris entre un arc et sa* *corde est les deux tiers du parallélogramme dont deux côtés opposés sont la corde et la tangente parallèle, les autres côtés étant parallèles à l'axe.*

Ainsi, par les trois points A, B, C (fig. 223), on peut faire passer une parabole dont l'axe soit parallèle à MZ, et l'aire du segment BMC

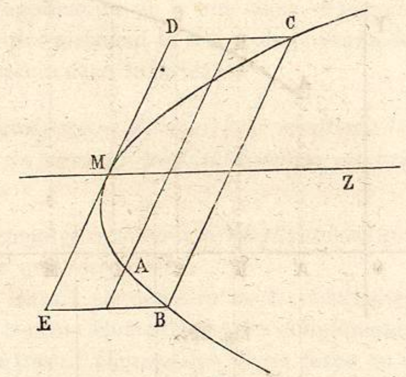

Fig. 223.

est les deux tiers du parallélogramme BEDC dans lequel DE est la tangente parallèle à BC, et dont les côtés BE et CD sont parallèles à MZ.

Nous supposons alors la projection sur OX de l'arc de courbe (fig. 224) partagée en un nombre pair $2n$ de parties égales : soit a la

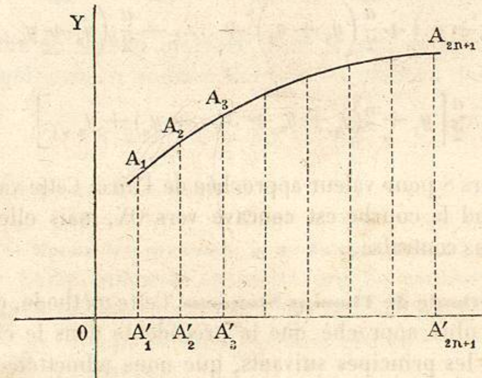

Fig. 224.

chaque

longueur de cette partie; nous substituons à l'arc $A_1A_2A_3$ l'arc de parabole qui passe par ces points et dont l'axe est parallèle à OY.

L'aire du trapèze mixtiligne $A'_1A_1A_2A_3A'_3$ (fig. 225) se compose de l'aire du segment parabolique $A_1A_2A_3$ qui est :

$$\frac{2}{3}A'_1A'_3 \times A_2B$$

et de l'aire du trapèze rectiligne, qui est :

$$A'_1A'_3 \times A'_2B.$$

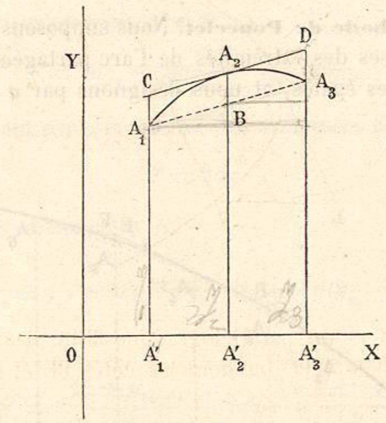

Fig. 225.

Cette aire est donc :

$$\frac{2}{3} \times 2a\left(y_2 - \frac{y_1+y_3}{2}\right) + 2a \times \frac{y_1+y_3}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{a}{3}\left(y_1 + 4y_2 + y_3\right).$$

En répétant la même évaluation pour les trapèzes suivants (fig. 224), nous obtenons :

$$S = \frac{a}{3}\Big[(y_1+4y_2+y_3)+(y_3+4y_4+y_5)+\ldots+(y_{2n-1}+4y_{2n}+y_{2n+1})\Big].$$

et par suite :

$$S = \frac{a}{3} \times \left\{\begin{array}{l} y_1 + y_{2n+1} \\ + 4(y_2+y_4+y_6+\ldots+y_{2n}) \\ + 2(y_3+y_5+\ \ldots\ +y_{2n-1}) \end{array}\right.$$

Telle est la formule due à Thomas Simpson. Il faut remarquer qu'elle suppose connues un nombre impair d'ordonnées partageant en un nombre pair de parties égales la différence des abscisses des points extrêmes. Pour satisfaire à cette condition, on tracera par points une courbe passant par les points connus. On partagera la différence des abscisses extrêmes en $2n$ parties égales, et l'on mesurera les ordonnées des points de division d'après la courbe construite.

* **446. — Méthode de Poncelet.** Nous supposons encore la différence des abscisses des extrémités de l'arc partagée en un nombre pair $2n$ de parties égales, et nous désignons par a la longueur de cette partie.

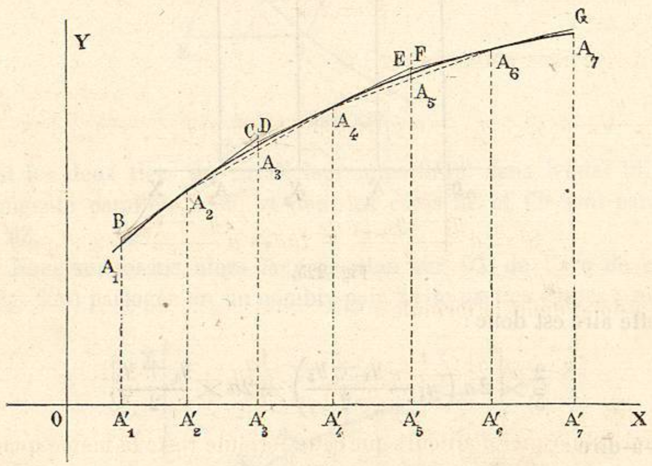

Fig. 226.

Nous traçons la tangente à la courbe figurée aux points dont les ordonnées sont d'ordre pair, et nous limitons cette tangente aux ordonnées précédente et suivante : la somme S′ des trapèzes (fig. 226) :

$$A'_1BCA'_3, \quad A'_3DEA'_5, \quad \ldots..$$

est visiblement supérieure à l'aire cherchée, la courbe étant supposée concave vers OX.

Puis nous traçons A_1A_2, A_2A_4, A_4A_6... en sautant chaque fois, à partir de A_2, une ordonnée de rang impair.

La somme S″ des trapèzes :

$$A'_1A_1A_2A'_2, \quad A'_2A_2A_4A'_4, \quad \ldots..$$

est inférieure à l'aire cherchée dans le cas de la figure.

La méthode de Poncelet consiste à prendre pour valeur approchée de l'aire :

$$S = \frac{1}{2}\left(S' + S''\right);$$

Calculons les deux sommes S′ et S″ :

$$S' = 2ay_2 + 2ay_4 + \ldots + 2ay_{2n},$$

ou, en représentant par σ la somme des ordonnées de rang pair :

$$S' = 2a\sigma.$$

De même nous obtenons :

$$S'' = a \times \frac{y_1 + y_2}{2} + a(y_2 + y_4) + a(y_4 \times y_6) + \ldots + a(y_{2n-2} + y_{2n}) + a\frac{y_{2n} + y_{2n+1}}{2}.$$

ou :

$$S'' = a\frac{y_1 + y_{2n+1}}{2} + 2a\sigma - a\frac{y_2 + y_{2n}}{2}.$$

On a donc enfin la formule :

$$S = a\left[2\sigma - \frac{1}{4}(y_2 + y_{2n}) + \frac{1}{4}(y_1 + y_{2n-1})\right].$$

Il faut remarquer d'ailleurs que cette formule reste la même quand on suppose la courbe convexe vers OX.

447. — En résumé, on préfère cette dernière méthode qui exige moins d'ordonnées que la formule de Simpson, car ici nous n'avons employé que deux ordonnées de rang impair. L'approximation est aussi plus grande en employant la formule de Poncelet, toutes choses égales d'ailleurs.