§ III. — FORCE VIVE.

448. — Définition. *On appelle* FORCE VIVE *d'un point matériel à l'époque t le produit de la masse de ce point par le carré de la vitesse qu'il possède à ce moment.*

On appelle aussi PUISSANCE VIVE, la moitié de la force vive.

Ainsi, un point matériel pesant 10 kilogrammes et tombant en chute libre d'une hauteur de 30 mètres, possède à ce moment une force vive qui a pour valeur :

$$\frac{10}{g} \times 2g \times 30 = 600.$$

Il faut remarquer qu'il en sera de même s'il se déplace sur un plan parfaitement poli d'une inclinaison arbitraire, lorsqu'il sera descendu de la hauteur verticale de 30 mètres.

449. — THÉORÈME. *Le travail d'une force sur un point matériel pour l'amener d'une position* A *à une position* B, *est égal à la moitié de l'accroissement (positif ou négatif) de la force vive de ce point matériel.*

C'est-à-dire que si la masse du point est m et si les vitesses sont V_0 et V quand il est en A et B, le travail de la force aura pour expression :

$$\text{T.F} = \frac{mV_0^2 - mV^2}{2}$$

450. — 1° — Nous supposons d'abord que le mouvement du point soit *rectiligne*, et que la force *constante* agisse suivant la direction du déplacement.

Fig. 227.

En représentant par t le temps employé à parcourir AB (fig. 227)

et par γ l'accélération due à l'action de la force, on a :

$$\begin{cases} V = V_0 + \gamma t, \\ AB = V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2, \end{cases}$$

or :

$$V^2 = V_0^2 + 2V_0\gamma t + \gamma^2 t^2$$

ou :

$$V^2 - V_0^2 = 2\gamma\left(V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2\right);$$

donc :

$$\frac{mV^2 - mV_0^2}{2} = F \times AB,$$

car :

$$F = m\gamma.$$

Le théorème est donc démontré dans le cas que nous étudions, puisque (F × AB) est le travail de la force.

***451. — 2° —** Si la force *constante* n'a pas la *même direction* que le déplacement *rectiligne* du point matériel, le théorème subsiste encore.

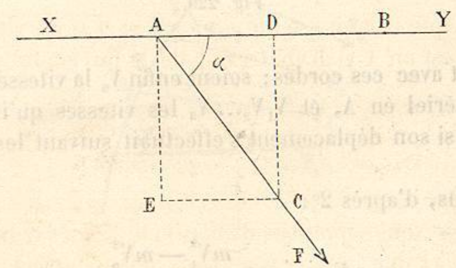

Fig. 228.

En effet, le travail de la force F (fig. 228), quand le point matériel se déplace de A en B, est :

$$F \times AB \cos\alpha.$$

D'autre part, la force qui produit le mouvement est la projection

($F \cos\alpha$) de F sur AB, et le travail de cette force qui agit dans la direction du déplacement est, d'après 1° :

$$AB \times (F \cos \alpha) = \frac{mV^2 - mV_0^2}{2}.$$

C'est précisément la relation qu'il fallait prouver.

***452.** — Supposons que la force restant *constante* le déplacement du point soit *curviligne*.

Nous partageons l'arc AB (fig. 229) en n parties telles que chacune tende vers zéro quand n croît sans limite ; soient $a_1 a_2 \ldots a_n$ les longueurs des cordes de ces arcs, $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ les angles que la force

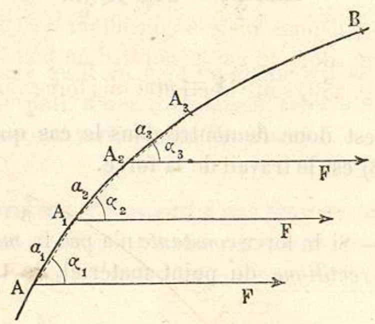

Fig. 229.

constante fait avec ces cordes ; soient enfin V_0 la vitesse que possède le point matériel en A, et $V_1 V_2 \ldots V_n$ les vitesses qu'il posséderait en $A_1 A_2 \ldots$ B si son déplacement s'effectuait suivant les cordes considérées.

Nous aurons, d'après 2° :

$$a_1 F \cos \alpha_1 = \frac{mV_1^2 - mV_0^2}{2}$$

$$a_2 F \cos \alpha_2 = \frac{mV_2^2 - mV_1^2}{2}$$

. . . .

. . . .

$$a_n F \cos \alpha_n = \frac{mV_n^2 - mV_{n-1}^2}{2}$$

En ajoutant membre à membre, et représentant par S la somme des travaux élémentaires de la force, on a visiblement :

$$S = \frac{mV_n^2 - mV_0^2}{2}.$$

Faisons croître n sans limite, nous savons que la limite de S est le travail de F, et en même temps V_n a pour limite V.

On a donc, en définitive :

$$T.F = \frac{mV^2 - mV_0^2}{2}.$$

***453.** — 4° — Il nous reste à considérer le cas où la force est variable ; prenons alors le cas général d'un point matériel parcourant l'arc AB (fig. 230) sous l'action d'une force variable F.

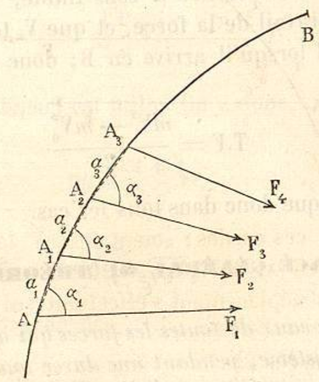

Fig. 230.

Nous partageons AB en n arcs tels que chacun tende vers zéro quand n croît sans limite ; soient $F_1 F_2 F_3 \ldots F_n$ les valeurs de la force quand le point matériel est en $A A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$, et soient $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ les angles qu'elle fait avec les cordes $AA_1, A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.

Le déplacement étant supposé avoir lieu suivant ces cordes, et la force restant constante dans chacun de ces mouvements, on a :

$$a_1F_1 \cos \alpha_1 = \frac{mV_1^2 - mV_0^2}{2}$$

$$a_2F_2 \cos \alpha_2 = \frac{mV_2^2 - mV_1^2}{2}$$

$$a_3F_3 \cos \alpha_3 = \frac{mV_3^2 - mV_2^2}{2}$$

. . . .

. . . .

$$a_nF_n \cos \alpha_n = \frac{mV_n^2 - mV_{n-1}^2}{2}$$

En ajoutant membre à membre, et représentant par S la somme des travaux élémentaires de la force, nous obtenons visiblement :

$$S = \frac{mV_n^2 - mV_0^2}{2}.$$

Par suite, en faisant croître n sans limite, nous savons que la limite de S est le travail de la force, et que V_n tend vers la vitesse V du point matériel lorsqu'il arrive en B; donc on a, dans le cas le plus général :

$$T.F = \frac{mV^2 - mV_0^2}{2}.$$

L'énoncé s'applique donc dans tous les cas.

*** 454. — ÉNONCÉ GÉNÉRAL DU THÉORÈME DES FORCES VIVES.**

La somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur les différents points d'un système, pendant une durée quelconque, est égale à la demi-somme des accroissements des forces vives de tous ces points.

Cela signifie que si l'on représente par m la masse de l'un quelconque des points matériels qui composent un système, par v_0 et v ses vitesses au commencement et à la fin d'un intervalle de temps quelconque ; et si l'on désigne par TF le travail de l'une quelconque des forces qui sollicitent ces points, on aura l'équation :

$$\sum TF = \sum \frac{mv^2 - mv_0^2}{2}$$

en entendant par $\sum$ la somme des quantités analogues à celles que nous écrivons, étendue à toutes les forces et à tous les points du corps.

La somme des travaux des forces qui sollicitent un système dont les points sont animés de mouvements uniformes, est nulle à tout instant.

***455. — Conséquences.** — Nous avons montré (426) que si un point matériel descend le long d'un plan incliné sans vitesse initiale, d'une hauteur verticale égale à h, sa vitesse est toujours $\sqrt{2gh}$ quelle que soit l'inclinaison du plan ; nous pouvons maintenant généraliser ce résultat, et dire que *cette vitesse sera encore $\sqrt{2gh}$, quelle que soit la ligne droite ou courbe que suivra le point pour descendre de la hauteur verticale h.*

En effet, dans ce mouvement du point matériel dont le poids est P, le travail de la pesanteur est Ph; d'autre part, en représentant par V la vitesse acquise à cette époque du mouvement, le demi-accroissement de force vive est :

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2,$$

puisque la vitesse au départ est nulle. On a donc, d'après le principe des forces vives :

$$Ph = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2,$$

d'où :

$$V = \sqrt{2gh}.$$

C'est ce qu'il fallait prouver.

456. — Nous pouvons dire, alors, que ce point matériel a acquis une vitesse dont l'intensité lui permettra de remonter à la hauteur h en suivant le chemin que l'on voudra.

Soit en effet une ligne courbe continue, contenue dans un plan vertical (fig. 231) : supposons un point matériel pesant assujetti à rester sur cette ligne et abandonné à lui-même au point A ; il descendra jusqu'au point le plus bas B de cette ligne et il aura à ce moment une vitesse égale à $\sqrt{2gh}$, en représentant par h la distance verticale des points A, B.

Possédant une vitesse le point va continuer à se mouvoir, et par suite va remonter sur la courbe : soient A′ le point le plus élevé qu'il atteigne ainsi, et h' sa hauteur au-dessus du point B. La vitesse sera donc nulle en ce point A′, et comme elle était nulle en A, la somme des travaux de la pesanteur est nulle. Or, ces travaux sont :

$$Ph \quad \text{et} \quad -Ph'.$$

Donc il faut avoir $h=h'$; et par suite le point A′ est dans le plan horizontal passant par A.

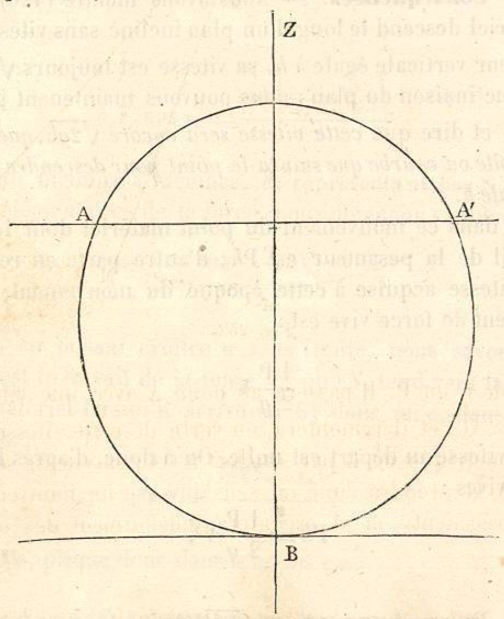

Fig. 231.

Arrivé en A′, le point matériel sollicité par la pesanteur et sans vitesse initiale va redescendre, et revenir au point A; il oscillera donc indéfiniment de A en A′ et de A′ en A.

*457. — **PENDULE SIMPLE.** Soit un point matériel pesant lié à un point fixe O par une barre rigide non pesante. Il est visible que la position d'équilibre stable d'un pareil système est atteinte quand la droite OA est verticale (fig. 232), le point A étant au-dessous du point O.

Supposons qu'on écarte ce pendule simple de sa position d'équilibre et que l'on place le point A en B, sur la circonférence de centre O et de rayon $OA=l$.

En abandonnant le pendule à lui-même, le point matériel sollicité par la pesanteur va descendre le long de l'arc de cercle BA; sa vitesse en un point quelconque M sera la même que s'il tombait

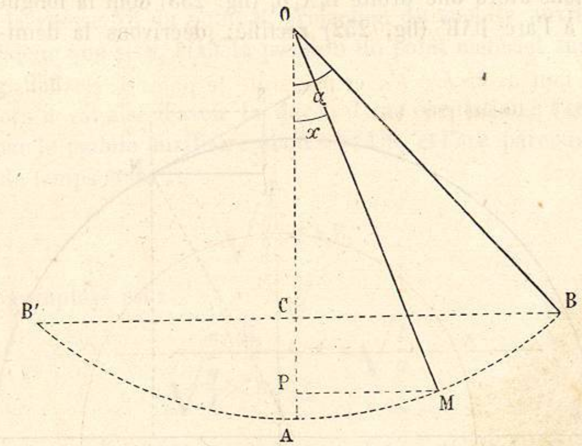

Fig. 232.

librement de C en P. Il passera au point A avec une vitesse maximum $\sqrt{2g\times AC}$, et il remontera, en vertu de cette vitesse, jusqu'au point B′ symétrique de B par rapport à OA; sa vitesse sera nulle à ce moment, il prendra donc en sens inverse un mouvement identique au précédent, et il exécutera indéfiniment des oscillations identiques.

*458. — **Durée d'une petite oscillation du pendule simple.** Nous nous proposons de trouver une formule donnant la durée d'une petite oscillation du pendule simple, et nous appelons petite oscillation celle dont l'amplitude α ne dépasse pas 5°, de sorte que l'on puisse sans erreur sensible confondre l'arc AB (fig. 232) avec sa corde.

La vitesse en un point quelconque M de la trajectoire qui correspond à l'angle $AOM=x$, est la même que si le corps tombait librement de C en P; donc :

$$V^2=2g\times CP,$$

or :

$$CP=AC-AP=\frac{\overline{AB}^2-\overline{AM}^2}{2l}$$

et, par suite :

$$V^2 = \frac{g}{l}\left[\overline{\text{arc } AB}^2 - \overline{\text{arc } AM}^2\right].$$

Prenons alors une droite $B'_1A_1B_1$ (fig. 233) dont la longueur soit égale à l'arc BAB′ (fig. 232) rectifié; décrivons la demi-circon-

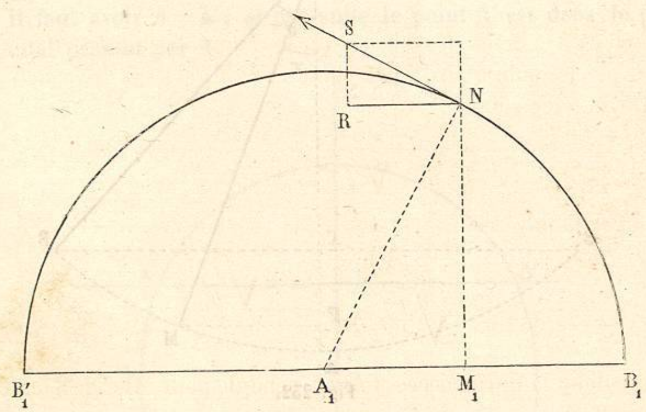

Fig. 233.

férence de diamètre $B_1B'_1$, et supposons un point matériel parcourant cette circonférence d'un mouvement uniforme de vitesse :

$$\sqrt{\frac{g}{l} \times \overline{A_1B_1}^2}.$$

Nous allons montrer que la projection de ce mobile sur $B_1B'_1$ se meut comme le pendule simple considéré.

En effet, la vitesse NS du mobile auxiliaire, lorsqu'il est en N, dirigée suivant la tangente à la circonférence, se décompose en deux, dont l'une est parallèle à A_1B_1 : soit NR : les triangles semblables NRS, A_1M_1N donnent :

$$\frac{NR}{NS} = \frac{NM_1}{NA_1}$$

d'où :

$$\overline{NR}^2 = \frac{\overline{NM_1}^2}{\overline{NA_1}^2} \times \frac{g}{l} \times \overline{A_1B_1}^2,$$

ce qui se réduit à :

$$\overline{NR}^2 = \frac{g}{l} \times \overline{NM}^{21}$$

ou :

$$\overline{NR}^2 = \frac{g}{l} \times (\overline{A_1B_1}^2 - \overline{A_1M_1}^2).$$

Donc la vitesse NR du point M_1 projection du mobile auxiliaire a même valeur que si M_1 était la position du point matériel suspendu en O (fig. 232).

Dès lors il est aisé d'avoir la durée d'une oscillation : l'arc parcouru par le mobile auxiliaire étant $\pi \times A_1B_1$ et l'arc parcouru dans l'unité de temps étant :

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \times A_1B_1$$

le temps employé est :

$$\frac{\pi A_1B_1}{\sqrt{\frac{g}{l}} \times A_1B_1} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

C'est donc la durée nécessaire pour aller de B_1 en B'_1 ou de B en B′.

459. — Il faut remarquer que cette durée ne dépend pas de l'amplitude; on exprime ce fait en disant que *les petites oscillations d'un pendule simple sont isochrones.*

Enfin, dans la formule précédente ne figure pas le poids du point matériel : la durée ne dépend que de la distance de ce point au point fixe; elle est proportionnelle à la racine carrée de cette distance.

460. — La formule du pendule peut évidemment servir à mesurer g. Cette méthode a été appliquée par Borda.