forces $F_1, F_2, F_3 \ldots$; appliquons une force F'_1 égale et contraire à F_1, le corps obéira uniquement à l'action de F'_1 : mais, d'autre part, cette force F'_1 tenant en équilibre F_1, nous ne troublerons pas l'état du système en supprimant F_1 et F'_1; donc le corps obéira à l'action

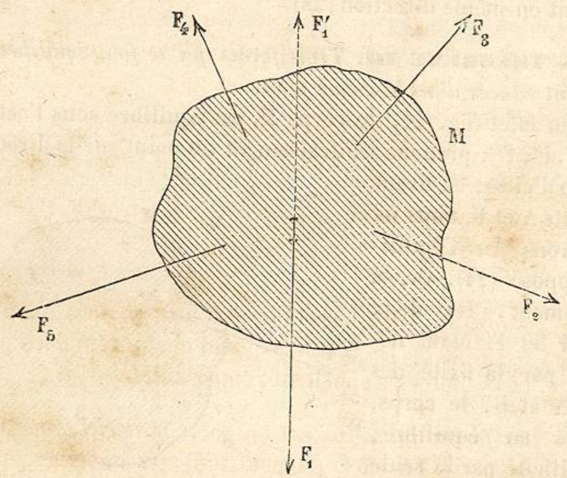

Fig. 12.

simultanée des forces $F_2, F_3 \ldots$ Il en faut conclure que la force F'_1 produit le même effet sur le corps que l'action simultanée des forces $F_2, F_3 \ldots$; donc F'_1 est, par définition, la résultante du système des forces F_2, $F_3 \ldots$, ce qu'il fallait démontrer, puisque F_1 est égale et contraire à F'_1 par hypothèse.

33. — THÉORÈME V. *Deux forces qui ne sont pas dans un même plan n'ont pas de résultante.*

Car si les forces F et F' ont une résultante R, en appliquant au corps une force R' égale et contraire à R, on produira un équilibre entre les forces F, F' et R'. Ces forces sont donc dans le même plan (30). Donc si les forces F et F' ne sont pas dans le même plan, elles ne peuvent admettre de résultante.

CHAPITRE II

FORCES CONCOURANTES

§ I. — COMPOSITION DES FORCES QUI SOLLICITENT UN POINT MATÉRIEL.

34. — Définition. Lorsque les forces d'un système admettent une *résultante*, on dit qu'on les *compose* quand on les remplace par cette résultante, et ces forces s'appellent *composantes*.

35. — *Des forces qui sollicitent un point matériel admettent toujours une résultante.* En effet, on peut toujours imaginer une force qui empêche le point matériel de se déplacer sous l'action des forces qui le sollicitent : cette force tient donc en équilibre les forces considérées, qui admettent dès lors une résultante égale et contraire à cette force.

36. — COMPOSITION DES FORCES AGISSANT EN MÊME DIRECTION.

Premier cas. — Supposons que *deux forces* agissent sur un même point matériel en même direction et *en même sens*. On pourra les remplacer par une force unique égale à leur somme, agissant dans la même direction et dans le même sens que ces composantes.

Soient en effet F et F' les intensités de ces forces et φ une commune mesure contenue m fois dans F et m' fois dans F'. Cela signifie, par définition, que la force F produit le même effet que les m forces égales à φ, agissant dans la même direction et dans le même sens que F : donc par les mêmes raisons, la force $F+F'$ produira le même effet que les $(m+m')$ forces égales à φ, c'est-à-dire que les forces simultanées F et F'.

37. — Deuxième cas. — Considérons des forces en *nombre arbitraire* agissant sur un même point matériel, *en même direction* et *en* *même sens;* on pourra les remplacer par une force unique, agissant en même direction et en même sens que ces composantes, et dont l'intensité sera la somme des intensités.

Soient en effet les forces F_1, F_2, F_3... considérées : les forces F_1 et F_2 pourront être remplacées par $(F_1 + F_2)$, puis les forces $(F_1 + F_2)$ et F_3 pourront être remplacées par $(F_1 + F_2 + F_3)$, et ainsi de suite, en appliquant le résultat du premier cas.

38. — Troisième cas. — Supposons un point matériel sollicité en même direction, mais en sens inverse par les forces F et F′; on les remplacera par une force agissant dans la même direction, dans le sens de la plus grande, ayant pour intensité la différence des intensités.

En effet, soit $F > F'$: l'action de la force F peut être remplacée (premier cas) par l'action simultanée des deux forces F′ et $(F - F')$ agissant dans le même sens que F : or les deux forces égales à F′ agissant en sens inverse sont en équilibre et peuvent être supprimées, il restera donc la force unique $(F - F')$ agissant dans le sens de F.

39. — Quatrième cas. — Enfin, soit le *cas général* d'un point matériel sollicité en même direction par les forces F, F′, F″... qui tirent dans un même sens, et par les forces F_1, F'_1, F''_1... qui tirent dans le sens contraire. Elles admettent pour résultante une force agissant en même direction, dans le sens de celles des forces proposées, dont la somme des intensités est la plus grande, et ayant pour intensité la différence des deux sommes.

En effet, les forces F, F′, F″..., se composent (deuxième cas) en une force unique Φ ayant pour intensité :

$$F + F' + F'' + \ldots$$

De même, les forces qui agissent en sens contraire admettent pour résultante la force Φ_1 dont l'intensité est :

$$F_1 + F'_1 + F''_1 + \ldots$$

Donc le point matériel est sollicité par les deux forces simultanées Φ et Φ_1 qui agissent en même direction mais en sens inverse ; on peut donc (troisième cas) remplacer ces forces, et par suite les proposées, par une force agissant en même direction, dans le sens de la plus grande des forces Φ et Φ_1 et ayant pour intensité leur différence.

Résumé. Si l'on convient de représenter les forces qui agissent

dans la même direction par la notation algébrique, en donnant le signe + aux forces qui tirent dans un sens, et le signe — à celles qui agissent en sens inverse, la résultante sera représentée en grandeur et en signe par la somme algébrique des composantes.

40. — COMPOSITION DE DEUX FORCES CONCOURANTES. Pour arriver au théorème qui donne la résultante de deux forces concourantes, nous démontrerons les quatre lemmes suivants.

41. — Lemme I. — *La résultante de deux forces concourantes est située dans le plan de ces forces.*

Soient en effet (fig. 13) les deux forces F et F′ sollicitant le point A; soit R leur résultante : si les directions de ces trois forces ne sont pas dans le même plan, nous considérons un plan passant par le point A et laissant d'un côté la force R et de l'autre les forces F et F′.

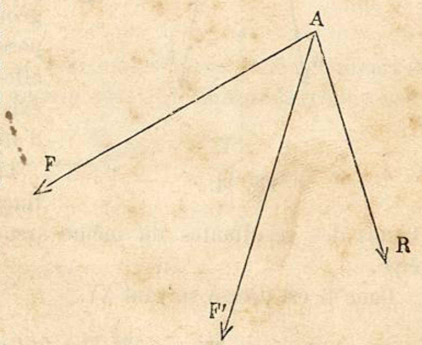

Fig. 13.

Nous remarquons alors que le point matériel A est sollicité par les forces F et F′ du côté du plan où ces forces agissent, tandis que la résultante R, qui doit produire le même effet, tend à déplacer le point A de l'autre côté du plan.

Il faut en conclure que le plan considéré ne peut exister, et que par suite les trois directions sont contenues dans un même plan.

42. — Lemme II. — *La résultante de deux forces concourantes agit dans l'angle des composantes.*

Le même raisonnement que ci-dessus prouve que si la résultante R (fig. 13) des forces F et F′ n'agit pas dans l'angle FAF′, cette force R ne peut remplacer les actions simultanées des forces F et F′, puisqu'on peut imaginer une infinité de plans passant par A, laissant d'un côté la force R et de l'autre les deux composantes.

43. — Lemme III. — *La résultante de deux forces concourantes égales est dirigée suivant la bissextrice de l'angle des composantes.*

Soit le point A (fig. 14) sollicité par les forces égales F et F′, et soit XY la bissextrice de l'angle de ces forces : supposons que la résultante R n'étant pas dirigée suivant XY, agisse dans l'angle FAY.

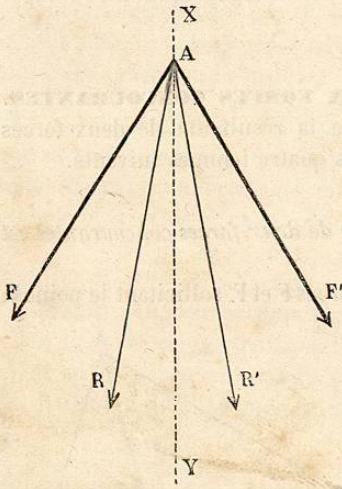

Fig. 14.

En faisant tourner la figure de 180° autour de XY, F viendra prendre la place de F′ et réciproquement, et R se placera dans la position R′ symétrique de R par rapport à XY : or, la figure géométrique formée par les composantes est restée identique à elle-même, donc la résultante R existe encore dans la position d'abord supposée.

Les deux forces R et R′ distinctes seraient donc en même temps des résultantes du même système de forces, ce qui ne peut être.

Donc R est dirigé suivant XY.

44. — Lemme IV. — *Si l'on fait agir des forces égales en deux sommets opposés* A, C (fig. 15) *d'un losange invariable, et suivant les côtés qui aboutissent à ces sommets, il y aura équilibre entre ces quatre forces.*

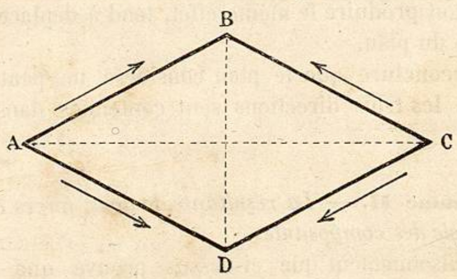

Fig. 15.

En effet, les forces qui sollicitent le point A sont égales et également inclinées sur la diagonale AC, donc leur résultante est dirigée suivant AC. De même, les forces qui sollicitent le point C se composent en une force dirigée suivant CA.

D'ailleurs, ces résultantes partielles sont d'égale intensité, car la figure géométrique formée par les forces qui agissent en A est identique à la figure formée par les forces qui agissent en C.

Par suite, les deux forces auxquelles le système est réduit sont appliquées aux extrémités d'une barre rigide AC (puisque le losange est invariable), agissent dans la direction de cette barre et en sens contraire. Elles se font donc équilibre d'après l'axiome I (21).

45. — THÉORÈME VI. — Parallélogramme des forces. — *La résultante de deux forces concourantes est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les forces composantes.*

46. — 1° — Direction de la résultante. — Supposons d'abord les forces F et F′ sollicitant le point A (fig. 16), commensurables entre

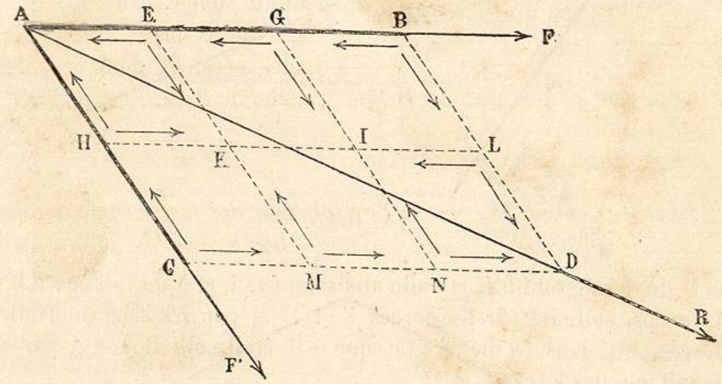

Fig. 16.

elles ; et soit φ une commune mesure contenue trois fois dans F et deux fois dans F′ : les droites AB et AC qui représentent ces composantes auront donc aussi une commune mesure contenue trois fois dans AB et deux fois dans AC.

Par les points de division E, G, B nous traçons des parallèles à F′ et par les points H, C, des parallèles à F : nous formons ainsi des losanges que nous supposons invariables et liés invariablement entre eux.

Dès lors, le corps formé par ces losanges est sollicité par une force unique, la résultante des forces F et F′, agissant sur le point A (fig. 16 *bis*) : nous cherchons alors à prouver que l'on peut considérer ce corps comme sollicité par une force unique agissant en D ; il en faudra conclure (29) que la direction de la force unique, c'est-à-dire de la résultante, est AD, diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC.

A cet effet, nous appliquons aux sommets E, H du losange AEKH des forces égales à φ, dirigées suivant les côtés qui aboutissent à ces sommets. Nous savons que ces quatre forces se faisant équilibre (44) ne changeront pas l'état du corps (25). Nous répétons cette opération aux sommets G et C du losange AGNC, puis aux sommets B

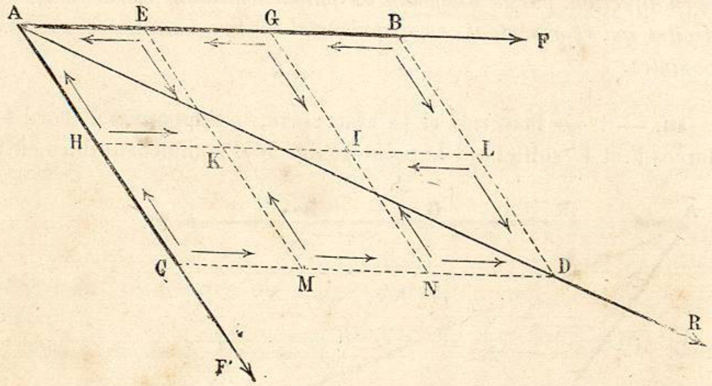

Fig. 16 *bis*.

et M du losange EBDM, et enfin aux sommets L et N du losange ILDN. Le corps, sollicité par les forces F et F′ et par les seize nouvelles forces, est dans le même état que s'il était sollicité en A par la résultante des forces F et F′.

Or, les forces auxiliaires dirigées suivant HL, sollicitant les points H et L, se font équilibre (21) ; donc on peut les supprimer (25) : il en est de même pour les forces dirigées suivant EM et GN.

De plus, les forces agissant aux points E, G, B suivant BA peuvent être appliquées en A (26) et se composent alors (37) suivant une force égale et contraire à F : donc on peut supprimer la force F et ces forces auxiliaires (25). Il en est de même pour la force F′ et pour les forces auxiliaires dirigées suivant CA.

Les forces dirigées suivant CD se composent de même en une

force égale à F et sollicitant le point D, et les forces agissant suivant BD peuvent être remplacées par une force égale à F′ et tirant sur le point D.

Donc le corps, sollicité par deux forces qui agissent en D, est soumis à l'action d'une seule force appliquée en D.

Nous en concluons, comme il a été dit plus haut, que la droite AD est la direction de la résultante des forces F et F′.

* **47.** — Nous avons supposé dans la démonstration précédente que les forces F et F′ admettaient une commune mesure. Faisons l'hypothèse contraire, partageons AC (fig. 17) en n parties égales ; en portant autant de fois que possible cette partie aliquote sur AB, nous trouvons :

$$AB_1 = \frac{m}{n} AC,$$

$$AB_2 = \frac{m+1}{n} AC.$$

Lorsque nous faisons croître sans limite le nombre arbitraire n, les points B_1 et B_2 tendent simultanément vers le point B.

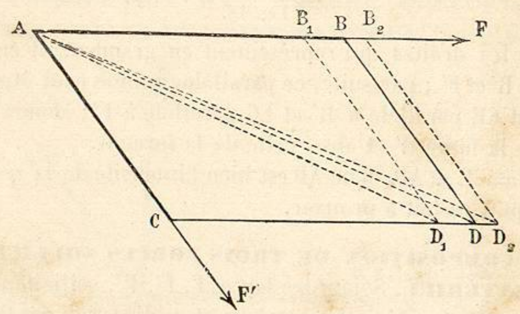

Fig. 17.

Or (46), la résultante des forces représentées par AB_1 et AC a pour direction AD_1, et les forces AB_2 et AC se composent suivant AD_2.

Donc la résultante des forces AB et AC, étant la limite commune vers laquelle tendent AD_1 et AD_2, est dirigée suivant AD. Le résultat est donc toujours le même.

48. — 2° — Intensité de la résultante. — Nous savons que les deux forces F, F′ représentées en grandeur et direction par AB et AC (fig. 18) ont pour résultante une force R dirigée suivant AD : et il nous reste à prouver que l'intensité de R est représentée par AD.

A cet effet, appliquons en A une force R′ égale et contraire à R; il y aura équilibre entre les forces F, F′ et R′, et par suite (32) la résultante des forces R′ et F′ est égale et contraire à F ; il en résulte que BAE est la direction de la diagonale du parallélogramme con-

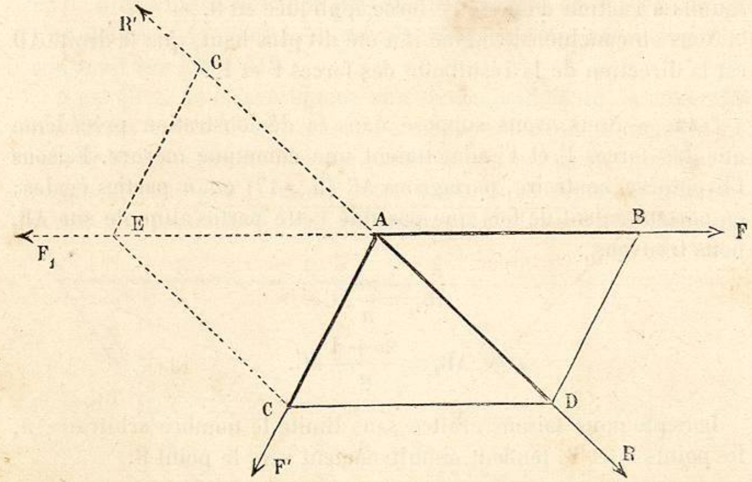

Fig. 18.

struit sur les droites qui représentent en grandeur et en direction les forces R′ et F′ ; par suite, ce parallélogramme peut être construit en menant CE parallèle à R′ et EG parallèle à F′; donc AG est l'intensité de la force R′ et aussi celle de la force R.

Or, AG = CE = AD, donc AD est bien l'intensité de la résultante R; c'est ce qu'il restait à prouver.

A. 14 **49. — COMPOSITION DE TROIS FORCES SOLLICITANT UN POINT MATÉRIEL.** Soient les forces F, F′, F″, sollicitant le point O (fig. 19) et représentées en grandeur et en direction par OA, OB, OC : ces directions forment généralement un angle trièdre OXYZ.

Nous composons F et F′ suivant OD en appliquant le théorème VI (45), puis nous composons OD et F″ en OE d'après la même règle : la force représentée en grandeur et en direction par OE remplace le système des forces F, F′, F″ dans leur action sur le point O.

50. — Remarque. — Nous remarquons que la droite OE est *la diagonale du parallélépipède construit sur les droites* OA, OB, OC : ce solide s'appelle PARALLÉLÉPIPÈDE DES FORCES.

Enfin la droite OE ferme la ligne polygonale OADE *dont les côtés*

sont respectivement égaux et parallèles aux droites OA, OB, OC *qui représentent en grandeur et en direction les forces composantes.*

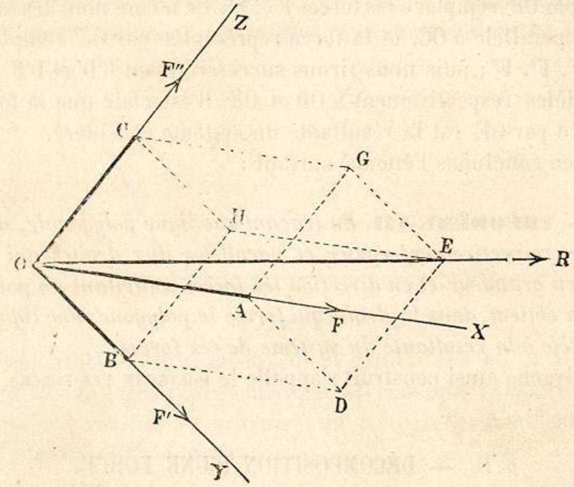

Fig. 19.

51. — COMPOSITION D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE FORCES SOLLICITANT UN POINT MATÉRIEL. Soient (fig. 20) les

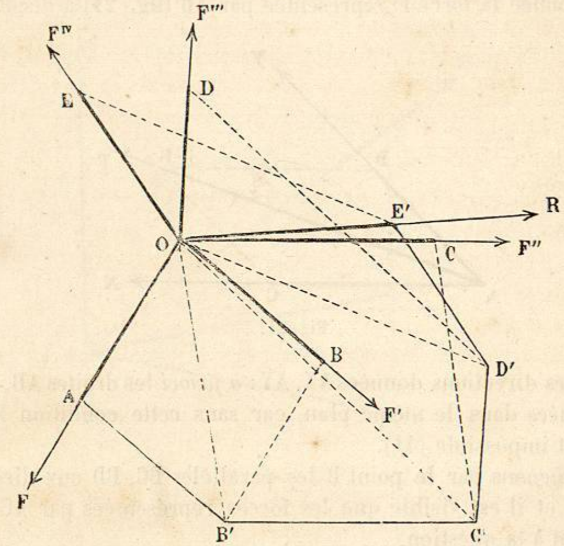

Fig. 20.

forces F, F′, F″, F‴, F^{IV}, sollicitant le point O, et représentées en grandeur et direction par OA, OB, OC, OD, OE; nous traçons AB′ égale et parallèle à OB : la force représentée en grandeur et en direction par OB′ remplace les forces F et F′. De même nous traçons B′C′ égale et parallèle à OC, et la force représentée par OC′ remplace les forces F, F′, F″; puis nous tirons successivement C′D′ et D′E′ égales et parallèles respectivement à OD et OE. Il est clair que la force représentée par OE′ est la résultante du système considéré.

Nous en concluons l'énoncé suivant :

52. — THÉORÈME VII. *En traçant une ligne polygonale, dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux droites qui représentent en grandeur et en direction les forces sollicitant un point matériel, on obtient, dans la droite qui ferme le polygone, une ligne égale et parallèle à la résultante du système de ces forces.*

Le polygone ainsi construit s'appelle le POLYGONE DES FORCES.

§ II. — DÉCOMPOSITION D'UNE FORCE.

53. — PROBLÈME I. *Décomposer une force qui sollicite un point matériel en deux forces ayant des directions données.*

Soit donnée la force F représentée par AB (fig. 21) à décomposer

$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\theta}$

$AC = \frac{AB \sin\alpha}{\sin\theta}$

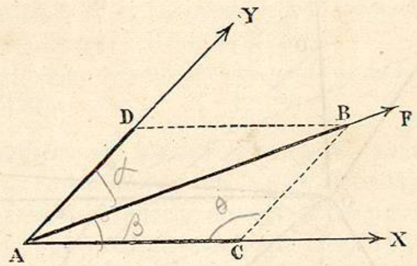

Fig. 21.

suivant les directions données AX, AY : *a priori* les droites AB, AX, AY sont situées dans le même plan, car sans cette condition le problème est impossible (41).

Nous menons par le point B les parallèles BC, BD aux directions données, et il est visible que les forces représentées par AC et AD répondent à la question.

Il faut remarquer que le problème proposé revient à construire un triangle ABC, connaissant un côté AB et les angles.

54. — PROBLÈME II. *Décomposer une force qui sollicite un point matériel en deux forces dont l'une est donnée en grandeur et direction.*

Soit donnée la force F représentée par AB (fig. 22) à décomposer en deux forces dont l'une soit représentée en grandeur et direction par AC.

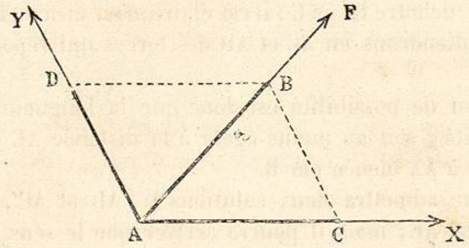

Fig. 22.

Nous traçons AD et BD respectivement parallèles à BC et AC, et il est évident que la force représentée par AD répond à la question.

Ce problème revient à construire un triangle connaissant deux côtés et l'angle qu'ils comprennent.

55. — PROBLÈME III. *Décomposer une force sollicitant un point matériel en deux forces dont l'une ait une intensité donnée et l'autre une direction donnée.*

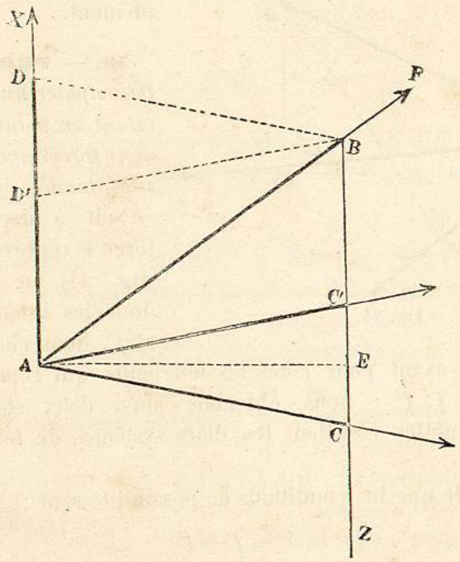

Fig. 23.

Soit à décomposer la force représentée par AB (fig. 23) en deux forces dont l'une soit dirigée suivant AX, l'autre ayant pour intensité f.

Nous menons la droite BZ parallèle à AX, et du point A comme centre avec f pour rayon, nous décrivons une circonférence ; supposons qu'elle rencontre BZ en C : il est clair qu'en menant BD parallèle à AC, nous obtiendrons en AC et AD des forces qui répondront à la question.

La condition de possibilité est donc que la longueur qui représente l'intensité f soit au moins égale à la distance AE du point A à la parallèle à AX menée par B.

Le problème admettra deux solutions AC, AD et AC′, AD′ si f est plus grand que AE ; mais il pourra arriver que le sens de la composante dont la direction est donnée ne soit pas AX ; c'est lorsque f sera supérieure à AB.

La question revient visiblement à construire un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux : mais la discussion diffère un peu parce que l'angle opposé au côté connu peut être remplacé par son supplément.

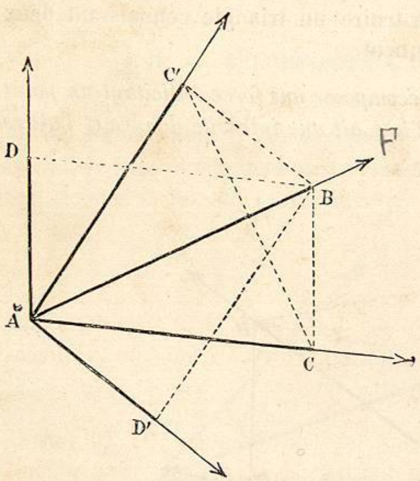

Fig. 24.

56. — PROBLÈME IV. *Décomposer une force sollicitant un point matériel en deux forces ayant des intensités données.*

Soit à décomposer la force F représentée par AB (fig. 24) en deux forces dont les intensités sont f et f'. Nous construisons le triangle ABC ayant pour côtés les longueurs qui représentent les intensités F, f, f' : nous obtenons ainsi deux solutions ABC et ABC′ desquelles résultent les deux systèmes de forces AC, AD et AC′, AD′.

Il est visible que les conditions de possibilité sont :

$$F < f + f'$$
$$f < F + f'$$
$$f' < F + f.$$

57. — PROBLÈME V. *Décomposer une force sollicitant un point matériel en trois forces agissant suivant des directions données.*

Soit F (fig. 25) la force donnée représentée par OA, que l'on veut décomposer en trois forces agissant suivant les directions données OE, OY, OZ. Nous menons par le point A la parallèle à OZ qui rencontre le plan XOY au point B, et par ce point B nous traçons la parallèle à OY qui rencontre OX en C : en prenant OD = CB, et OE = BA, nous obtiendrons en OC, OD, OE les intensités des trois composantes cherchées, car il est visible qu'en composant ces trois forces nous serons conduit à la résultante OA. Cette construction

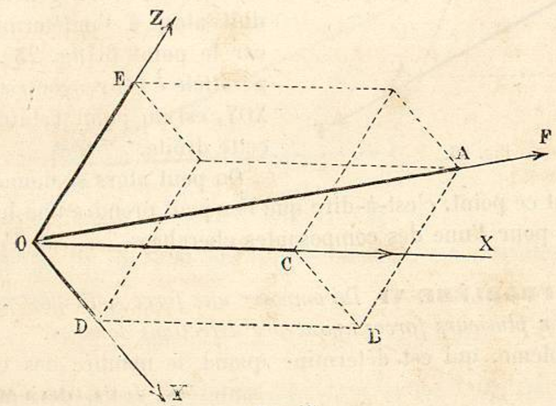

Fig. 25.

R

$f_2^2 = f_1^2 + R^2 - 2Rf_1 \cos\alpha$

$b^2 = R^2 f_1^2 \cos^2\alpha - 4(R^2 - f_1^2) > 0$

$B^2 - 4AC > 0$

revient visiblement à former un parallélépipède dont OA soit la diagonale, et dont les trois arêtes soient dirigées suivant les directions données.

58. — Discussion. Tant que les directions OX, OY, OZ formeront un trièdre, et que la direction OA ne sera pas comprise dans le plan de l'une des forces, il est évident que la construction précédente réussira et conduira à une solution unique du problème proposé.

1° — Supposons d'abord que OA soit contenue (fig. 26) dans le plan XOY, la composante suivant OZ aura une intensité nulle, et l'on obtiendra les composantes suivant OX et OY en construisant le parallélogramme ayant OA pour diagonale et dont les côtés sont dirigés suivant OX et OY. Il est évident d'ailleurs *a priori* que si la composante suivant OZ a une intensité différente de zéro, la résultante ne sera pas située dans le plan XOY ;

2° — Supposons que les directions données soient dans un même plan ne contenant pas OA ; la construction générale conduit à une impossibilité, et il est en effet visible *a priori* que des forces situées dans un même plan et sollicitant un point matériel ont une résultante située dans ce plan ;

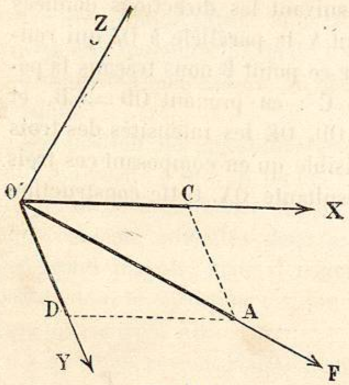

Fig. 26.

3° — Supposons enfin que les directions données soient dans un même plan avec la force à décomposer.

La construction générale conduit alors à l'indétermination, car le point B (fig. 25), où la parallèle à OZ rencontre le plan XOY, est un point arbitraire de cette droite.

On peut alors se donner arbitrairement ce point, c'est-à-dire que l'on peut prendre une intensité arbitraire pour l'une des composantes cherchées.

59. — PROBLÈME VI. *Décomposer une force sollicitant un point matériel en plusieurs forces ayant des directions données.*

Ce problème, qui est déterminé quand le nombre des composantes est *trois*, devient indéterminé quand il y en a un plus grand nombre. La question revient en effet à construire un polygone OA BC DE (fig. 27) dans lequel on connaît un seul côté OA, et des parallèles aux autres côtés.

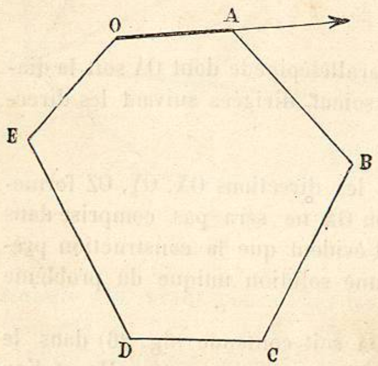

Fig. 27.

Nous pouvons donc prendre arbitrairement les longueurs AB, BC, et nous achèverons le polygone d'après le procédé indiqué dans le problème V (57).

En général on pourra se donner arbitrairement les intensités des composantes moins trois.

§ III. — EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA RÉSULTANTE DE FORCES CONCOURANTES.

60. — Intensité de la résultante de deux forces concourantes. Soient les composantes F et F′ faisant entre elles l'angle θ. La résultante R étant la diagonale du parallélogramme construit sur

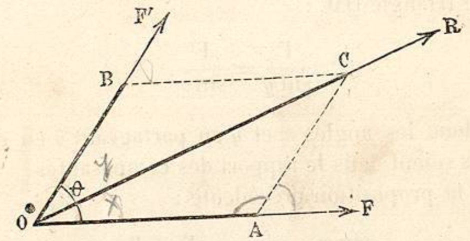

Fig. 28.

les droites OA, OB (fig. 28) qui représentent les composantes, on a, dans le triangle OAC :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,OA \times AC \cos \widehat{OAC}.$$

Or, l'angle OAC est le supplément de θ, et les côtés OA, AC, OC sont les intensités des forces F, F′, R ; d'où :

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2\,FF' \cos \theta.$$

Il en résulte :

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2 + 2\,FF' \cos \theta},$$

car la valeur de R est positive.

61. — Si les forces composantes sont rectangulaires, on obtient aisément :

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2}.$$

62. — Si les forces composantes sont en même direction, il suffira de remplacer $\cos \theta$ par $+1$ ou par -1, suivant que les composantes agissent en même sens ou en sens inverse. On obtient donc ainsi, en supposant $F > F'$:

$$R = F + F'$$