2° — Supposons que les directions données soient dans un même plan ne contenant pas OA; la construction générale conduit à une impossibilité, et il est en effet visible *a priori* que des forces situées dans un même plan et sollicitant un point matériel ont une résultante située dans ce plan;

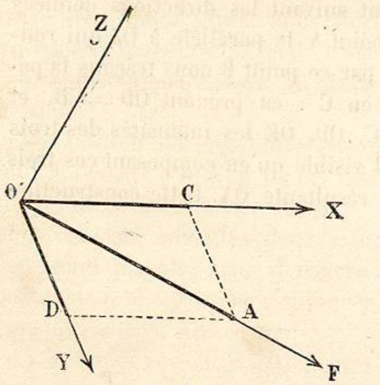

Fig. 26.

3° — Supposons enfin que les directions données soient dans un même plan avec la force à décomposer.

La construction générale conduit alors à l'indétermination, car le point B (fig. 25), où la parallèle à OZ rencontre le plan XOY, est un point arbitraire de cette droite.

On peut alors se donner arbitrairement ce point, c'est-à-dire que l'on peut prendre une intensité arbitraire pour l'une des composantes cherchées.

59. — PROBLÈME VI. *Décomposer une force sollicitant un point matériel en plusieurs forces ayant des directions données.*

Ce problème, qui est déterminé quand le nombre des composantes est *trois*, devient indéterminé quand il y en a un plus grand nombre. La question revient en effet à construire un polygone OA BC DE (fig. 27) dans lequel on connaît un seul côté OA, et des parallèles aux autres côtés.

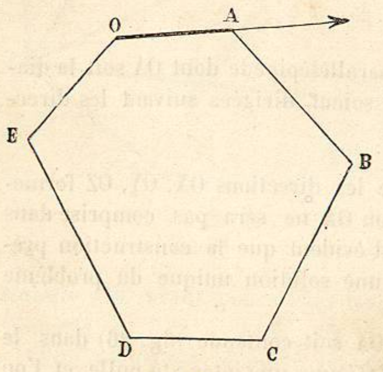

Fig. 27.

Nous pouvons donc prendre arbitrairement les longueurs AB, BC, et nous achèverons le polygone d'après le procédé indiqué dans le problème V (57).

En général on pourra se donner arbitrairement les intensités des composantes moins trois.

§ III. — EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA RÉSULTANTE DE FORCES CONCOURANTES.

60. — Intensité de la résultante de deux forces concourantes. Soient les composantes F et F′ faisant entre elles l'angle θ. La résultante R étant la diagonale du parallélogramme construit sur

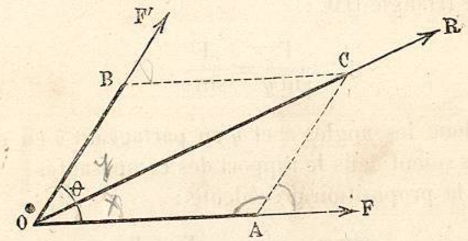

Fig. 28.

les droites OA, OB (fig. 28) qui représentent les composantes, on a, dans le triangle OAC :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,OA \times AC \cos \widehat{OAC}.$$

Or, l'angle OAC est le supplément de θ, et les côtés OA, AC, OC sont les intensités des forces F, F′, R; d'où :

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2\,FF' \cos \theta.$$

Il en résulte :

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2 + 2\,FF' \cos \theta},$$

car la valeur de R est positive.

61. — Si les forces composantes sont rectangulaires, on obtient aisément :

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2}.$$

62. — Si les forces composantes sont en même direction, il suffira de remplacer cos θ par + 1 ou par − 1, suivant que les composantes agissent en même sens ou en sens inverse. On obtient donc ainsi, en supposant $F > F'$:

$$R = F + F'$$

ou :

$$R = F - F'.$$

Ce sont les résultats déjà obtenus (36 et 38).

63. — Direction de la résultante. En désignant par x et y les angles formés par OR avec OF et OF′, on a :

$$x + y = \theta,$$

puis, dans le triangle OAC :

$$\frac{F}{\sin y} = \frac{F'}{\sin x}.$$

On aura donc les angles x et y en partageant θ en deux parties dont les sinus soient dans le rapport des composantes

On tire de la proposition précédente :

$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{F'}{F}$ où

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{F' - F}{F' + F},$$

d'où :

$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x-y) \cos \frac{1}{2}(x+y)$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{F' - F}{F' + F} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)$

On en déduira une valeur et une seule de $\frac{x-y}{2}$, soit φ, comprise entre $-90°$ et $+90°$; et alors on aura :

$$x = \frac{\theta}{2} + \varphi,$$

$$y = \frac{\theta}{2} - \varphi.$$

64. — Remarque. — On est ainsi amené à la résolution d'un triangle, connaissant deux côtés F et F′ et l'angle compris $(180° - \theta)$. On aura donc à appliquer les mêmes transformations. Les problèmes inverses, que nous avons résolus graphiquement, donneront lieu à des calculs déjà faits en trigonométrie.

***65. — Définition.** Nous avons défini en géométrie *la projection d'une portion de droite* AB *sur un axe* XY (fig. 29) en appelant ainsi la distance A′B′ des projections sur XY des points A et B.

Il y a lieu de modifier cette définition en *Mécanique*, car ici nous devons distinguer deux sens sur une droite suivant laquelle agit

une force. Ainsi il n'est pas indifférent de dire qu'une force est représentée par AB ou par BA ; de même nous distinguerons deux sens sur l'axe XY des projections.

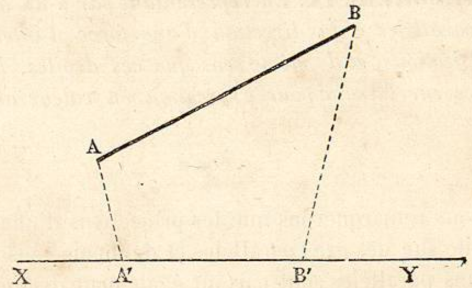

Fig. 29.

De cette manière, *la projection de* AB *sur* XY *est une expression algébrique dont la valeur absolue est* A′B′, *et qui a le signe* + *ou le signe* —, *suivant qu'il faut se déplacer de* X *vers* Y, *ou de* Y *vers* X *pour aller de* A′ *en* B′.

Il résulte visiblement de cette définition que l'on a :

$$\text{proj. AB} + \text{proj. BA} = 0.$$

***66. — THÉORÈME VIII.** *La projection sur un axe quelconque de la résultante d'un système de forces concourantes est la somme algébrique des projections de toutes les forces sur cet axe.*

Soit en effet (fig. 30) le contour polygonal OABCDE dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux composantes considérées et de même sens que celles-ci. Nous savons (52) que la droite OE est égale à la résultante, lui est parallèle et de même sens. Or il est visible que la somme algébrique des projections sur un axe des côtés OA, AB, BC, CD, DE, EO est *nulle*, puisqu'en parcourant ce polygone fermé dans le sens indiqué on revient au point de départ. Donc la projection de OE étant égale et de signe contraire à la projection de EO, on a :

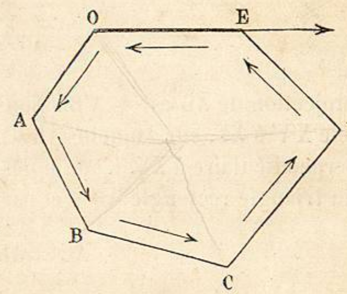

Fig. 30.

$$\text{proj. OE} = \text{proj. OA} + \text{proj. AB} + \text{proj. BC} + \text{proj. CD} + \text{proj. DE}.$$

***67. — Corollaire.** *Deux contours polygonaux qui ont mêmes extrémités ont des projections égales sur le même axe.*

***68. — THÉORÈME IX.** *En représentant par α un angle dont les côtés sont parallèles à la direction d'une force d'intensité* F *et à l'axe des projections, et de même sens que ces droites, la projection de cette force sur l'axe a pour expression en valeur absolue et en signe :*

$$F \times \cos \alpha.$$

D'abord nous remarquerons que les projections d'une même portion de droite sur des axes parallèles et de même sens sont égales, car deux plans parallèles sont partout également distants.

Soit d'abord la disposition de la figure 31, dans laquelle la

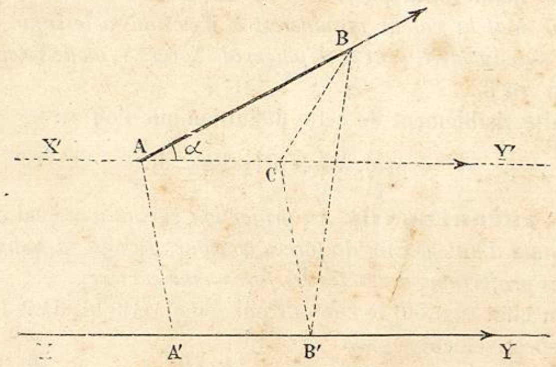

Fig. 31.

projection de AB est $+$A'B'. Nous traçons par le point A une parallèle X'Y' à XY, sur laquelle AB se projette en AC, le plan BCB' étant perpendiculaire à XY. L'angle désigné par α est ici l'angle aigu BAC du triangle rectangle ABC, et par suite on a :

$$AC = AB \times \cos \alpha\,;$$

or AC est en valeur absolue et en signe la projection de AB sur XY, et AB est l'intensité de la force. Donc :

$$\text{proj. } F = F \times \cos \alpha.$$

Soit, en second lieu, la disposition de la figure 32.

L'angle α est ici l'angle obtus BAY'. Le triangle ABC rectangle en C donne :

$$AC = AB \times \cos \widehat{CAB}.$$

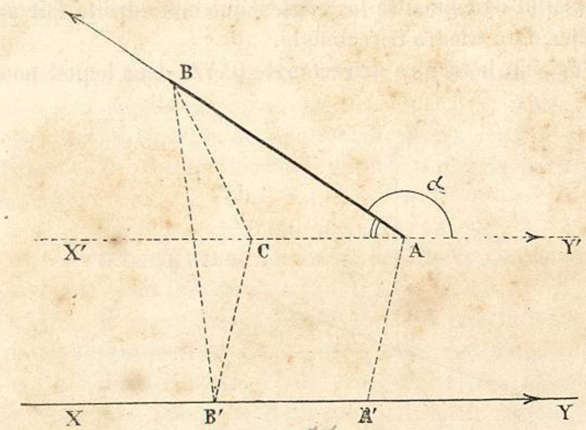

Fig. 32.

– proj F = F × – cos α

Or, AC, ou A'B', est égal et de signe contraire à la projection de AB, tandis que l'angle CAB est le supplément de α ; par suite on a encore :

$$\text{proj. } F = F \times \cos \alpha.$$

Cette relation est donc toujours de même forme.

***69. — Corollaire I.** *La condition nécessaire et suffisante pour que la projection d'une force sur un axe soit nulle est que cette force soit perpendiculaire à cet axe.*

***70. — Corollaire II.** *Si l'on représente par α, α', α''... les angles que font avec un même axe les forces* F, F', F''... *sollicitant un point matériel, et par λ l'angle que fait avec cet axe la résultante* R, *on a la relation :*

$$R \cos \lambda = F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + F'' \cos \alpha'' + \ldots$$

Cela résulte immédiatement des théorèmes VIII et IX, car le premier membre est la projection de la résultante sur l'axe considéré, et le second membre est la somme algébrique des projections des composantes sur le même axe. Mais il faut avoir le soin, dans l'application de cette relation importante, de prendre les angles comme ils ont été définis dans l'énoncé du théorème IX.

***71. — Définition.** Pour déterminer la direction et le sens d'une force, il suffit de connaître les angles que cette droite fait avec les trois arêtes d'un trièdre trirectangle.

Soit (fig. 33) le trièdre trirectangle OXYZ, dans lequel nous con-

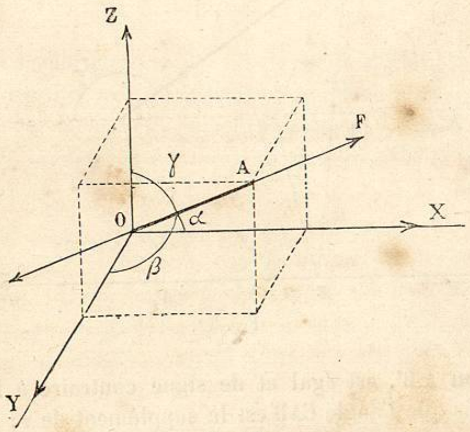

Fig. 33.

sidérons les sens OX, OY, OZ des arêtes, et soit OF la droite représentant la direction et le sens d'une force donnée. Nous appelons, comme ci-dessus, l'angle α que fait OF avec OX l'angle $\widehat{XOF}$. De même les angles β et γ, que fait OF avec OY et OZ, sont les angles $\widehat{YOF}$, $\widehat{ZOF}$.

Or, les angles α et β étant connus, il n'y a que deux directions possibles pour OF qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan XOY, car les trois faces du trièdre OXYF sont connues. L'angle γ servira à fixer celle de ces deux directions qui est OF.

***72.** — Remarque I. — Il faut remarquer que les angles définis comme ci-dessus sont toujours positifs et au plus égaux à 180 degrés; que, par suite, ces angles sont complètement définis par leurs cosinus.

Donc, en résumé, une droite sera complètement déterminée dans sa direction et son sens quand on connaîtra les cosinus des angles

qu'elle fait avec trois axes rectangulaires deux à deux. Ces cosinus s'appellent *cosinus directeurs* de la droite.

Remarque II. — *Lorsque deux forces ont des cosinus directeurs égaux et de signes contraires, ces forces sont parallèles et de sens contraires.*

En effet, la force F′ contraire à F fait avec les axes des angles respectivement supplémentaires des angles α, β, γ; donc ses cosinus directeurs sont égaux et de signes contraires à ceux de la force F.

D'ailleurs il n'y a qu'une seule direction définie par trois cosinus directeurs.

***73. — THÉORÈME X.** *La somme des carrés des cosinus directeurs d'une droite égale l'unité.*

En effet, si nous prenons sur OF (fig. 33) une longueur OA égale à l'unité, les projections de OA sur les trois axes considérés seront les cosinus directeurs de OF; de plus, les valeurs absolues de ces projections sont les arêtes d'un parallélépipède rectangle ayant OA pour diagonale; or la somme des carrés des arêtes d'un parallélépipède rectangle aboutissant à un même sommet égale le carré de la diagonale, donc la somme des carrés des cosinus directeurs est l'unité.

***74.** — Remarque. — La relation précédente vérifie une conséquence des considérations géométriques précédentes (71); elle montre, en effet, que si l'on connaît deux cosinus directeurs d'une droite, le troisième est déterminé au signe près.

On a en effet :

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta.$$

75. — *THÉORÈME XI. *L'angle de deux droites déterminées dans leur direction et leur sens a pour cosinus la somme des produits deux à deux des cosinus directeurs de ces droites.*

Soient les droites OF, OF′ (fig. 34) dont les cosinus directeurs sont :

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,$$
$$\cos\alpha',\ \cos\beta',\ \cos\gamma'.$$

Nous prenons OA égale à l'unité et nous projetons OA sur OF′. Cette projection est précisément le cosinus de l'angle FOF′,

Menons AB perpendiculaire au plan XOY qui rencontre ce plan en B, et traçons BC parallèle à OY qui rencontre OX en C.

La projection sur OF′ du contour OCBA est égale à la projection de OA sur OF′, donc :

$$\cos V = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma',$$

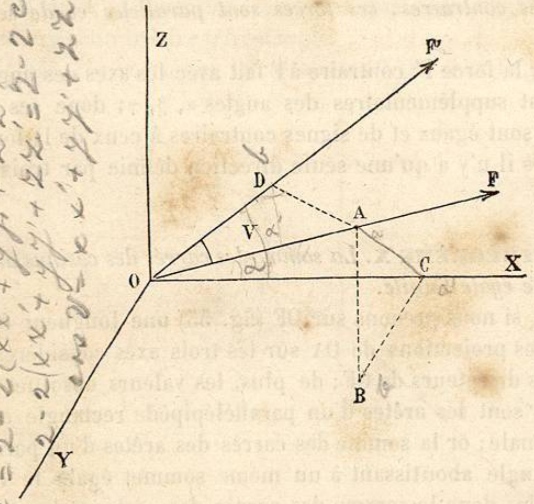

Fig. 34.

car la projection de OC sur OF′ est $\cos\alpha \times \cos\alpha'$, et ainsi des autres.

***76. — Corollaire.** *La condition nécessaire et suffisante pour que les directions* OF *et* OF′ *soient rectangulaires est :*

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0.$$

***77. — Résultante de trois forces agissant suivant les arêtes d'un trièdre trirectangle.**

En représentant par F_x, F_y, F_z, les valeurs algébriques des composantes qui sollicitent le point O (fig. 35) dans les directions OX, OY, OZ, par R la résultante, et par λ, μ, ν les angles qu'elle fait avec ces mêmes axes, nous savons que la projection de R sur OX est la somme des projections des composantes sur cet axe ; cette projection est donc F_x, puisque les forces F_y et F_z sont dans un plan perpendiculaire à OX, et de même pour les projections sur OY et OZ ; donc on a :

$$\left\{\begin{array}{l} R\cos\lambda = F_x \\ R\cos\mu = F_y \\ R\cos\nu = F_z \end{array}\right. \qquad (1)$$

En joignant à ces équations la relation fondamentale entre les cosinus directeurs de R :

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 ; \qquad (2)$$

nous aurons un système de quatre équations pour déterminer les les quatre inconnues R, λ, μ, ν.

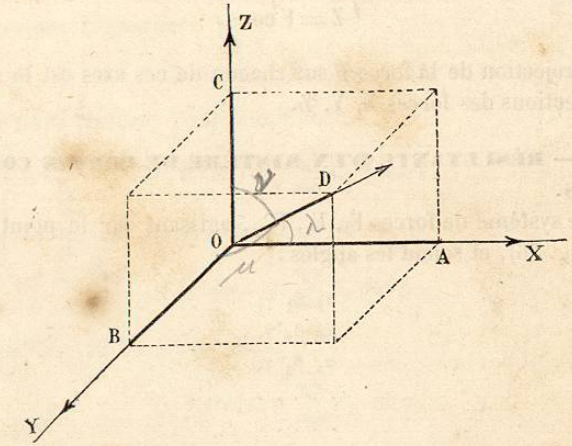

Fig. 35.

En ajoutant membre à membre les équations du système (1), après avoir élevé au carré les deux membres de chacune, nous obtenons, à cause de (2) :

$$R^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2,$$

d'où :

$$(3) \qquad R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

On en conclut les valeurs suivantes pour les cosinus directeurs :

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\lambda = \dfrac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\ \cos\mu = \dfrac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\ \cos\nu = \dfrac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}. \end{array}\right.$$

La question est donc complètement résolue.

*78. — Remarque. — Réciproquement, si l'on décompose une force F en trois autres dirigées suivant les arêtes d'un trièdre trirectangle qui font des angles α, β, γ avec sa direction, on aura pour les composantes représentées en grandeur et en signe par X, Y, Z, les valeurs :

$$\begin{cases} X = F \cos \alpha \\ Y = F \cos \beta \\ Z = F \cos \gamma, \end{cases}$$

car la projection de la force F sur chacun de ces axes est la somme des projections des forces X, Y, Z.

A. 16 ***79. — RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME DE FORCES CONCOURANTES.**

Soit le système de forces F_1, F_2, F_3... agissant sur le point matériel O (fig. 36), et soient les angles :

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

qui définissent les directions de ces forces par rapport aux trois axes rectangulaires OXYZ.

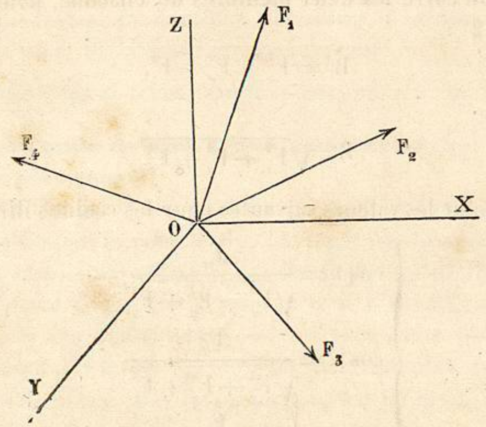

Fig. 36.

Soit R la résultante dont la direction fait avec les mêmes axes les angles λ, μ, ν.

La méthode consiste à exprimer que la projection de la résultante sur chacun des axes choisis est la somme des projections des forces considérées sur le même axe.

Or la projection de la résultante sur OX est $R \cos \lambda$, et les projections sur OX des forces données sont :

$$F_1 \cos \alpha_1, \quad F_2 \cos \alpha_2, \quad F_3 \cos \alpha_3, \quad \ldots$$

On a donc l'équation :

$$R \cos \lambda = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 \ldots,$$

ce que nous écrivons pour simplifier :

$$R \cos \lambda = \sum F_1 \cos \alpha_1 ; \tag{1}$$

on aura de même, en projetant sur OY :

$$R \cos \mu = \sum F_1 \cos \beta_1, \tag{2}$$

et enfin l'axe OZ donne de même :

$$R \cos \nu = \sum F_1 \cos \gamma_1. \tag{3}$$

Nous obtenons ainsi trois équations entre les inconnues R, λ, μ, ν ; si nous y joignons la relation :

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1, \tag{4}$$

nous aurons autant d'équations que d'inconnues. On en tire visiblement :

$$R = \sqrt{\left(\sum F_1 \cos \alpha_1\right)^2 + \left(\sum F_1 \cos \beta_1\right)^2 + \left(\sum F_1 \cos \gamma_1\right)^2},$$

puis :

$$\begin{cases} \cos \lambda = \dfrac{\sum F_1 \cos \alpha_1}{R} \\ \cos \mu = \dfrac{\sum F_1 \cos \beta_1}{R} \\ \cos \nu = \dfrac{\sum F_1 \cos \gamma_1}{R}. \end{cases}$$

Le problème est donc complètement résolu.

*80. — **Remarque I.** On peut encore se rendre compte de la méthode précédente en observant que si l'on décompose chacune des forces proposées suivant les axes OXYZ, on remplacera le système par trois forces agissant suivant ces axes et représentées en valeur absolue et en signes par les seconds membres des équations (1), (2), (3) ; en composant ces trois forces par la méthode donnée au numéro 77, on arrivera aisément aux résultats précédents.

*81. — **Remarque II.** Le résultat que nous venons de trouver pour l'intensité de la résultante contient les angles qui définissent les directions des composantes par rapport aux axes rectangulaires choisis. On peut donner à ce résultat une forme indépendante du système d'axes rectangulaires choisi :

Nous avons, en effet :

$$R^2 = \left\{ \begin{array}{l} (F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + \ldots)^2 \\ + (F_1 \cos\beta_1 + F_2 \cos\beta_2 + F_3 \cos\beta_3 + \ldots)^2 \\ + (F_1 \cos\gamma_1 + F_2 \cos\gamma_2 + F_3 \cos\gamma_3 + \ldots)^2 \end{array} \right.$$

ou, en développant les carrés des polynômes :

$$R^2 = \left\{ \begin{array}{l} F_1^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) + F_2^2(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) + \ldots \\ + 2F_1F_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2) \\ + 2F_1F_3(\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Or, en remarquant d'abord que la somme des carrés des cosinus directeurs d'une même composante vaut l'unité, et que la somme des produits deux à deux des cosinus directeurs de deux forces est le cosinus de l'angle qu'elles font entre elles (75), nous mettons le second membre précédent sous la forme :

$$R^2 = \left\{ \begin{array}{l} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots \\ + 2F_1F_2\cos(F_1F_2) + 2F_1F_3\cos(F_1F_3) + \ldots \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit :

$$R^2 = \sum F_1^2 + 2\sum F_1F_2\cos(F_1F_2),$$

et cette fois le résultat ne dépend plus des axes choisis. Nous retrouvons ainsi la formule particulière au cas de deux forces concourantes :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(F_1F_2).$$

*82. — **Remarque III.** On peut aussi évaluer l'angle que la résultante fait avec l'une quelconque des composantes, et donner au résultat une forme indépendante des axes choisis. Ainsi, l'angle que fait R avec F_n a pour cosinus (75) :

$R\cos\lambda = \Sigma F_n \cos\alpha_n$

$$\cos(R_1F_n) = \cos\lambda\cos\alpha_n + \cos\mu\cos\beta_n + \cos\nu\cos\gamma_n,$$

$\cos\lambda = \frac{\Sigma F_n \cos\alpha_n}{R}$

ou :

$$\cos(R_1F_n) = \frac{X\cos\alpha_n + Y\cos\beta_n + Z\cos\gamma_n}{R},$$

or :

$$\cos\alpha_p\cos\alpha_n + \cos\beta_p\cos\beta_n + \cos\gamma_p\cos\gamma_n = \cos(F_pF_n);$$

donc :

$$\cos(R_1F_n) = \frac{F_n + F_1\cos(F_nF_1) + F_2\cos(F_nF_2) + \ldots}{R}.$$

§ IV. — ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL.

83. — *Pour qu'un point matériel, entièrement libre, soit en équilibre sous l'action d'un système de forces, il faut et il suffit que la résultante de ces forces soit nulle.*

On peut donc dire qu'il faut et qu'il suffit, pour l'équilibre, que le polygone des forces qui agissent sur ce point se ferme de lui-même.

84. — **THÉORÈME XII.** *Lorsqu'un point matériel libre est sollicité par des forces, il faut et il suffit, pour qu'il y ait équilibre, que la somme des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires soit nulle pour chacun de ces axes.*

En désignant, en effet, par R la résultante des forces considérées, et par X, Y, Z les sommes des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires arbitraires, on a démontré la relation :

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que R soit nulle est :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0;$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

85. — Remarque I. Il suffirait évidemment de dire que la somme des projections des forces sur *un axe quelconque* soit nulle, car alors cette somme serait nulle pour tous les axes.

Mais si la somme des projections était nulle pour un seul *axe particulier*, la condition ne serait plus suffisante, cela signifierait seulement que les forces considérées admettent une résultante située dans un plan perpendiculaire à cet axe particulier.

86. — Remarque II. La restriction contenue dans l'énoncé 84, que les trois axes soient rectangulaires, n'est pas nécessaire : il suffit que la somme des projections des forces sur trois axes *non parallèles à un même plan* soit nulle pour chacun d'eux. En effet, les parallèles à ces axes passant par le point de concours des forces formeront alors un trièdre, et, si la résultante n'est pas nulle, elle est nécessairement perpendiculaire à chacune de ces arêtes, ce qui ne peut être, puisque ces droites ne sont pas contenues dans le même plan.

87. — Pour qu'un point matériel, *assujetti à rester sur une surface déterminée*, soit en équilibre sous l'action d'un système de forces, il faut et il suffit que la résultante de ces forces soit détruite par la résistance que la surface oppose au mouvement du point.

Or, nous disons qu'une surface est parfaitement polie lorsqu'elle ne s'oppose en chaque point qu'au mouvement suivant la normale en ce point, et dans un sens déterminé.

88. — *Pour qu'un point matériel, assujetti à rester sur une surface déterminée parfaitement polie, soit en équilibre sous l'action d'un système de forces, il faut et il suffit que la somme des projections de ces forces sur deux axes rectangulaires, parallèles au plan tangent relatif à la position occupée par le point, soit nulle pour chacun de ces axes.*

Il est d'abord évident que si le point est en équilibre, les conditions précédentes sont satisfaites, car la résultante des forces considérées étant normale à la surface, sa projection sur un axe quelconque perpendiculaire à sa direction sera nulle.

Réciproquement, si la somme des projections sur deux axes parallèles au plan tangent est nulle, il faut en conclure que la résultante est dans deux plans parallèles à la normale, et que, par suite, sa direction est normale à la surface : donc il y a équilibre.

On doit toutefois remarquer qu'il restera à exprimer que la ré-

AB = 0 para que haya equilibrio $R_x = 0$ $R_y = 0$ $R_x = X$ $R_y = Y$
$X = 0$
$Y = 0$

sultante agit bien dans le sens où résiste la surface, si le point est seulement appuyé sur cette surface.

89. — Si l'on considère un point matériel *assujetti à rester sur une ligne déterminée*, et sollicité par un système de forces, *la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que la somme des projections de toutes les forces sur la tangente à cette courbe soit nulle.*

En effet, si l'équilibre existe, la résultante des forces est perpendiculaire à la tangente à la courbe, seule direction dans laquelle le point peut se mouvoir; donc sa projection sur cette tangente est nulle.

Réciproquement, si la somme des projections des forces sur la tangente est nulle, c'est que la résultante de ces forces est dans un plan perpendiculaire à la tangente, et par suite le point ne peut obéir à son action.

90. — Application I. *Un point matériel* M (fig. 37) *assujetti à rester sur un plan dont la ligne de plus grande pente est* AB, *se trouve en équilibre sous l'action de son poids* P *et de trois forces égales au double de son poids, et dirigées : F suivant l'horizontale, F′ suivant la verticale et de bas en haut, F″ suivant la direction* BA. *Déterminer :*

1° *L'inclinaison du plan sur le plan horizontal;*

2° *La pression exercée sur le plan.*

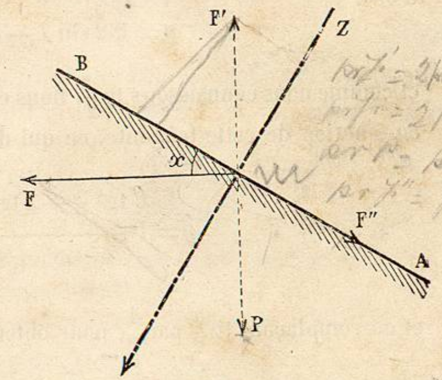

Fig. 37.

pr F′ = 2p sen x
pr F = 2p cos x
pr P = p sen x
pr F″ = 2p

1° — L'équilibre du point étant admis, il faut que la somme des projections des forces sur un *axe quelconque* du plan considéré soit nulle : par exemple sur la ligne AB. En désignant par x l'angle cherché, nous obtenons l'équation :

$$P \sin x + 2P - 2P \sin x - 2P \cos x = 0,$$

d'où :

$$\sin x = 2(1 - \cos x),$$

sen x = 2 sen ½ x cos ½ x
(1 − cos x) = 2 sen² ½ x

2 sen ½ x cos ½ x = 4 sen² ½ x
2 sen ½ x (cos ½ x − 2 sen ½ x) = 0
cos ½ x = 2 sen ½ x o tg ½ x = ½

$1 = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a + \cos^2 \tfrac{1}{2} a \qquad \cos x = \cos^2 \tfrac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x$

$\cos x = \dfrac{\cos^2 \frac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x + \cos^2 \frac{1}{2} x} \qquad \cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x + 1}$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x + \cos^2 \frac{1}{2} x}$

d'où :

$$2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 0.$$

$\operatorname{sen} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}$

En supprimant la solution :

$\dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x} = 2\left(1 - \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}\right)$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 0,$$

$\dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x} = \dfrac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}$

qui est relative à un cas très particulier de la question, il reste :

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2};$$

$\dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}\left(1 - 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x\right) = 0$

on en déduit aisément :

$1 - 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = 0$

$$x = 53^\circ\, 7'\, 48'',57.$$

$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2}$

2° — La pression y, normale au plan, qui résulte de l'action des forces considérées sur le point M, est la résultante de ces forces. En les projetant sur la normale MZ, nous obtenons l'équation :

$\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$

$$y = \mathrm{P}\cos x + 2\mathrm{P}\sin x - 2\mathrm{P}\cos x,$$

d'où :

$\cos x = \dfrac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{3}{5}$

$$y = \mathrm{P}(2\sin x - \cos x), = \mathrm{P}\left(-\frac{3}{5} + \frac{8}{5}\right) = \mathrm{P} \times 1 = \mathrm{P}$$

et comme nous connaissons $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, nous exprimons les lignes de l'arc x en fonction de cette tangente, ce qui donne :

$R = \sqrt{\Sigma P_i^2 + 2 \Sigma P_i P_j \cos(P_i, P_j)}$

$$y = \mathrm{P}\,\frac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$R^2 = P^2 + 4P^2 + 4P^2 + 4P^2 + 4P^2 \operatorname{sen} x + 4P^2 + 0 - 8P^2 \operatorname{sen} x - 8P^2 \cos x$

$2P^2 = 4P^2$

et en remplaçant $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ par $\frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$y = \mathrm{P}.$$

$R^2 = 4P^2 \operatorname{sen} x - 8P^2 \cos x + 9P^2 = -\dfrac{16}{5}P^2 - \dfrac{24}{5}P^2 + 9P^2$

$R^2 = \dfrac{-40P^2 + 45P^2}{5} = P^2$

91. — Application II. *Un point matériel M pesant assujetti à rester sur une droite AB (fig. 58) est attiré perpendiculairement à la verticale AX et perpendiculairement à la verticale BY. Chacune de ces attractions est proportionnelle à la distance du point à la verticale considérée; on donne la longueur AB $= a$, l'angle aigu α que cette direction fait avec la verticale, et l'on sait que chacune de ces attractions a pour valeur P, quand elle s'exerce à la distance b.*

1° *En supposant le point M en équilibre, trouver sa distance x au point A.*

2° *Discuter la direction de la résultante des trois forces P, F, F′ quand le point matériel se déplace de A en B.*

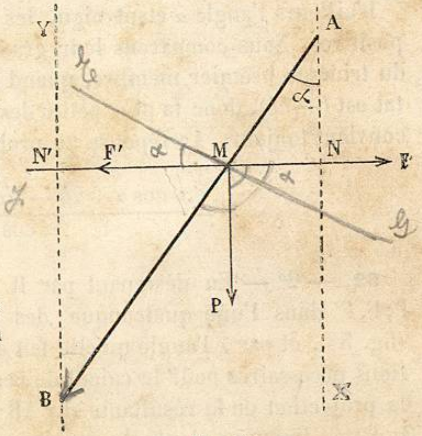

Fig. 58.

1° — Soit x la distance AM : la force F attractive, exercée dans le sens perpendiculaire à AX, étant P à la distance b, sera :

$p : b :: MN : f$

$$\frac{\mathrm{P} \times b}{x \sin \alpha}$$

à la distance MN. De même, la force attractive F′ aura pour valeur :

$$\frac{\mathrm{P} \times b}{(a - x)\sin\alpha}.$$

Or, l'équilibre exige que la somme des projections des forces sur AB soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

$$\mathrm{P}\cos\alpha + \frac{\mathrm{P}b}{x\sin\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{\mathrm{P}b}{(a-x)\sin\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0,$$

ou :

$$\cos\alpha - \frac{b}{x} + \frac{b}{a - x} = 0,$$

et cette condition sera de même forme tant que la position cherchée pour le point M sera située entre A et B.

En mettant cette équation sous forme entière, nous obtenons :

$$x(a - x)\cos\alpha - b(a - x) + bx = 0, \tag{1}$$

ce qui devient, en ordonnant :

$$x^2\cos\alpha - (a\cos\alpha + 2b)x + ab = 0. \tag{2}$$

Pour qu'une racine de cette équation convienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et au plus égale à a.

Or, la condition de réalité est :

$$(a\cos\alpha + 2b)^2 - 4ab\cos\alpha > 0,$$

ou :

$$a^2 \cos^2 \alpha + 4b^2 > 0,$$

et cette condition est toujours satisfaite.

D'ailleurs l'angle α étant aigu, les racines de l'équation (2) sont positives. Nous comparons leur grandeur à a en étudiant le signe du trinôme, premier membre, quand on remplace x par a; ce résultat est $(-ab)$, donc la plus petite des deux racines convient seule et convient toujours. La réponse au problème est donc :

$$x = \frac{a \cos \alpha + 2b - \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + 4b^2}}{2 \cos \alpha}.$$

92. — 2° — En désignant par R la résultante des trois forces P, F, F′ dans l'une quelconque des positions du point M sur AB (fig. 38), et par λ l'angle qu'elle fait avec AB, nous aurons les équations nécessaires pour le calcul de ces inconnues, en exprimant que la projection de la résultante sur AB et sur un axe perpendiculaire à cette direction, égale la somme algébrique des projections des composantes. Ce qui nous donne :

$$\mathrm{R} \cos \lambda = \mathrm{P} \cos \alpha - \frac{\mathrm{P}b}{x} + \frac{\mathrm{P}b}{a - x}, \qquad (3)$$

$$\mathrm{R} \sin \lambda = \mathrm{P} \sin \alpha + \frac{\mathrm{P}b \cos \alpha}{x \sin \alpha} - \frac{\mathrm{P}b \cos \alpha}{(a - x) \sin \alpha}. \qquad (4)$$

Ces deux équations déterminent R et λ. Nous nous proposons de discuter la direction de R qui est définie par λ ; nous éliminons R en divisant membre à membre, ce qui donne :

$$\mathrm{tg}\, \lambda = \frac{\sin \alpha + \frac{b}{x} \cot \alpha - \frac{b}{a - x} \cot \alpha}{\cos \alpha - \frac{b}{x} + \frac{b}{a - x}}. \qquad (5)$$

Sous cette forme, nous voyons que x croissant de zéro à la plus petite racine x_1 de (2), tg λ va toujours décroître; pour cette valeur particulière x_1 cette tangente devient $(-\infty)$ et saute brusquement à $(+\infty)$; x continuant à croître de x_1 à a, la tangente va continuer à décroître en passant par zéro pour la racine positive x_2 de l'équation :

$$\sin \alpha + \frac{b}{x} \cot \alpha - \frac{b}{a - x} \cot \alpha = 0.$$

Enfin, x croissant de x_2 à a, tg λ va devenir négative, et décroître jusqu'à la valeur $(-\cot \alpha)$.

En résumé, quand x a la valeur zéro, on a :

$$\mathrm{tg}\, \lambda = -\cot \alpha,$$

d'où :

$$180 - \lambda = 90 - \alpha,$$

ou :

$$\lambda = 90 + \alpha,$$

ce qui donne la direction AZ (fig. 39).

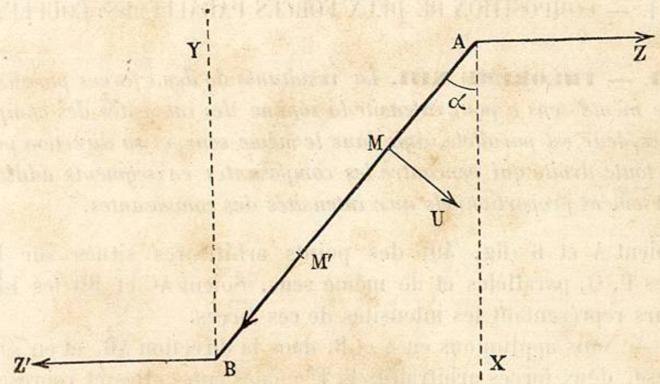

Fig. 39.

Le point matériel descendant le long de AB, l'angle λ va en décroissant; la résultante devient perpendiculaire à AB quand le point matériel atteint la position M pour laquelle $\mathrm{AM} = x_1$. L'angle λ devient aigu, et le point atteignant la position M′ pour laquelle $\mathrm{AM'} = x_2$, la résultante est dirigée suivant M′B. A partir de ce moment la résultante passe de l'autre côté de AB, et elle prend la direction limite BZ′ quand le point arrive en B; en effet, on a dans ce cas :

$$\mathrm{tg}\, \lambda = -\cot \alpha$$

et l'angle λ étant négatif, on a :

$$-\lambda = 90^\circ - \alpha.$$