CHAPITRE III

FORCES PARALLÈLES

§ I. — COMPOSITION DE DEUX FORCES PARALLÈLES. COUPLE.

93. — THÉORÈME XIII. *La résultante de deux forces parallèles et de même sens a pour intensité la somme des intensités des composantes, leur est parallèle, agit dans le même sens, et sa direction partage toute droite qui rencontre les composantes en segments additifs inversement proportionnels aux intensités des composantes.*

Soient A et B (fig. 40) des points arbitraires situés sur les forces P, Q, parallèles et de même sens. Soient AC et BD les longueurs représentant les intensités de ces forces.

1° — Nous appliquons en A et B, dans la direction AB, et en sens inverse, deux forces arbitraires F, F′ égales entre elles et représentées par BE et AH. Ces forces F et F′ se faisant équilibre (axiome I) puisque les points A et B appartiennent au corps solide sur lequel agissent les forces proposées, l'état du corps n'est en rien changé par l'introduction de ces forces (axiome V).

Nous remplaçons les forces F′ et P par leur résultante AG, et les forces F et Q par la résultante BK.

Ces deux résultantes partielles sont concourantes parce que leurs directions font avec AB des angles internes du même côté de AB qui ne sont pas supplémentaires. Soit I le point de rencontre, que nous supposons, pour un instant, invariablement lié aux points A et B.

Transportons les forces AG et BK en I, nous obtenons les deux forces IG′, IK′ sollicitant le point I, et la résultante de ces forces sera la résultante des forces P et Q.

Nous traçons par le point I une parallèle à AB et une parallèle à AP. En décomposant chacune des forces IG′, IK′ suivant ces deux directions, nous sommes conduit à construire des parallélogrammes IH′G′C′ et IE′K′D′ respectivement égaux à AHGC et BEKD. Il en résulte

que les deux composantes IH′ et IE′ se font équilibre, que, par suite, le système se réduit aux deux forces IC′ et ID′ lesquelles, agissant sur un même point I en même direction et même sens, se composent suivant une force R égale à leur somme, agissant dans la même direction et dans le même sens.

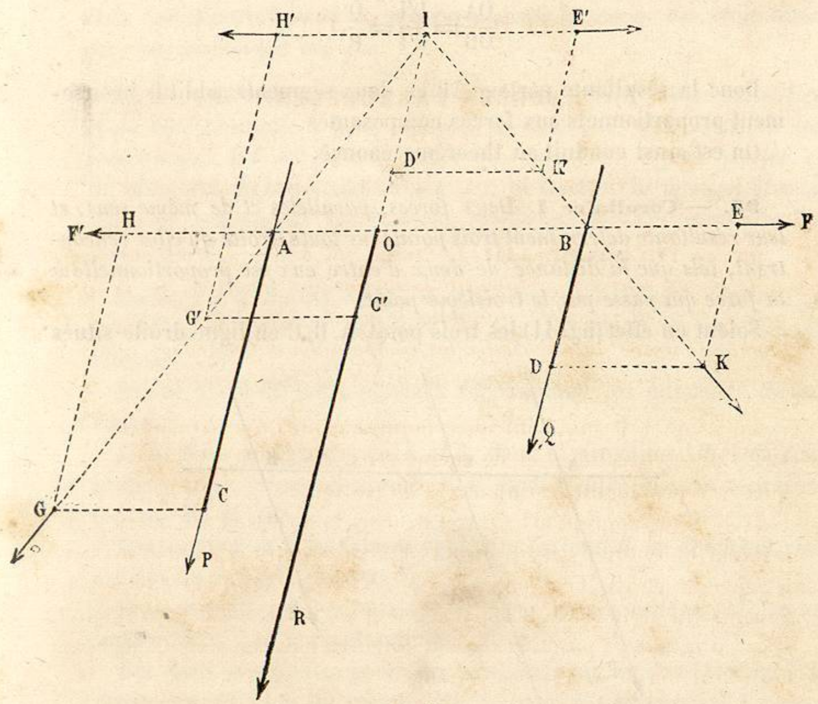


Fig. 40.

Donc déjà, la résultante R des deux forces considérées a pour intensité la somme des intensités des composantes, leur est parallèle et de même sens.

94. — 2° — Pour déterminer complètement cette force, il reste à connaître un point par lequel elle passe, par exemple le point O (fig. 40) où elle rencontre AB ; or, les triangles G′C′I et ID′K′, respectivement semblables aux triangles IOA et IOB, donnent :

$$\frac{OA}{OI}=\frac{G'C'}{C'I} \qquad \text{et} \qquad \frac{OI}{OB}=\frac{D'I}{D'K'};$$

en remarquant que l'on a :

$$G'C' = IH' = IE' = D'K',$$

et en multipliant membre à membre les proportions précédentes, nous obtenons, aprés réductions évidentes :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{D'I}{C'I} = \frac{Q}{P}.$$

Donc la résultante partage AB en deux segments additifs inversement proportionnels aux forces composantes.

On est ainsi conduit au théorème énoncé.

95. — Corollaire I. *Deux forces, parallèles et de même sens, et leur résultante déterminent trois points sur toute droite qu'elles rencontrent, tels que la distance de deux d'entre eux est proportionnelle à la force qui passe par le troisième point.*

Soient en effet (fig. 41) les trois points A, B, C en ligne droite situés

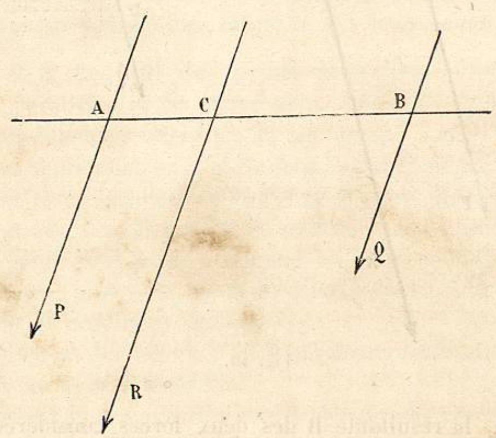


Fig. 41.

respectivement sur les composantes P, Q et leur résultante R. On a, d'après le théorème XIII :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{AC}{Q} = \frac{BC}{P} = \frac{AC + CB}{P + Q},$$

et enfin :

$$\frac{AC}{Q} = \frac{BC}{P} = \frac{AB}{R}.$$

C'est précisément ce qu'il fallait prouver.

96. — Corollaire II. *La projection sur un axe de la résultante de deux forces parallèles et de même sens égale la somme des projections des composantes sur cet axe.*

97. — THÉORÈME XIV. *La résultante de deux forces parallèles et de sens contraire a pour intensité la différence des intensités des composantes, leur est parallèle, agit dans le sens de la plus grande, et sa direction partage toute droite qui rencontre les composantes en segments soustractifs inversement proportionnels aux intensités des composantes.*

Soient A et B (fig. 42) des points arbitraires situés sur les forces P, Q parallèles et de sens contraire, la force Q ayant la plus grande intensité.

Soient AC et BD les longueurs représentant les intensités de ces forces.

1° — Nous appliquons en A et B, dans la direction AB et en sens inverse, deux forces arbitraires F, F′ égales entre elles et représentées par BE et AH.

Ces forces F et F′ se faisant équilibre (axiome I) ne changent rien à l'état du système (axiome V).

Nous remplaçons les forces F′ et P par leur résultante AG, et les forces F et Q par la résultante BK.

Ces deux résultantes partielles sont concourantes et le point I de rencontre est situé du même côté du point B que le point K, parce que AC étant moindre que EK, l'angle IAB est moindre que IBE. Nous supposons pour un instant le point I lié invariablement aux points A et B.

Transportons les forces AG et BK en I, nous obtenons deux forces représentées par IG′ et IK′ sollicitant le point I, et la résultante de ces forces sera aussi la résultante des forces P et Q.

Nous traçons par le point I une parallèle à AB et une parallèle à AC : en décomposant chacune des forces IG′, IK′ suivant ces deux directions, nous sommes conduit à construire des parallélogrammes IH′G′C′ et IE′K′D′ respectivement égaux à AHGC et BEKD : par suite, les composantes IH′ et IE′ se font équilibre, et le système se réduit aux deux forces IC′ et ID′ qui, agissant sur un même point I en même direction et en sens contraire, se composent suivant une force R égale à leur différence, agissant dans la même direction et dans le sens de la force Q.

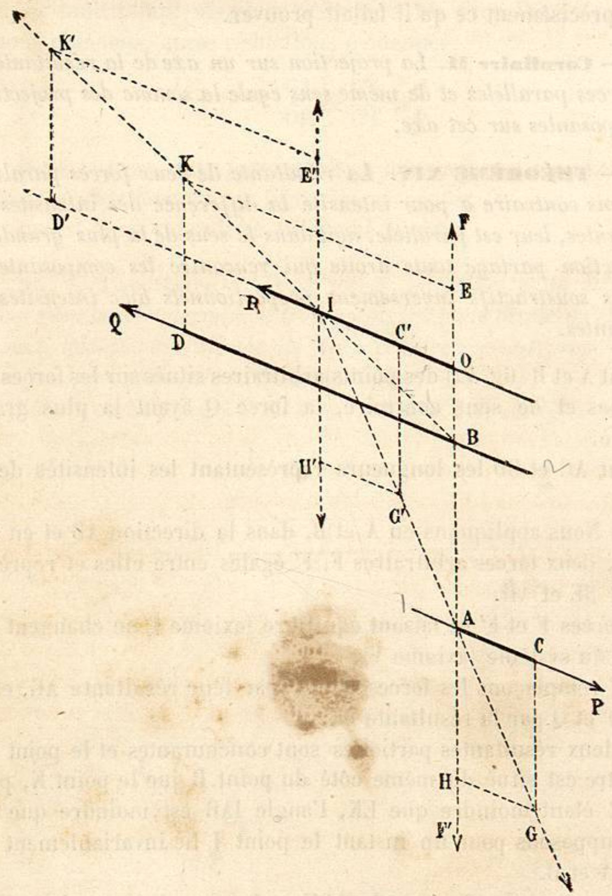


Fig. 42.

Donc, déjà, la résultante R des deux forces considérées a pour intensité la différence des intensités des composantes, leur est parallèle, et agit dans le sens de la plus grande.

98. — 2° — Pour déterminer complètement cette force, il reste à connaître un point par lequel elle passe, par exemple le point O où elle rencontre AB.

De ce que le point I est sur BK, du même côté du point B que le point K, il résulte d'abord que le point O est situé sur AB au delà du point B : il partage donc AB en segments soustractifs.

En second lieu, les triangles IC'G' et ID'K' respectivement semblables aux triangles IOA et IOB donnent :

$$\frac{OA}{OI}=\frac{G'C'}{C'I} \quad \text{et} \quad \frac{OI}{OB}=\frac{D'I}{D'K'},$$

en remarquant que l'on a :

$$G'C'=IH'=IE'=D'K',$$

et en multipliant membre à membre les proportions précédentes, nous obtenons, après réductions évidentes :

$$\frac{OA}{OB}=\frac{ID'}{IC'}=\frac{Q}{P}.$$

Donc la résultante partage AB en deux segments soustractifs inversement proportionnels aux forces composantes.

On est ainsi conduit au théorème énoncé.

99. — Remarque. On peut arriver au théorème précédent en appliquant le théorème XIII.

Soient, en effet (fig. 43), les forces P et Q parallèles, de sens contraire, et soit $Q > P$: nous décomposons la force Q en deux forces parallèles et de même sens, l'une de ces composantes étant égale à P et appliquée en A : en représentant par R l'autre composante, nous aurons d'abord :

$$R=Q-P'.$$

Puis, la direction de R rencontre AB en O tel que l'on ait d'après le corollaire (95) :

$$\frac{OB}{OA}=\frac{P'}{Q},$$

c'est-à-dire que le point O partage AB en segments soustractifs inversement proportionnels aux forces P et Q.

Cette décomposition de la force Q étant opérée, il est visible que l'on peut supprimer les forces P et P' qui se font équilibre, et que par suite la résultante cherchée est la force R qui a bien les propriétés contenues dans le théorème XIV.

100. — Corollaire I. *Deux forces parallèles de sens contraire et leur résultante déterminent trois points sur toute droite qui les rencontre, tels que la distance de deux d'entre eux est proportionnelle à la force qui passe par le troisième point.*

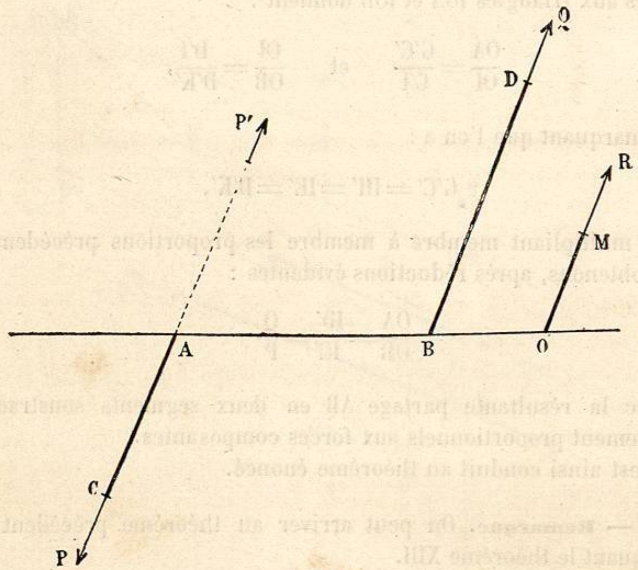


Fig. 43.

Car dans la figure 43 on a :

$$\frac{OB}{OA}=\frac{P}{Q},$$

d'où :

$$\frac{OA}{Q}=\frac{OB}{P}=\frac{OA-OB}{Q-P},$$

et par suite :

$$\frac{OA}{Q}=\frac{OB}{P}=\frac{AB}{R}.$$

101. — Corollaire II. *La projection sur un axe de la résultante de deux forces parallèles et de sens contraire égale la somme algébrique des projections des composantes sur cet axe.*

102. — Définition. *On appelle* COUPLE *le système de deux forces égales, parallèles, de sens contraire et non directement opposées.*

103. — THÉORÈME XV. *Deux forces qui forment un couple n'admettent pas de résultante et ne sont pas en équilibre.*

1° — Le théorème XIV montre aisément qu'il ne peut y avoir de résultante : reportons-nous, en effet, à la figure 43 ; nous avons :

$$\frac{OB}{P}=\frac{AB}{R} \quad \text{et} \quad R=P-Q.$$

Supposons que la force P, d'abord moindre que la force Q, aille en croissant et tende vers l'intensité de l'autre : la force R tendra vers zéro : puis OB croîtra sans limite, puisque

$$OB=\frac{AB\times P}{R},$$

le numérateur du second membre tend vers $AB\times Q$, tandis que le dénominateur tend vers zéro.

On voit ainsi que la résultante se transporte à l'infini et que son intensité devient nulle : cela revient à dire qu'il n'y a plus de résultante.

104. — 2° — Ce résultat se voit *a priori* de la façon suivante :

Soit R (fig. 44) la résultante du système des deux forces P et P'

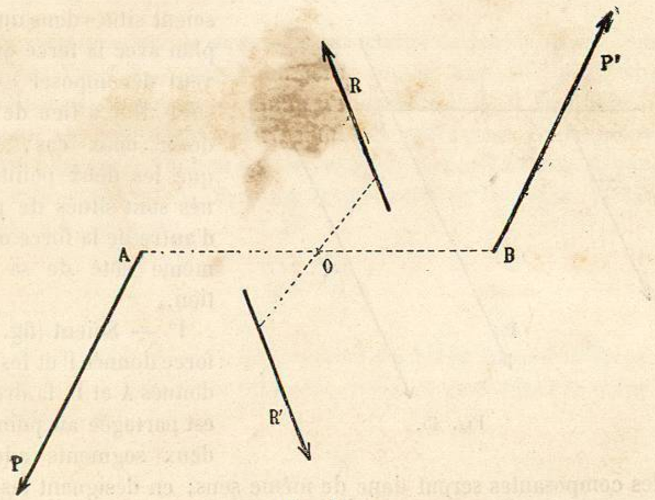


Fig. 44.

égales, parallèles, de sens contraire, mais non directement opposées : faisons tourner la figure de 180° autour d'un axe perpendiculaire au plan des parallèles PP′ et passant par le milieu O de AB; la résultante R vient prendre la position R′ et les forces P et P′ vont se remplacer l'une l'autre : par suite, il y aura encore une résultante identique à R, pour les raisons qui avaient d'abord conduit à cette résultante; le système admettra donc deux résultantes R et R′, ce qui est impossible.

Cette démonstration serait en défaut si l'on supposait que la résultante agisse suivant l'axe choisi pour la rotation : mais il est visible *a priori* que si la résultante existe elle ne peut agir hors du plan qui contient les deux composantes.

105. — 3° — Enfin il n'y a pas équilibre, car en fixant la position du point A (fig. 44) on ne troublerait pas l'équilibre, et il se produirait sous l'action de la seule force P′, dont la direction ne contient pas le point fixe (axiome II).

106. — **Corollaire.** *Deux forces parallèles qui ne sont pas égales et de sens contraire admettent toujours une résultante.*

107. — **Application.** *Décomposer une force donnée en deux forces parallèles passant par deux points donnés.*

Il est d'abord nécessaire *a priori* que les deux points donnés soient situés dans un même plan avec la force que l'on veut décomposer : et ensuite il y a lieu de considérer deux cas, suivant que les deux points donnés sont situés de part et d'autre de la force ou d'un même côté de sa direction.

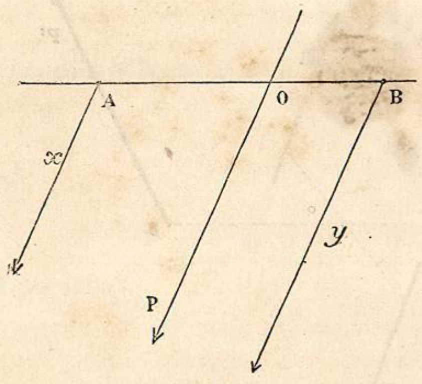


Fig. 45.

1° — Soient (fig. 45) la force donnée P et les points donnés A et B, la droite AB est partagée au point O en deux segments additifs : les composantes seront donc de même sens; en désignant les intensités par x et y, on aura (théorème XIII) :

$$\frac{x}{OB}=\frac{y}{OA}=\frac{P}{AB}.$$

Ces relations déterminent les inconnues x et y, car les longueurs OA et OB sont données.

2° — Soient (fig. 46) les deux points donnés A, B, situés d'un même côté de P : les composantes x et y seront alors de sens contraire, et celle qui aura la plus grande intensité agira dans le même sens que P : on aura donc (théorème XIV) :

$$\frac{x}{OB}=\frac{y}{OA}=\frac{P}{AB},$$

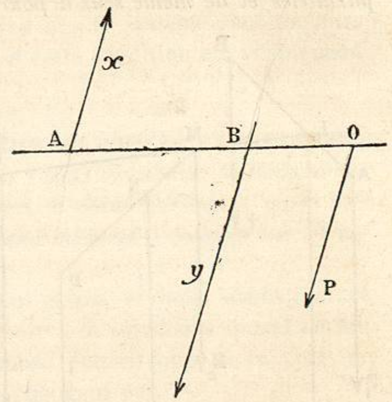


Fig. 46.

et ces relations résolvent complètement la question.

§ II. — COMPOSITION DE FORCES PARALLÈLES EN NOMBRE ARBITRAIRE. CENTRE DES FORCES PARALLÈLES.

108. — **Composition de forces parallèles de même sens.** Soient les forces $F_1F_2F_3F_4$... parallèles et de même sens, sur la direction desquelles nous prenons les points arbitraires A, B, C, D... (fig. 47), que nous supposons invariablement liés entre eux. Nous pouvons d'abord remplacer l'action des forces F_1 et F_2 par la force R_1 parallèle à celles-ci, égale à (F_1+F_2) et passant par le point L, situé entre A et B, tel que :

$$\frac{LA}{F_2}=\frac{LB}{F_1}.$$

Les deux forces R_1 et F_3 se composeront alors suivant la force R_2 parallèle à celles-ci, égale à $(F_1+F_2+F_3)$, et passant par le point M, situé entre L et C, tel que :

$$\frac{ML}{F_3}=\frac{MC}{F_1+F_2}.$$

De même, les forces R_2 et F_3 admettent pour résultante la force R qui est parallèle aux composantes.

Il faut conclure de ceci que *la résultante de plusieurs forces parallèles et de même sens a pour intensité la somme des intensités des composantes, qu'elle leur est parallèle et qu'elle agit dans le même sens.*

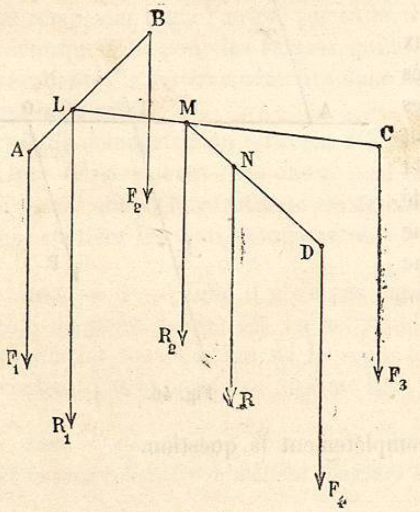


Fig. 47.

109. — Remarque. — Si nous supposons les forces composantes appliquées aux points A, B, C, D.... d'un même système invariable, nous voyons que la résultante R passe par un point N *dont la position ne dépend pas de la direction commune aux forces composantes.*

De plus, *ce point reste invariable si l'on change les intensités des composantes, pourvu que les rapports de l'une de ces forces à toutes les autres ne changent pas.*

Ainsi, le point L (fig. 47) est déterminé par le rapport des forces F_1 et F_2, le point M est déterminé par le rapport des forces (F_1+F_2) et F_3, etc.

110. — Résultante d'un système quelconque de forces parallèles. Dans le cas général où les forces composantes parallèles entre elles agissent les unes dans un sens, les autres dans l'autre, on pourra toujours réduire ces forces à deux R′, R″ parallèles entre elles et agissant en sens contraire; on composera alors ces deux forces d'après le théorème XIV, à moins qu'elles ne soient d'égale intensité, et non directement opposées, auquel cas elles forment un couple et le système proposé n'admet pas de résultante.

On est ainsi conduit à dire que si l'on attribue le signe + aux forces parallèles d'un système qui agissent dans un sens, et le signe — à celles qui agissent en sens contraire, *la résultante d'un système de forces parallèles est représentée en grandeur et en signe par la somme algébrique des forces composantes.*

111. — Équilibre des forces parallèles. *Il faut et il suffit, pour qu'un système de forces parallèles soit en équilibre, que la résultante des forces qui tirent dans un sens soit égale et directement opposée à la résultante des forces qui agissent dans l'autre sens.*

La condition est nécessaire, parce que le système peut toujours être réduit à ces deux résultantes; et cette condition est visiblement suffisante.

112. — CENTRE D'UN SYSTÈME DE FORCES PARALLÈLES.

On appelle centre d'un système de forces parallèles *sollicitant des points liés invariablement entre eux, le point par lequel passe toujours la résultante de ces forces quand on vient à changer leur direction commune.*

Nous avons vu (109) que ce point existe, et nous avons montré qu'il a aussi la propriété d'appartenir à la résultante quand on fait varier les intensités des composantes, pourvu que les rapports de l'une d'elles à toutes les autres ne changent pas.

Nous aurons à déterminer analytiquement la position de ce point qui joue un rôle important en mécanique : nous nous bornons pour le moment à constater son existence.

Dans le cas particulier où les forces composantes sont d'égale intensité, le centre de ces forces parallèles est le *centre des moyennes distances* des points qu'elles sollicitent.

113. — Application I. *Quel est le centre des forces parallèles égales sollicitant quatre points invariablement liés entre eux et placés aux sommets d'un parallélogramme* ABCD *(fig. 48), sachant*

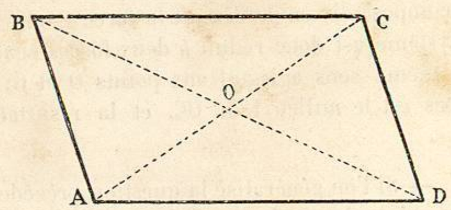


Fig. 48.

que la force qui sollicite le point A *est dirigée en sens contraire des trois autres?*

Le centre des deux forces égales, parallèles et de même sens, sollicitant les points B, D est le milieu O de BD, et la résultante de ces forces est 2F; nous la décomposons en deux forces parallèles et de même sens appliquées en A et C : ces composantes seront égales à F, puisque O est aussi le milieu de AC; la composante agissant en C détruit la force (—F) qui sollicite ce point, et il reste la force (2F) sollicitant le point A : c'est la résultante du système, et le centre cherché est le point A.

Remarque. — Si l'on supposait les forces sollicitant C et D de sens contraire aux forces qui agissent en A et B, le système se ramènerait à un couple et n'aurait pas de résultante.

114. — Application II. *Quel est le centre des forces parallèles égales sollicitant six points* A, B, C, D, E, F (fig. 49), *deux à deux symétriques par rapport à un même point* O, *et invariablement liés entre eux, sachant que les forces qui sollicitent les points* A, B, C, D, E, *sont de même sens et que la force qui sollicite le point* F *est de sens contraire à celles-ci?*

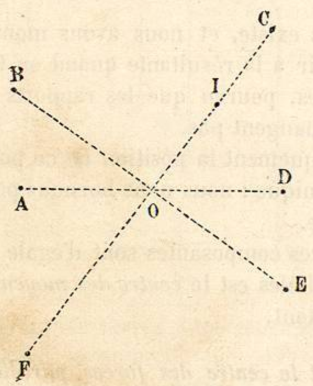


Fig. 49.

Les forces égales, parallèles et de même sens qui sollicitent les points A, B, D, E, ont pour centre le point O; elles sont donc remplacées par la force (4P) agissant en O.

Nous décomposons une partie 2P en deux autres forces parallèles et de même sens agissant en C et F, ces composantes seront égales à P, puisque le point O est le milieu de CF; la composante en F détruit la force (—P) qui agit en ce point; le système est donc réduit à deux forces égales à 2P, parallèles et de même sens agissant aux points O et C; donc le centre de ces forces est le milieu I de OC, et la résultante du système vaut 4P.

Remarque. — Si l'on généralise la question précédente et que l'on considère $2n$ points deux à deux symétriques par rapport à un point O, un de ces points A étant sollicité par une force de sens inverse aux autres, on trouvera que le centre est sur le prolongement de OA à une distance de O égale à $\frac{1}{n-1} \times$ OA.

115. — Application III. *Décomposer une force donnée en trois autres forces parallèles à sa direction et sollicitant trois points donnés.*

1° — Soit O le point où la force donnée P rencontre le plan des trois points donnés A, B, C (fig. 50) : nous joignons le point O à l'un des trois points donnés, soit B, cette droite détermine sur AC le

$\frac{Bo}{BD} = \frac{Oe}{Dh}$

$\frac{Ab}{Db} = \frac{Ae}{OH}$

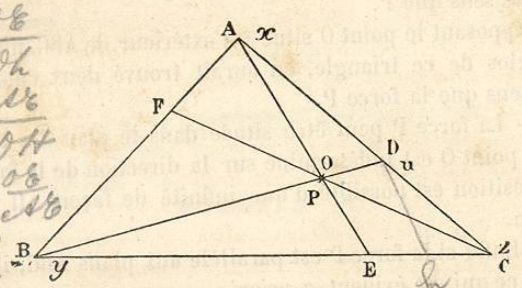


Fig. 50.

point D. Le point O étant compris entre B et D, nous décomposons la force P en deux forces parallèles et de même sens y et u, sollicitant les points B et D, nous avons :

$$\frac{y}{OD} = \frac{u}{OB} = \frac{P}{BD}. \qquad (1)$$

Ces équations déterminent y et u.

Le point D étant situé entre A et C, nous décomposons la force u en deux forces x et z de même sens, passant par les points A et C; nous aurons :

$$\frac{x}{DC} = \frac{z}{AD} = \frac{u}{AC}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) déterminent les inconnues x, y, z ; nous en tirons aisément :

$$x = \frac{DC}{AC} \times \frac{OB}{BD} \times P, \qquad y = \frac{OD}{BD} \times P, \qquad z = \frac{AD}{AC} \times \frac{OB}{BD} \times P.$$

Ces valeurs peuvent se transformer en appliquant le théorème de Ménélaüs; on obtient ainsi les résultats simples :

$$x = \frac{OE}{AE} \times P \qquad y = \frac{OD}{BD} \times P \qquad z = \frac{OF}{CF} \times P.$$

On en déduit aisément les valeurs :

$$\frac{x}{BOC} = \frac{y}{AOC} = \frac{z}{AOB} = \frac{P}{ABC}.$$

2° — Si nous avions supposé le point O situé à l'extérieur du triangle ABC, mais dans l'un des angles opposés par le sommet aux angles de ce triangle, nous aurions obtenu une seule composante de même sens que P.

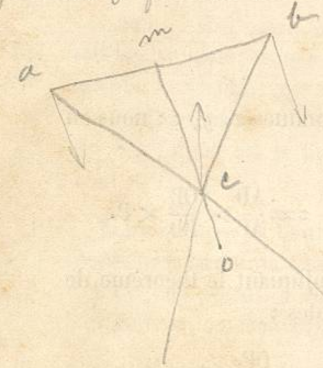
En supposant le point O situé à l'extérieur de ABC, mais dans l'un des angles de ce triangle, on aurait trouvé deux composantes de même sens que la force P.

3° — La force P peut être située dans le plan des trois points : alors le point O est indéterminé sur la direction de la force P, et la décomposition est possible d'une infinité de façons. Il y a indétermination.

4° — Enfin si la force P est parallèle aux plans ABC, il y a impossibilité, ce qui est évident *a priori*.

116. — Remarque. — Si l'on cherche à décomposer une force F en forces parallèles sollicitant n points donnés, on est conduit à une indétermination tant que n est supérieur à 3. En effet prenons des valeurs arbitraires pour les forces qui sollicitent $(n-3)$ des points donnés et soit R leur résultante : composons alors la force F avec une force $(-R)$ égale et contraire à R, et soit R′ leur résultante : nous décomposons alors R′ en forces parallèles, sollicitant les trois points donnés qui restent : ces trois composantes et les $(n-3)$ prises arbitrairement admettent comme résultante la force F.

punto o fuori del triangolo



CHAPITRE IV

MOMENTS

§ I. — MOMENTS PAR RAPPORT A UN POINT

117. — Définition. *Le* MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT *est une quantité algébrique dont la valeur absolue est le produit de l'intensité de la force par la distance du point à cette force.*

Il résulte de cette définition que le moment d'une force par rapport à un point étant un produit de deux facteurs, ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul; *si donc une force qui n'est pas nulle a un moment nul par rapport à un point, c'est que sa direction passe par ce point.*

Soient la force F et le point O (fig. 51) : la perpendiculaire OA abaissée du point O sur F s'appelle le *bras de levier de la force* F; si nous supposons la droite OA rigide, mais pouvant tourner autour du point O, et si nous supposons la force F agissant directement sur le point A, il est visible qu'il se produira un mouvement de rotation dans le plan de la figure et dans le sens de la flèche.

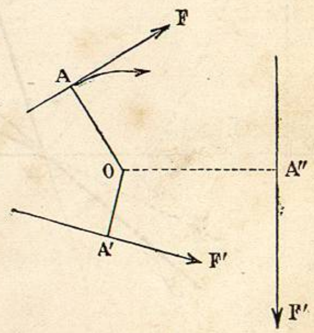


Fig. 51.

Le signe du moment de la force F sera + ou — suivant que cette rotation fictive se fera dans un sens ou dans l'autre. D'ailleurs le choix du sens de rotation qui correspond aux moments positifs est indifférent; mais une fois ce sens choisi, dans une même question, il faut le conserver.

Ainsi, en représentant par F, F′, F″ les intensités des forces (fig. 51)