2° — Si nous avions supposé le point O situé à l'extérieur du triangle ABC, mais dans l'un des angles opposés par le sommet aux angles de ce triangle, nous aurions obtenu une seule composante de même sens que P.

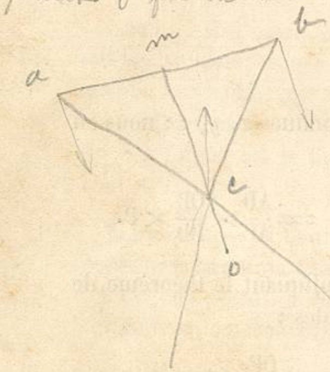
En supposant le point O situé à l'extérieur de ABC, mais dans l'un des angles de ce triangle, on aurait trouvé deux composantes de même sens que la force P.

3° — La force P peut être située dans le plan des trois points : alors le point O est indéterminé sur la direction de la force P, et la décomposition est possible d'une infinité de façons. Il y a indétermination.

4° — Enfin si la force P est parallèle aux plans ABC, il y a impossibilité, ce qui est évident *a priori*.

116. — Remarque. — Si l'on cherche à décomposer une force F en forces parallèles sollicitant n points donnés, on est conduit à une indétermination tant que n est supérieur à 3. En effet prenons des valeurs arbitraires pour les forces qui sollicitent $(n-3)$ des points donnés et soit R leur résultante : composons alors la force F avec une force $(-R)$ égale et contraire à R, et soit R′ leur résultante : nous décomposons alors R′ en forces parallèles, sollicitant les trois points donnés qui restent : ces trois composantes et les $(n-3)$ prises arbitrairement admettent comme résultante la force F.

punto o fuori del triangolo



CHAPITRE IV

MOMENTS

§ I. — MOMENTS PAR RAPPORT A UN POINT

117. — Définition. *Le* MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT *est une quantité algébrique dont la valeur absolue est le produit de l'intensité de la force par la distance du point à cette force.*

Il résulte de cette définition que le moment d'une force par rapport à un point étant un produit de deux facteurs, ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul; *si donc une force qui n'est pas nulle a un moment nul par rapport à un point, c'est que sa direction passe par ce point.*

Soient la force F et le point O (fig. 51) : la perpendiculaire OA abaissée du point O sur F s'appelle le *bras de levier de la force* F; si nous supposons la droite OA rigide, mais pouvant tourner autour du point O, et si nous supposons la force F agissant directement sur le point A, il est visible qu'il se produira un mouvement de rotation dans le plan de la figure et dans le sens de la flèche.

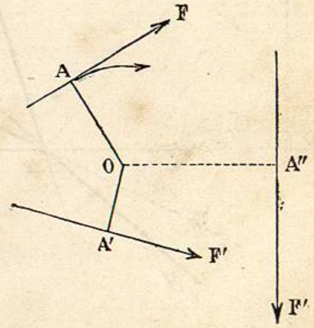


Fig. 51.

Le signe du moment de la force F sera + ou — suivant que cette rotation fictive se fera dans un sens ou dans l'autre. D'ailleurs le choix du sens de rotation qui correspond aux moments positifs est indifférent; mais une fois ce sens choisi, dans une même question, il faut le conserver.

Ainsi, en représentant par F, F′, F″ les intensités des forces (fig. 51) agissant dans le plan de la figure qui contient le CENTRE O DES MOMENTS, les moments de ces forces auront respectivement pour valeur :

$$\pm F \times OA, \qquad \mp F' \times OA', \qquad \pm F'' \times OA''.$$

Les signes supérieurs se correspondant ainsi que les signes inférieurs.

118. THÉORÈME XV (de Varignon). *Le moment de la résultante de deux forces concourantes par rapport à un point de leur plan est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Le centre des moments pouvant être situé dans l'un des quatre angles déterminés par les deux forces concourantes, nous distinguerons deux cas, suivant que ce point est placé dans l'angle qui contient la résultante et l'angle opposé par le sommet, ou dans l'un des deux autres angles.

Premier cas. — Le point O n'est pas situé dans l'angle des forces où agit la résultante, ni dans son opposé par le sommet (fig. 52); alors les trois moments sont de même signe.

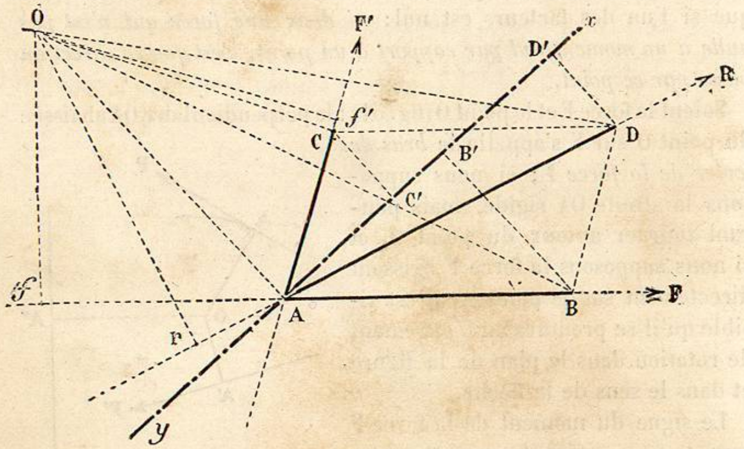


Fig. 52.

Nous traçons les bras de levier Of, Of' et Or des deux composantes F et F' et de leur résultante R : la relation que nous devons démontrer est la suivante :

$$AB \times Of + AC \times Of' = AD \times Or. \qquad (1)$$

Or, les trois produits précédents sont les doubles des aires des triangles AOB, AOC, AOD ; l'égalité (1) revient donc à la suivante :

$$AOB + AOC = AOD. \qquad (2)$$

Mais ces triangles ont un côté commun OA que l'on peut prendre pour base commune ; si donc nous traçons la perpendiculaire xy à OA, et que nous projetions en B', C', D' les sommets des triangles précédents, la relation (2) équivaudra à l'égalité :

$$AB' + AC' = AD',$$

ou enfin :

$$AC' = B'D'.$$

Relation vraie, parce que les droites égales et parallèles AC, BD ont des projections égales sur un même axe xy.

Deuxième cas. — Supposons le centre O des moments situé dans l'angle où agit la résultante, ou dans son opposé par le sommet : il arrivera alors que les moments des composantes seront de signes contraires. Nous avons donc à démontrer dans ce cas (fig. 53) :

$$AB \times Of - AC \times Of' = AD \times Or.$$

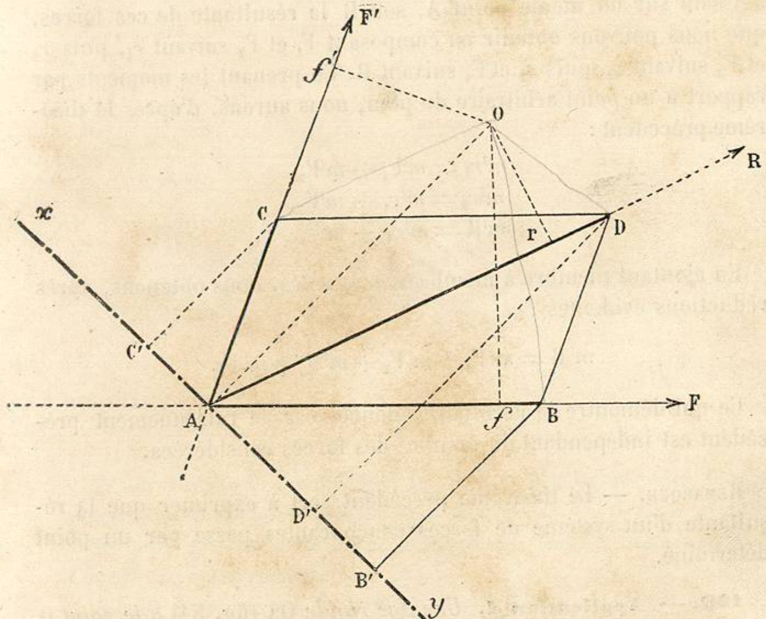


Fig. 53.

Ce qui se transforme, comme dans le premier cas, dans l'égalité suivante :

$$AOB - AOC = AOD.$$

Et en projetant les points B, C, D, sur l'axe xy perpendiculaire à OA :

$$AB' - AC' = AD',$$

ou :

$$AC' = D'B'.$$

Ce qui est vrai, puisque les droites AC, BD égales et parallèles ont des projections égales sur xy.

En résumé, le théorème est démontré quelle que soit la position occupée par le centre des moments dans le plan des deux forces.

119. — Corollaire. *Le moment de la résultante d'un système de forces concourantes et situées dans le même plan, par rapport à un point de ce plan, est égal à la somme algébrique des moments de toutes les composantes par rapport à ce point.*

Soient, en effet, les forces F_1, F_2, F_3, F_4, situées dans le même plan et agissant sur un même point A, soit R la résultante de ces forces, que nous pouvons obtenir en composant F_1 et F_2 suivant r_1, puis r_1 et F_3 suivant r_2, puis r_2 et F_4 suivant R. En prenant les moments par rapport à un point arbitraire du plan, nous aurons, d'après le théorème précédent :

$$m^t r_1 = m^t F_1 + m^t F_2,$$
$$m^t r_2 = m^t r_1 + m^t F_3,$$
$$m^t R = m^t r_2 + m^t F_4.$$

En ajoutant membre à membre ces égalités, nous obtenons, après réductions évidentes :

$$m^t R = m^t F_1 + m^t F_2 + m^t F_3 + m^t F_4.$$

Ce qui démontre le corollaire énoncé, car le raisonnement précédent est indépendant du nombre des forces considérées.

Remarque. — Le théorème précédent sert à exprimer que la résultante d'un système de forces concourantes passe par un point déterminé.

120. — Application I. *Une tige rigide OA (fig. 54) a le point O fixe, et l'autre extrémité A est sollicitée par trois forces agissant dans*

le plan de la figure supposé vertical ; les intensités des forces F, F′, F″ sont proportionnelles aux nombres $\sqrt{3}$, 1 et 4 ; la force F agit verticalement, la force F″ agit horizontalement, et la direction de la force F′ fait un angle de 30° avec la verticale.

On propose de trouver la position d'équilibre de la droite OA.

D'après l'axiome II, il faut et il suffit pour l'équilibre que la résultante des trois forces considérées passe par le point fixe O.

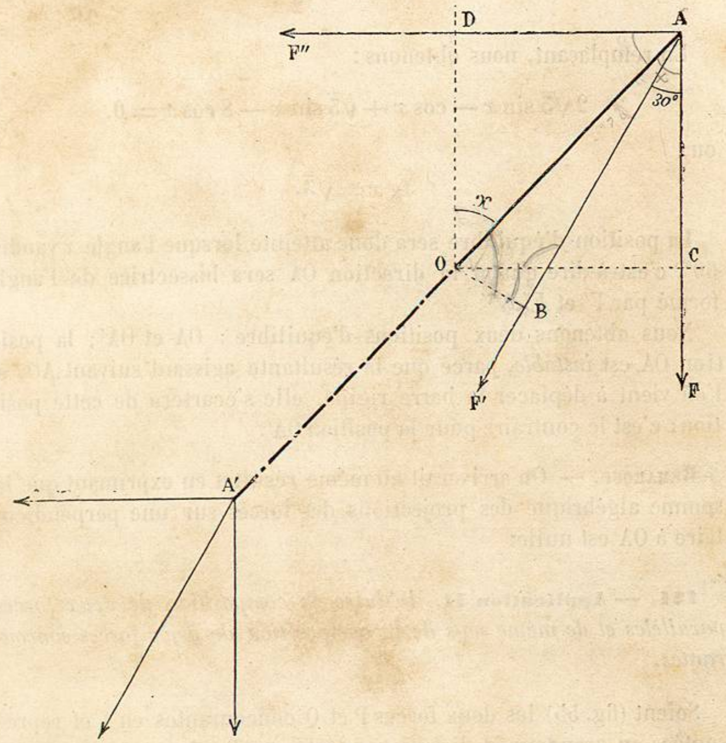


Fig. 54.

Il faut donc, et il suffit, que la somme algébrique des moments des forces considérées par rapport au point O soit nulle.

Prenons comme inconnue l'angle x que fait OA avec la verticale, l'équilibre étant supposé obtenu.

L'équilibre s'exprime alors par l'équation :

$$OA \times F \sin x + OA \times F' \cos(120 - x) - OA \times F'' \cos x = 0,$$

cos (180 − 90 − OAB) = cos (180 − 90 − (x − 30))
cos (90 − x + 30) = cos (120 − x)

qui se réduit à :

$$\sqrt{3}\sin x + \cos 120 \times \cos x + \sin 120 \times \sin x - 4\cos x = 0\,;$$

or

$$\cos 120 = -\frac{1}{2},$$

et :

$$\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En remplaçant, nous obtenons :

$$2\sqrt{3}\sin x - \cos x + \sqrt{3}\sin x - 8\cos x = 0,$$

ou :

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

La position d'équilibre sera donc atteinte lorsque l'angle x vaudra 60°, c'est-à-dire quand la direction OA sera bissectrice de l'angle formé par F′ et F″.

Nous obtenons deux positions d'équilibre : OA et OA′ ; la position OA est *instable*, parce que la résultante agissant suivant AO, si l'on vient à déplacer la barre rigide, elle s'écartera de cette position ; c'est le contraire pour la position OA′.

Remarque. — On arriverait au même résultat en exprimant que la somme algébrique des projections des forces sur une perpendiculaire à OA est nulle.

121. — Application II. *Déduire la composition de deux forces parallèles et de même sens de la composition de deux forces concourantes.*

Soient (fig. 55) les deux forces P et Q concourantes en A et représentées en grandeur et direction par AC et AB ; leur résultante est alors AD, diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC.

Prenons un point arbitraire O sur AD, et projetons ce point en E et H sur les composantes ; nous aurons, d'après le théorème des moments :

$$P \times OH = Q \times OE.$$

Cela posé, imaginons que la direction de la force P se déplace en restant tangente à la circonférence de centre O et de rayon OH ; la

résultante de cette force variable de direction et de la force Q passera toujours par le point O, puisque la somme des moments est nulle par rapport à ce point, et elle passera aussi par le point de concours variable des forces P et Q. Ainsi, lorsque la force P occupe la position P_1, la résultante prend la nouvelle direction A′O.

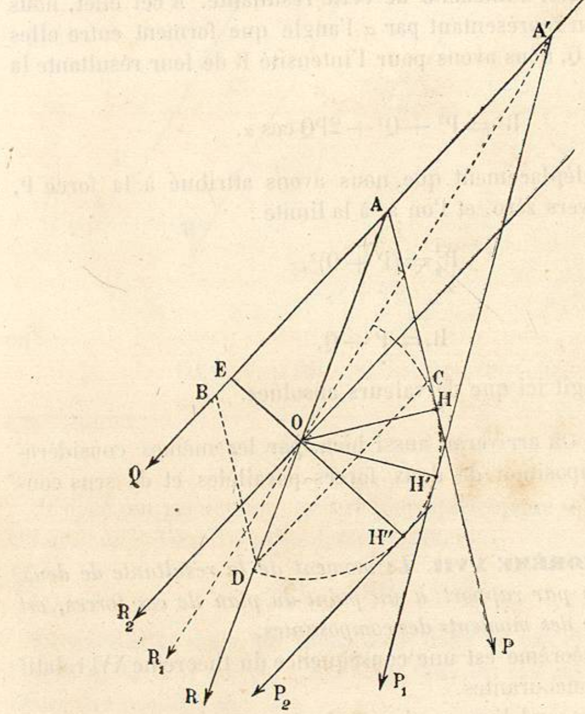


Fig. 55.

Or, lorsque la force P sera devenue parallèle à Q, c'est-à-dire quand le point H sera en H″, le point A se trouvera transporté à l'infini, la résultante, passant toujours par ce point, sera donc dirigée suivant la parallèle R_2 à la direction commune des forces, et passera par le point O.

D'ailleurs, pour ce point O on a, par hypothèse :

$$Q \times OE = P \times OH'',$$

ou :

$$\frac{P}{Q} = \frac{OE}{OH''}.$$

Donc déjà la résultante des forces parallèles et de même sens P_2 et Q est parallèle à celles-ci, de même sens et partage la portion de droite EH″, comprise entre les composantes, en segments additifs inversement proportionnels aux intensités de ces forces.

Il reste à trouver l'intensité de cette résultante. A cet effet, nous rappelons qu'en représentant par α l'angle que forment entre elles les forces P et Q, nous avons pour l'intensité R de leur résultante la relation :

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha.$$

Or, dans le déplacement que nous avons attribué à la force P, l'angle α tend vers zéro, et l'on a, à la limite :

$$R_2^2 = (P + Q)^2,$$

d'où :

$$R_2 = P + Q,$$

puisqu'il ne s'agit ici que de valeurs absolues.

Remarque. — On arriverait aussi bien, par les mêmes considérations, à la composition de deux forces parallèles et de sens contraires.

122. — THÉORÈME XVII. *Le moment de la résultante de deux forces parallèles par rapport à un point du plan de ces forces, est égal à la somme des moments des composantes.*

D'abord ce théorème est une conséquence du théorème XVI relatif à deux forces concourantes.

On peut, en second lieu, en donner la démonstration directe suivante :

Soient (fig. 56) les deux forces parallèles et de même sens P et Q, et leur résultante R.

Soit un point O arbitraire du plan, par lequel nous traçons une droite quelconque qui rencontre ces forces aux points A, B, C. Nous avons entre les segments CA, CB la proportion démontrée :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}.$$

Exprimons les lignes CA et CB en fonction de segments comptés à partir du point O, il viendra :

$$\frac{OA - OC}{OC - OB} = \frac{Q}{P},$$

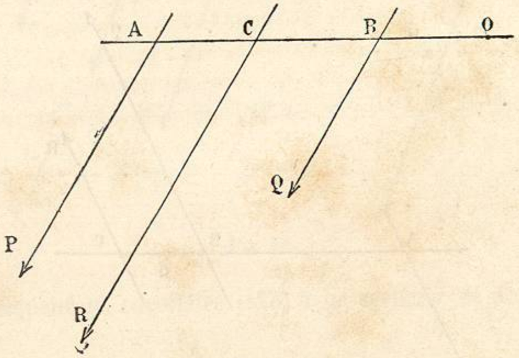


Fig. 56.

ou :

$$OA \times P + OB \times Q = OC \times (P + Q),$$

c'est-à-dire :

$$OA \times P + OB \times Q = OC \times R.$$

Si donc, en particulier, la direction quelconque OA est perpendiculaire sur P, l'égalité précédente signifiera :

$$m^t P + m^t Q = m^t R.$$

La relation énoncée est donc vraie dans le cas de la figure 56. Il est aisé de voir qu'elle existe dans tous les cas possibles. Prenons une autre position (fig. 57).

Nous avons :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P},$$

ce qui devient comme ci-dessus :

$$\frac{OC + OA}{OC + OB} = \frac{Q}{P},$$

puis :

$$OA \times P - OB \times Q = OC(Q - P),$$

et par suite :

$$m' P + m' Q = m R,$$

en supposant la direction AB perpendiculaire sur les forces considérées.

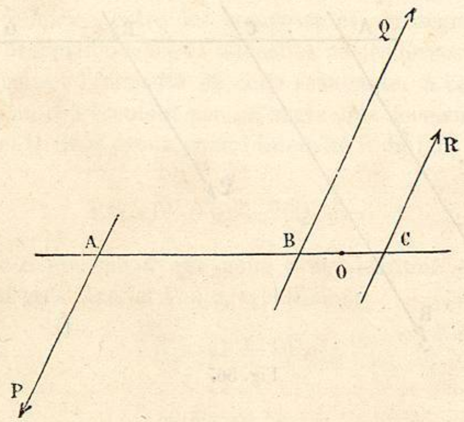


Fig. 57.

Remarque. — On voit que la démonstration précédente ne suppose pas les bras de levier des forces parallèles perpendiculaires sur ces forces. Le résultat est donc indépendant de cette hypothèse.

123. — Corollaire I. *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles situées dans le même plan, par rapport à un point de ce plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Même démonstration que pour le corollaire (119).

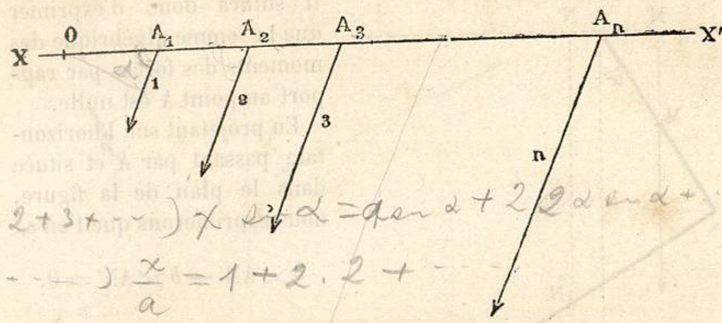
Corollaire II. *La somme des moments des forces qui forment un couple est indépendante de la position du centre des moments dans le plan de ces forces.*

124. — Application I. *Une barre rigide XX′ (fig. 58) est sollicitée en des points $A_1, A_2 \ldots A_n$ équidistants, par des forces parallèles de même sens dont les intensités sont représentées par $1, 2, 3 \ldots n$; déterminer le centre de ce système de forces parallèles.*

Nous prenons le point O tel que :

$$A_1O = A_1A_2 = a,$$

et nous cherchons la distance x à ce point O du centre des forces considérées.



$(1+2+3+\ldots)\times x \sin\alpha = a \sin\alpha + 2\,2a \sin\alpha +$

$(1+2+\ldots)\,\frac{x}{a} = 1 + 2.2 +$

Fig. 58.

En appliquant le corollaire (123) à ce système de forces, nous obtenons :

$$(1+2+3\ldots+n)\times x = a\times 1 + 2a\times 2 + 3a\times 3 + \ldots + na\times n,$$

d'où :

$$\frac{x}{a} = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n},$$

et par suite :

$$\frac{x}{a} = \frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\dfrac{n(n+1)}{2}},$$

donc :

$$x = \frac{2n+1}{3}\times a.$$

Ce qui détermine complètement la position du centre cherché.

125. — Application II. *Deux barres rigides AB, BC, à angle droit et invariablement liées l'une à l'autre* (fig. 59) *sont sollicitées en leurs milieux M et N par des forces verticales proportionnelles à leurs longueurs 2a, 2b. On fixe le point A et l'on demande l'angle que doit faire AB avec la verticale pour qu'il y ait équilibre.*

Le corps solide formé par les deux barres AB, BC est sollicité, somme toute, par une seule force qui est la résultante des forces considérées. Il faut donc et il suffit, pour l'équilibre, que cette résultante passe par le point fixe A (axiome II). Par suite du théorème XVII (122), il suffira donc d'exprimer que la somme algébrique des moments des forces par rapport au point A est nulle.

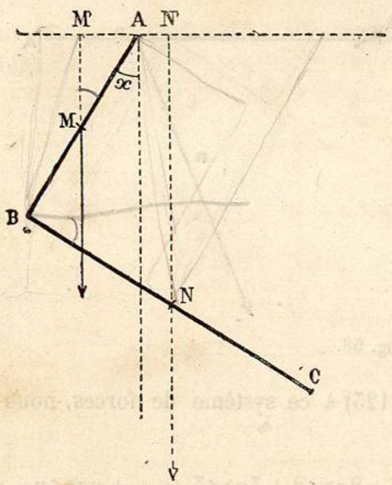


Fig. 59.

En projetant sur l'horizontale passant par A et située dans le plan de la figure, nous exprimerons que l'on a :

$$a \times AM' - b \times AN' = 0,$$

or :

$$AM' = a \sin x,$$

puis, en projetant le contour ABNN' :

$$AN' = 2a \cos(90 + x) + b \cos x$$

d'où l'équation :

$$a^2 \sin x + 2ab \sin x - b^2 \cos x = 0.$$

On en tire aisément :

$$\operatorname{tg} x = \frac{b^2}{a(a+2b)},$$

formule de laquelle résulte l'angle aigu qui répond à la question.

§ II. — *MOMENTS PAR RAPPORT A UN AXE.

126. — ***Définition.** *On appelle* MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN AXE *le moment de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à cet axe, par rapport au pied de l'axe sur ce plan.*

Ainsi, soient (fig. 60) l'axe XY et la force F. Nous projetons F en F' sur le plan P perpendiculaire en un point arbitraire O de XY, et nous appelons *moment de la force* F *par rapport à* XY le moment de F' par rapport au point O.

Si donc OA est la distance de O à F', c'est-à-dire *la plus courte distance des droites* F et XY, le moment de F sera :

$$+ OA \times F'$$

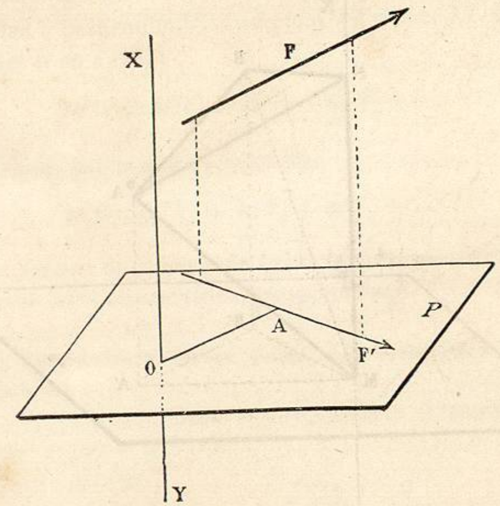


Fig. 60.

ou :

$$- OA \times F',$$

suivant la convention faite sur les signes.

127. — * *La condition nécessaire et suffisante pour que le moment d'une force par rapport à un axe soit nul est que cette force, n'étant pas nulle, soit dans un même plan avec l'axe.*

En effet (fig. 60) le moment de la force F' par rapport au point O ne peut être nul que si F' est nulle, ou si la direction de F' passe par le point O. Dans le premier cas, F est parallèle à l'axe, et dans le second cas F rencontre XY. Donc, si le moment de F est nul, c'est que F est dans un même plan avec XY. La condition est visiblement suffisante.

128 — ***Remarque.** *Une force étant représentée en grandeur et direction par* AB, M *et* N *étant deux points arbitraires d'un axe* XY, *le moment de cette force par rapport à* XY *a pour valeur absolue le quotient par* MN *de six fois le volume du tétraèdre* MNAB.