rées. Il faut donc et il suffit, pour l'équilibre, que cette résultante passe par le point fixe A (axiome II). Par suite du théorème XVII (122), il suffira donc d'exprimer que la somme algébrique des moments des forces par rapport au point A est nulle.

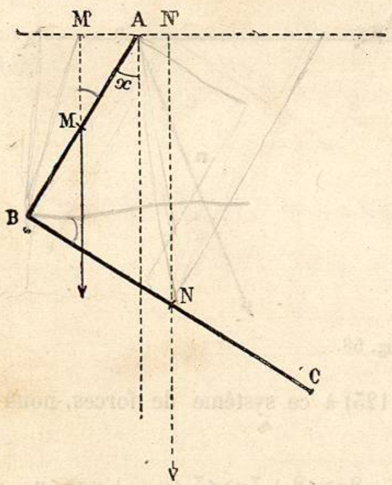

Fig. 59.

En projetant sur l'horizontale passant par A et située dans le plan de la figure, nous exprimerons que l'on a :

$$a \times AM' - b \times AN' = 0,$$

or :

$$AM' = a \sin x,$$

puis, en projetant le contour ABNN' :

$$AN' = 2a \cos(90 + x) + b \cos x$$

d'où l'équation :

$$a^2 \sin x + 2ab \sin x - b^2 \cos x = 0.$$

On en tire aisément :

$$\operatorname{tg} x = \frac{b^2}{a(a+2b)},$$

formule de laquelle résulte l'angle aigu qui répond à la question.

§ II. — *MOMENTS PAR RAPPORT A UN AXE.

126. — ***Définition.** *On appelle* MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN AXE *le moment de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à cet axe, par rapport au pied de l'axe sur ce plan.*

Ainsi, soient (fig. 60) l'axe XY et la force F. Nous projetons F en F' sur le plan P perpendiculaire en un point arbitraire O de XY, et nous appelons *moment de la force* F *par rapport à* XY le moment de F' par rapport au point O.

Si donc OA est la distance de O à F', c'est-à-dire *la plus courte distance des droites* F et XY, le moment de F sera :

$$+ OA \times F'$$

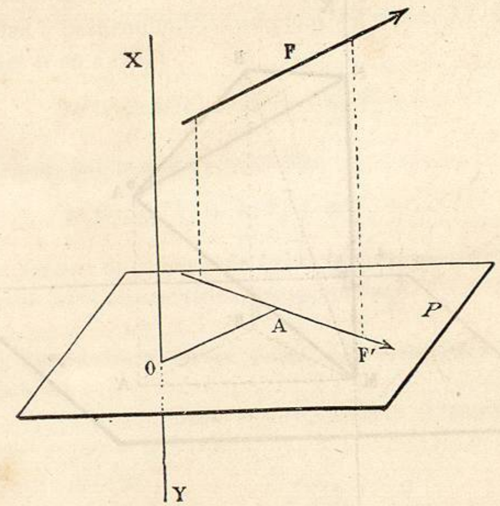

Fig. 60.

ou :

$$- OA \times F',$$

suivant la convention faite sur les signes.

127. — * *La condition nécessaire et suffisante pour que le moment d'une force par rapport à un axe soit nul est que cette force, n'étant pas nulle, soit dans un même plan avec l'axe.*

En effet (fig. 60) le moment de la force F' par rapport au point O ne peut être nul que si F' est nulle, ou si la direction de F' passe par le point O. Dans le premier cas, F est parallèle à l'axe, et dans le second cas F rencontre XY. Donc, si le moment de F est nul, c'est que F est dans un même plan avec XY. La condition est visiblement suffisante.

128 — ***Remarque.** *Une force étant représentée en grandeur et direction par* AB, M *et* N *étant deux points arbitraires d'un axe* XY, *le moment de cette force par rapport à* XY *a pour valeur absolue le quotient par* MN *de six fois le volume du tétraèdre* MNAB.

Projetons en effet AB en A'B' (fig. 61) sur un plan P perpendiculaire au point M de XY. Le tétraèdre MNAB est équivalent au tétraèdre MNA'B', car BB' et AA' sont parallèles aux faces AMN et BMN;

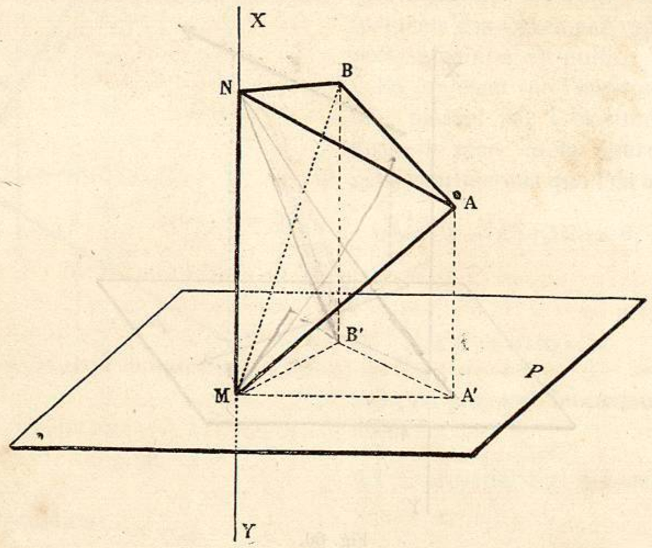

Fig. 61.

or, l'aire du triangle A'B'M est la moitié de la valeur absolue du moment K de la force AB par rapport à XY ; on a donc :

$$V = \frac{1}{2} K \times \frac{1}{3} MN,$$

d'où :

$$K = \frac{6V}{MN}.$$

129. — *THÉORÈME XVIII. *Le moment de la résultante d'un système de forces concourantes par rapport à un axe égale la somme algébrique des moments des composantes.*

Nous remarquons en effet que la projection sur un plan de la résultante de plusieurs forces concourantes est la résultante du système formé par les projections des composantes sur ce plan. En effet, le polygone des forces considérées se projette suivant le polygone des forces projections, puisque les projections sur un même plan de

deux portions de droites égales et parallèles sont égales et parallèles entre elles.

Soit donc R la résultante des forces F_1, F_2, F_3... concourantes en A, et soit R' et F'_1, F'_2, F'_3 ... les projections des forces précédentes sur un même plan P perpendiculaire au point O d'un axe XY. On sait que pour ce point O on a (119) :

$$m^t R' = m^t F'_1 + m^t F'_2 + m^t F'_3 + \dots$$

donc on a aussi, par rapport à l'axe XY :

$$m^t R = m^t F_1 + m^t F_2 + m^t F_3 + \dots$$

puisque les termes de la seconde égalité sont respectivement égaux par définition (126) aux termes de la première.

130. — *Coordonnées d'un point par rapport à trois axes rectangulaires.

Soit (fig. 62) le système des trois axes OXYZ formant un trièdre trirectangle ayant le point O pour sommet. Par un point A situé arbitrairement dans l'espace, menons les plans ABCG, parallèle à ZOY, ABDE, parallèle à ZOX, et AEFG, parallèle à XOY. Ces plans rencontrent les axes en des points C, D, F, qui sont les projections du point A sur ces axes et qui sont complètement déterminés ; *réciproquement*, si l'on se donne ces points, il y aura un point A de l'espace et un seul qui sera projeté en ces points sur les axes.

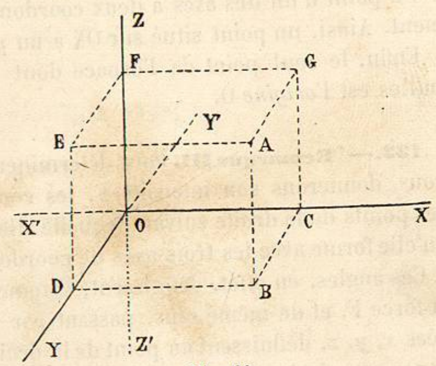

Fig. 62.

Nous convenons de représenter par x la projection de OA sur OX, c'est-à-dire la quantité algébrique qui a pour valeur absolue OC, et qui est positive ou négative suivant que pour aller de O en C il faut se déplacer dans le sens OX ou en sens inverse ; la quantité x étant donnée, il lui correspond un point C, et un seul sur la droite indéfinie XX'.

De même, représentons par y et z les quantités algébriques ayant respectivement pour valeurs absolues OD et OF, et qui sont positives ou négatives, suivant que les points D et F sont sur OY et OZ ou sur leurs prolongements.

Il est évident que tout point de l'espace sera déterminé complètement quand on connaîtra les quantités x, y, z qui lui correspondent pour un système d'axes connus.

Ces quantités, desquelles résulte la position d'un point de l'espace, s'appellent les COORDONNÉES DE CE POINT.

131. — *Remarque I. Il est clair que les considérations précédentes ne supposent nullement les axes rectangulaires, mais il faut qu'ils forment un trièdre, c'est-à-dire que l'un d'eux ne soit pas contenu dans le plan des deux autres. Seulement, dans le cas des axes rectangulaires, les coordonnées d'un point sont les projections sur les axes de la droite qui joint l'origine à ce point.

132. — *Remarque II. Un point du plan XOY a un z nul et réciproquement; cela est évident.

Un point d'un des axes a deux coordonnées nulles et réciproquement. Ainsi, un point situé sur OX a un y et un z nuls.

Enfin, le seul point de l'espace dont les trois coordonnées sont nulles est l'*origine* O.

133.— *Remarque III. Pour déterminer analytiquement une force, nous donnerons son intensité F, les coordonnées x, y, z de l'un des points de la droite suivant laquelle elle agit, et les angles α, β, γ, qu'elle forme avec les trois axes de coordonnées.

Ces angles, en effet, définissent, comme on a vu, une parallèle à la force F, et de même sens, passant par l'origine; et les coordonnées x, y, z, définissent un point de la droite suivant laquelle agit F: donc cette droite est complètement déterminée.

134. — *Remarque IV. Il faut remarquer les relations nécessaires qui existent entre les coordonnées $(x_1y_1z_1)$ et $(x_2y_2z_2)$ de deux points arbitraires M_1M_2 (fig. 63) de la droite définie par les données précédentes.

Considérons le contour M_1OM_2 dont la projection sur un axe quelconque est la projection de M_1M_2.

Projetons par exemple sur OX; la projection de M_1M_2 est ;

$$M_1M_2 \times \cos\alpha.$$

D'autre part, la projection de OM_1 étant x_1, la projection de M_1O est $(-x_1)$ et la projection de OM_2 est x_2 par définition; on a donc :

$$x_2 - x_1 = M_1M_2 \cos\alpha.$$

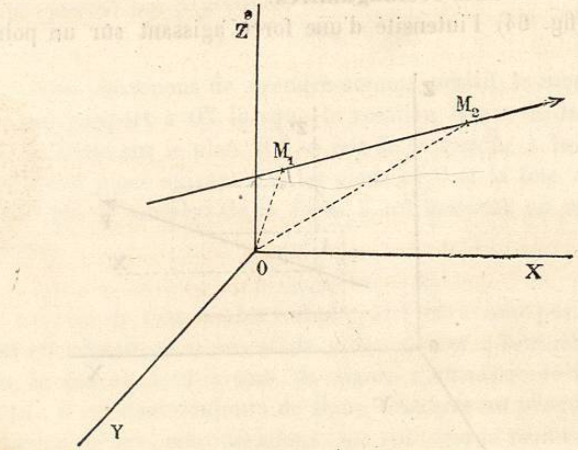

Fig. 63.

On aura même :

$$y_2 - y_1 = M_1M_2 \cos\beta,$$

et :

$$z_2 - z_1 = M_1M_2 \cos\gamma.$$

Il en résulte la suite de rapports égaux :

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\cos\beta} = \frac{z_2 - z_1}{\cos\gamma}. \qquad (1)$$

Ce sont les relations cherchées.

135. — **Réciproquement*, si le point $(x_1y_1z_1)$ est sur la droite définie ci-dessus, le point $(x_2y_2z_2)$ dont les coordonnées satisfont aux équations (1) est sur cette même droite.

Ainsi, en représentant par $x_1y_1z_1$ les coordonnées d'un point d'une droite dont les cosinus directeurs sont $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, les coordonnées (xyz) d'un point quelconque de cette ligne satisfont aux équations :

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}, \qquad (2)$$

et réciproquement.

C'est pour cette raison que les équations (2) s'appellent LES ÉQUATIONS DE LA DROITE.

136. — *Expressions analytiques des moments d'une force par rapport à trois axes rectangulaires.

Soit F (fig. 64) l'intensité d'une force agissant sur un point A

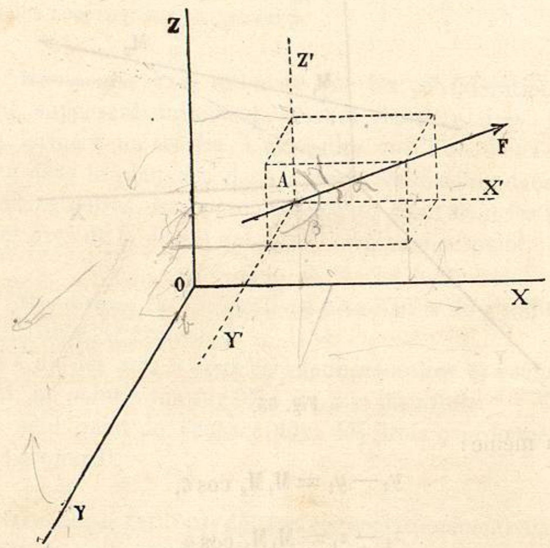

Fig. 64.

dont les coordonnées sont x, y, z, et dont la direction fait avec les axes rectangulaires, les angles α, β, γ.

Nous décomposons cette force en trois autres dirigées suivant des parallèles aux axes menées par le point A.

Ces composantes, que nous représentons en grandeur et en signe par X, Y, Z, ont pour valeur :

$$X = F \cos \alpha,$$
$$Y = F \cos \beta,$$
$$Z = F \cos \gamma.$$

Le moment de la force F par rapport à OX, par exemple, est la somme algébrique des moments par rapport à cet axe des composantes X, Y et Z. Or, déjà le moment de X est nul, parce que X est dans un même plan avec OX.

Cherchons le moment de Y : cette composante étant parallèle

à OY, se projette sur le plan YOZ suivant une force égale en valeur absolue à Y, et le bras de levier de cette projection par rapport au point O est égal à la valeur absolue de z : il en résulte que le moment de la projection de Y sur YOZ par rapport au point O a même valeur absolue que le produit :

$$Yz.$$

Or, nous convenons de prendre comme positif le moment d'une force par rapport à OX lorsque la rotation fictive de la projection de cette force sur le plan YOZ se fait de la gauche à la droite d'un observateur placé suivant OX, les pieds en O et la tête en X : il en résulte que le moment de la force Y est toujours en valeur et en signe :

$$-Yz.$$

Il est aisé de s'en rendre compte : si Y et z sont positifs, le moment est négatif, et il en est de même si Y et z sont négatifs. Mais dans le cas où Y et z sont de signes contraires, le moment est positif : il est donc toujours de signe contraire au produit Yz.

Par les mêmes considérations, on voit que le moment de Z par rapport à OX est toujours :

$$+Zy.$$

Donc le moment de F par rapport à OX est, dans tous les cas :

$$Zy - Yz,$$

ou encore :

$$F(y \cos \gamma - z \cos \beta).$$

Connaissant l'expression générale du moment de F par rapport à OX, on aura le moment par rapport à OY en avançant d'un rang dans les lettres, ou en effectuant une permutation tournante :

$$Xz - Zx,$$

et de même, le moment par rapport à OZ a pour expression générale :

$$Yx - Xy.$$

137. — *Ainsi, en résumé, les moments d'une force F par rapport à trois axes rectangulaires avec lesquels elle fait les angles α, β, γ, et passant par le point dont les coordonnées sont x, y, z, sont :

Moment par rapport à OX : $F(y \cos \gamma - z \cos \beta)$;
Moment par rapport à OY : $F(z \cos \alpha - x \cos \gamma)$;
Moment par rapport à OZ : $F(x \cos \beta - y \cos \alpha)$.

138. — *Remarque I. — On vérifie aisément par les résultats obtenus (134, 135) que les expressions de ces moments sont indépendantes du point choisi sur la direction de la force.

Remarque II. — Ces relations nous seront utiles pour écrire les équations exprimant l'équilibre d'un corps solide sollicité par des forces données.

§ III. — MOMENTS DES FORCES PARALLÈLES PAR RAPPORT A UN PLAN.

139. — Définition. *Le* MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN PLAN *qui lui est parallèle est une quantité algébrique qui a pour valeur absolue le produit de l'intensité de la force par la distance de la droite suivant laquelle elle agit au plan considéré.*

Lorsque l'on considère des forces parallèles entre elles, comme il n'y a que deux sens opposés dans lesquels elles peuvent agir, il est commode d'attribuer un signe à chacune d'elles.

De même le plan des moments séparant l'espace en deux régions, et, les forces étant parallèles à ce plan, on distingue les forces qui agissent d'un côté du plan de celles qui agissent de l'autre côté, en attribuant un signe à la distance de la force au plan.

Le signe du moment d'une force parallèle à un plan sera, par définition, le signe du produit de la force par sa distance au plan, ces facteurs ayant les signes que nous venons d'indiquer.

Ainsi, soit le système des forces F, F′, F″, F‴ (fig. 65) parallèles

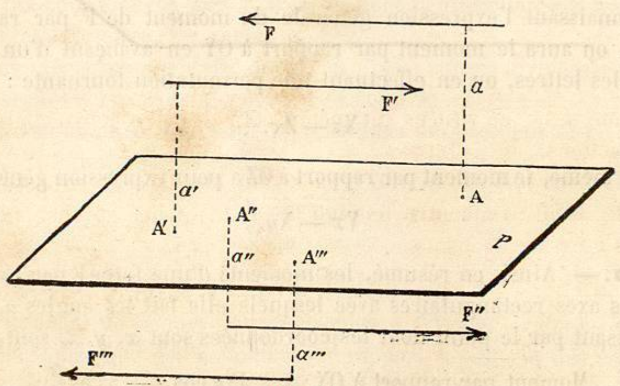

Fig. 65.

au plan P, et positives quand elles agissent dans le sens de la force F;

et soient a, a', a'', a''', les distances de ces forces au plan P, positives quand ces forces sont du même côté du plan P que la force F.

Le moment de F est $a \times F$ et il est positif. Il en est de même du moment de F″, qui est $a'' \times F''$.

Au contraire, les moments des forces F′, F‴, qui ont pour valeur $a' \times P'$ et $a''' \times P'''$, sont négatifs.

140. — Le moment d'une force qui n'est pas nulle, par rapport à un plan qui lui est parallèle, ne peut être nul que si cette force agit dans le plan.

141. — THÉORÈME XIX. *Le moment de la résultante de deux forces parallèles par rapport à un plan qui lui est parallèle, est la somme algébrique des moments des composantes.*

Soit (fig. 66) la résultante R des deux forces F, F′ parallèles et de

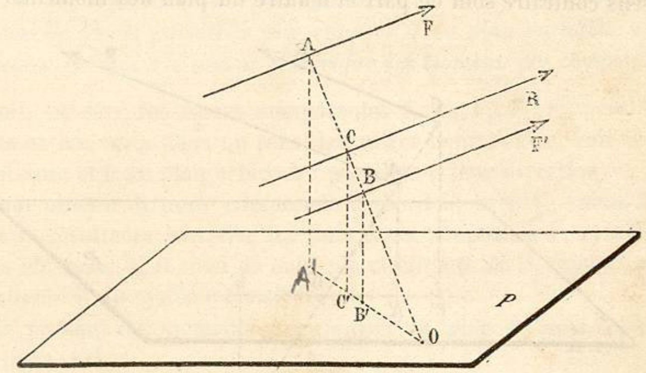

Fig. 66.

même sens, et situées du même côté du plan P parallèle à ces directions.

Traçons une droite ABC rencontrant ces forces, supposons que cette droite rencontre le plan P en O ; nous savons (122) que l'on a :

$$R \times OC = F \times OA + F' \times OB. \qquad (1)$$

En projetant les points A, B, C sur le plan P, il est visible que l'on obtient la suite de rapports égaux :

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'} = K. \qquad (2)$$

Si donc nous remplaçons dans (1) les quantités OA, OC, OB par les valeurs que l'on tire des relations (2), nous obtiendrons visiblement, en divisant les deux membres par K :

$$R \times CC' = F \times AA' + F' \times BB',$$

c'est-à-dire, à cause de la définition (139) :

$$m^t R = m^t F + m^t F'.$$

Nous avons supposé que la droite ABC rencontrait le plan P ; dans l'hypothèse contraire, le plan des forces est parallèle au plan P, et comme on a :

$$R = F + F',$$

on aura ainsi :

$$R \times CC' = F \times AA' + F' \times BB'.$$

Supposons enfin le cas de la figure 67, où les composantes F et F' de sens contraire sont de part et d'autre du plan des moments.

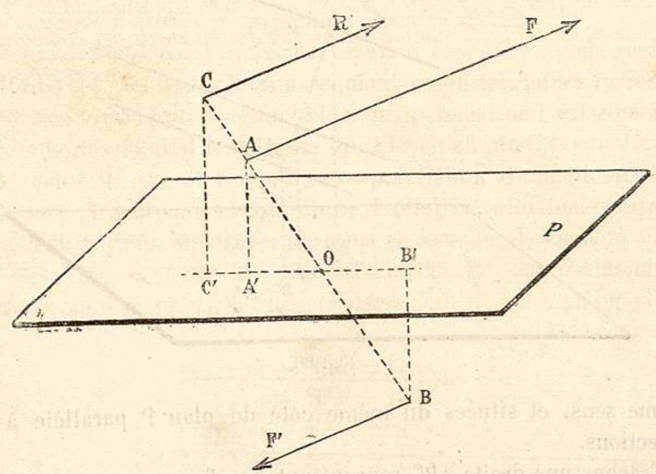

Fig. 67.

En traçant de même la droite ABC qui s'appuie sur les forces considérées, et sur leur résultante R, nous avons (122) :

$$R \times OC = F \times OA + F' \times OB.$$

Or, en projetant les points A, B, C sur le plan P, nous obtenons :

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{OC}{CC'},$$

donc :

$$R \times CC' = F \times AA' + F' \times BB'.$$

Ce qui peut s'écrire :

$$R \times CC' = F \times AA' + (-F')\ (-BB').$$

Donc, à cause de la définition (139) :

$$m^t R = m^t F + m^t F'.$$

Dans tous les cas possibles de figure on sera conduit au même résultat, c'est-à-dire que le théorème est général.

Remarque. — Le théorème précédent est encore vrai quand les droites telles que AA', BB', CC' sont parallèles à une même direction, d'ailleurs quelconque.

142. — THÉORÈME XX. *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles par rapport à un plan parallèle à leur direction, est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Soit, en effet, les forces composantes F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, parallèles, agissant les unes dans un sens, les autres dans l'autre, soit R leur résultante et P un plan arbitraire parallèle à leur direction.

Pour obtenir R nous composons d'abord F_1 avec F_2, nous trouvons la résultante partielle R_1; puis nous composons F_3 avec R_1, et nous obtenons R_2 et ainsi de suite; la résultante de F_5 et de R_3 est la résultante R du système considéré.

En prenant les moments par rapport au plan P, nous avons les relations (141) :

$$m^t R_1 = m^t F_1 + m^t F_2;$$
$$m^t R_2 = m^t R_1 + m^t F_3;$$
$$m^t R_3 = m^t R_2 + m^t F_4;$$
$$m^t R = m^t R_3 + m^t F_5.$$

En ajoutant membre à membre et opérant les réductions évidentes, nous obtenons :

$$m^t R = m^t F_1 + m^t F_2 + m^t F_3 + m^t F_4 + m^t F_5.$$

Comme d'ailleurs le raisonnement précédent est indépendant du nombre des forces qui forment le système considéré, le théorème général énoncé est démontré.

Remarque. — La relation importante que nous venons d'établir s'applique encore dans le cas où les distances des forces au plan des moments sont comptées parallèlement à une direction donnée, d'ailleurs quelconque.

143. — * Détermination analytique du centre d'un système de forces parallèles.

Soit (fig. 68) le système des points matériels $A_1 A_2 \ldots A_5$ liés invariablement les uns aux autres, chacun de ces points étant défini par ses coordonnées relatives au système d'axes trirectangles OXYZ.

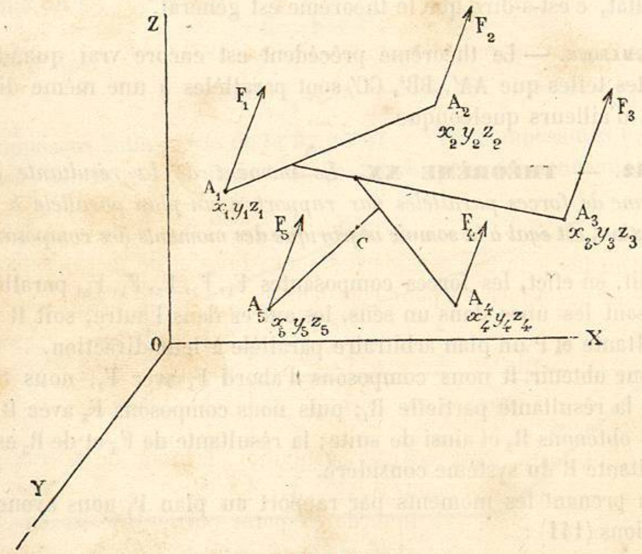

Fig. 68.

Supposons ces points sollicités par des forces $F_1 F_2 \ldots F_5$ parallèles entre elles, et représentons par ces même lettres les quantités algébriques ayant pour valeurs absolues les intensités de ces forces et le signe + ou le signe — suivant le sens d'action de ces forces.

Nous nous proposons de calculer les coordonnées du centre C de ce système de forces.

Pour obtenir l'x de ce point C, nous rendons toutes les forces composantes parallèles au plan YOZ, ce qui ne change pas la position du point C, et nous appliquons le théorème des moments par rapport à ce plan. Nous aurons :

$$(F_1 + F_2 + \ldots + F_5)\, x = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots + F_5 x_5,$$

d'où :

$$x = \frac{\sum F_1 x_1}{\sum F_1}.$$

De même, en rendant les forces proposées parallèles au plan ZOX, et appliquant le théorème XX à ce plan, nous aurons :

$$y = \frac{\sum F_1 y_1}{\sum F_1}.$$

Et enfin, en opérant de la même façon pour le plan XOY :

$$z = \frac{\sum F_1 z_1}{\sum F_1}.$$

*** 144. — Centre des moyennes distances.** — Dans le cas particulier où les n forces considérées sont égales et de même sens, le centre de ces n forces a pour coordonnées :

$$x = \frac{\sum x_1}{n}, \qquad y = \frac{\sum y_1}{n}, \qquad z = \frac{\sum z_1}{n}.$$

Ce point porte, dans ce cas particulier, le nom de CENTRE DES MOYENNES DISTANCES des points $A_1 A_2 \ldots A_n$.

La propriété caractéristique de ce point particulier est en effet que *sa distance à un plan quelconque est le quotient de la somme des distances de tous les points du système au plan par le nombre de ces points :* c'est ce que démontrent les formules trouvées, puisqu'elles ne supposent rien de particulier par rapport aux axes.

D'ailleurs la propriété est encore vraie quand on remplace, dans l'énoncé précédent, les distances par les longueurs comptées parallèlement à une même direction.

On retrouve la construction géométrique de ce point par les considérations précédentes : soit en effet (fig. 69) les points $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Nous sommes conduit à prendre C_1 milieu de $A_1 A_2$, puis C_2 sur $C_1 A_3$ et tel que $C_1 C_2$ soit le tiers de $C_1 A_3$, puis C_3 au quart de $C_2 A_4$, puis C au cinquième de $C_3 A_5$.

Enfin la propriété démontrée pour le centre C prouve qu'il n'y a

(1) Se llama centro de medias distancias porque sus coordenadas son medias aritméticas de las de los puntos de aplicacion de las fuerzas.

qu'un seul point obtenu de cette façon, quel que soit le point de départ de la construction, puisqu'il n'y a qu'un seul point de l'espace

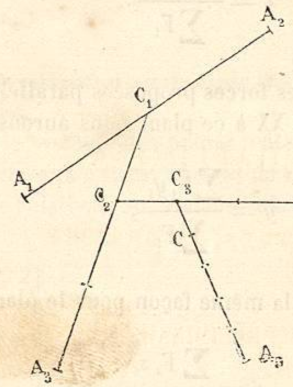

Fig. 69.

qui ait des coordonnées données par rapport à un système d'axes déterminés.

CHAPITRE V

CENTRES DE GRAVITÉ

§ I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET DÉFINITIONS.

146. — L'expérience nous apprend que, si petits que soient les fragments dans lesquels on partage un corps, ceux-ci sont PESANTS; c'est-à-dire qu'abandonnées à elles-mêmes, ces particules tombent vers le sol en vertu d'une attraction exercée par tous les points de la terre, et que l'on appelle PESANTEUR.

D'ailleurs, la direction suivant laquelle se fait ce mouvement est constante pour un même lieu d'observation, elle est normale à la surface des eaux tranquilles. On démontre expérimentalement ce fait en remarquant que l'image d'un fil à plomb dans un bain de mercure est dans le prolongement même de ce fil, ce que l'on peut constater à l'aide d'un second fil à plomb. La direction de la pesanteur en un lieu du globe terrestre s'appelle la VERTICALE de ce lieu.

Si l'on admet que la surface générale de la mer est sphérique, ce qui diffère peu de la vérité, il en faut conclure que les verticales aux divers points de la terre passent sensiblement par un même point qui est le centre du sphéroïde terrestre. Comme le rayon de la terre est 6366 kilomètres, en moyenne, il en résulte que dans toute l'étendue d'un corps les forces de pesanteur sont sensiblement parallèles.

147. — Poids. Centre de gravité. Nous avons défini un corps solide en le considérant comme un système de points matériels invariablement liés les uns aux autres. Pour tenir compte de l'action de la pesanteur sur un corps, nous supposerons ces points sollicités par des forces verticales dont les intensités ne dépendent pas des mutuelles distances des points d'application.