qu'un seul point obtenu de cette façon, quel que soit le point de départ de la construction, puisqu'il n'y a qu'un seul point de l'espace

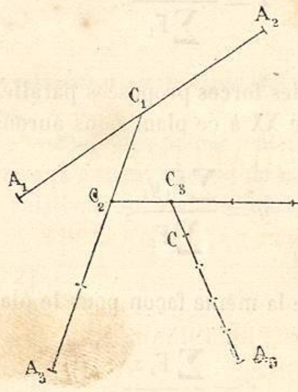

Fig. 69.

qui ait des coordonnées données par rapport à un système d'axes déterminés.

CHAPITRE V

CENTRES DE GRAVITÉ

§ I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET DÉFINITIONS.

146. — L'expérience nous apprend que, si petits que soient les fragments dans lesquels on partage un corps, ceux-ci sont PESANTS ; c'est-à-dire qu'abandonnées à elles-mêmes, ces particules tombent vers le sol en vertu d'une attraction exercée par tous les points de la terre, et que l'on appelle PESANTEUR.

D'ailleurs, la direction suivant laquelle se fait ce mouvement est constante pour un même lieu d'observation, elle est normale à la surface des eaux tranquilles. On démontre expérimentalement ce fait en remarquant que l'image d'un fil à plomb dans un bain de mercure est dans le prolongement même de ce fil, ce que l'on peut constater à l'aide d'un second fil à plomb. La direction de la pesanteur en un lieu du globe terrestre s'appelle la VERTICALE de ce lieu.

Si l'on admet que la surface générale de la mer est sphérique, ce qui diffère peu de la vérité, il en faut conclure que les verticales aux divers points de la terre passent sensiblement par un même point qui est le centre du sphéroïde terrestre. Comme le rayon de la terre est 6366 kilomètres, en moyenne, il en résulte que dans toute l'étendue d'un corps les forces de pesanteur sont sensiblement parallèles.

147. — Poids. Centre de gravité. Nous avons défini un corps solide en le considérant comme un système de points matériels invariablement liés les uns aux autres. Pour tenir compte de l'action de la pesanteur sur un corps, nous supposerons ces points sollicités par des forces verticales dont les intensités ne dépendent pas des mutuelles distances des points d'application.

Le poids du corps est alors la résultante des forces de pesanteur qui sollicitent les points matériels dont il est formé.

Le centre de gravité *est le centre de ces forces parallèles.*

148. — Dans un même lieu l'intensité de la pesanteur varie avec l'altitude du corps, elle décroît quand on l'élève; mais, dans les limites des dimensions d'un même corps, cette variation est insensible.

Il faut en conclure que le centre de gravité d'un corps ne dépend pas de l'orientation de ce corps par rapport à la terre, car en changeant cette orientation dans un même lieu, on n'altère ni le parallélisme, ni les intensités des forces parallèles de pesanteur, et l'on sait que dans ce cas (112) le centre des forces ne change pas.

149. — Enfin, la pesanteur n'a pas la même intensité aux divers points d'un même méridien terrestre. Cette intensité va en croissant quand on se déplace de l'équateur au pôle : si donc nous transportons un même corps à diverses latitudes, l'intensité de l'action de la terre changera, mais en un même lieu le rapport du poids de deux corps restera constant. Autrement dit, la mesure du poids d'un corps, à l'aide du kilogramme, par exemple, est le même nombre en tous les points du globe. Le centre de gravité reste aussi invariable dans le corps, puisque d'après un principe démontré (112), le centre des forces parallèles ne dépend que des rapports de l'intensité de l'une de ces forces aux intensités de toutes les autres.

150. — Propriété importante. *Si l'on suspend un corps pesant par l'un de ses points, il sera en équilibre lorsque la verticale du point de suspension passera par le centre de gravité.*

En effet, toutes les forces de pesanteur admettent une résultante qui passe par le centre de gravité; il faut donc et il suffit, pour l'équilibre, quand le corps a un point fixe, que ce point soit situé sur la direction de la résultante qui est la verticale passant par le centre de gravité.

Il faut d'ailleurs remarquer que cet équilibre sera *stable* ou *instable*, suivant que le point de suspension sera situé *au-dessus* ou *au-dessous* du centre de gravité.

S'il arrive que *le point fixe du corps soit le centre de gravité lui-même*, il est clair que ce corps sera en équilibre dans toutes les positions que l'on pourra lui donner.

En supposant qu'un corps pesant ait un axe fixe, on trouve par

les considérations précédentes que *la condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que le plan vertical passant par cet axe contienne le centre de gravité.*

151. — Détermination expérimentale du centre de gravité. On utilise la propriété précédente pour obtenir expérimentalement des données précieuses sur la position du centre de gravité d'un corps.

Par exemple, si l'on suspend successivement un corps par deux de ses points, et que l'on puisse suivre chaque fois dans le corps la direction de la verticale du point de suspension à l'instant de l'équilibre, il est clair que le point commun à ces deux directions sera le centre de gravité.

De même, si l'on pose le corps sur une arête vive et que l'on détermine la position qu'il faut lui donner pour qu'il soit en équilibre instable, on aura dans le plan vertical qui passe par cette arête un plan qui contient le centre de gravité.

152. — Corps homogène. Nous disons en mécanique qu'un corps est homogène quand des volumes égaux du corps ont des poids égaux, quelque petits que soient ces volumes. Il faut remarquer qu'au point de vue chimique cette condition nécessaire, ne serait pas suffisante.

Nous ne considérerons que des corps homogènes, dans ce qui va suivre, et nous voyons alors que le centre de gravité d'un corps ne dépendra que de sa forme géométrique. Nous chercherons à déterminer ce point dans le cas où le corps affecte une des formes étudiées dans la géométrie élémentaire.

153. — Centre de gravité d'une surface. Une surface géométrique n'a que deux dimensions : elle ne peut donc avoir de poids au point de vue physique. On est cependant conduit à considérer le centre de gravité d'une telle figure. Supposons en effet une lame métallique dont l'épaisseur uniforme aille en décroissant et tende vers zéro; il est clair que le centre de gravité de ce solide tend vers une position limite en même temps que son volume tend vers zéro : c'est ce point qu'on appelle centre de gravité de la surface. C'est aussi le centre de forces égales et parallèles qui solliciteraient tous les points de cette surface.

154. — Centre de gravité d'une ligne. Pour les mêmes raisons nous appellerons centre de gravité d'une ligne géométrique la limite des positions occupées par le centre de gravité d'un fil dont l'épaisseur uniforme tend vers zéro. Ce point est le centre de forces parallèles et égales, sollicitant tous les points de la ligne.

155. — Plan diamétral. *On dit qu'un solide a un* PLAN DIAMÉTRAL *lorsque les milieux de toutes les portions de droites parallèles à une certaine direction, comprises dans le solide, sont situés sur un même plan.*

En particulier le plan diamétral prend le nom de PLAN DE SYMÉTRIE lorsque la direction des cordes qu'il partage en parties égales est perpendiculaire à ce plan.

156. — *Lorsqu'un solide a un plan diamétral, son centre de gravité est sur ce plan.*

En effet les forces de pesanteur, égales et parallèles, qui sollicitent les points matériels situés sur l'une quelconque des cordes que le plan partage en parties égales se composent deux à deux en une force passant par le milieu de cette corde ; on peut donc remplacer le système des forces sollicitant les points matériels dont le solide est formé, par des forces sollicitant des points appartenant au plan diamétral : le centre de ces forces est donc dans ce plan.

Ainsi, lorsqu'un solide a un plan de symétrie, ce plan contient le centre de gravité.

157. — Axe de symétrie. *On dit qu'un solide a un* AXE DE SYMÉTRIE *lorsque les points de ce solide sont deux à deux symétriques par rapport à une droite.*

Ainsi l'axe d'un solide de révolution est un axe de symétrie de ce corps.

158. — *Lorsqu'un solide a un axe de symétrie, son centre de gravité est sur cet axe.*

En effet, les forces de pesanteur, égales et parallèles, qui sollicitent deux points matériels symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe, se composent en une force qui passe par le milieu de la droite qui les joint, c'est-à-dire par un point de l'axe. Donc on peut remplacer toutes les forces de pesanteur par des forces parallèles sollicitant des points tous situés sur l'axe : le centre de ces forces est donc un point de cet axe.

159. — Le même raisonnement prouve évidemment que si une surface plane admet un DIAMÈTRE, c'est-à-dire si toutes les portions de droites parallèles à une même direction sont en ligne droite, le centre de gravité de la surface est un point de cette droite.

160. — Centre de symétrie. *On dit qu'un solide a* UN CENTRE DE SYMÉTRIE *lorsqu'il existe un point qui soit le milieu de toute portion de droite, comprise dans le solide, qui le contient.*

Ainsi, le centre d'une sphère, le centre d'un cercle, le centre d'un tore, etc., sont des centres de symétrie.

161. — *Lorsqu'un solide présente un centre de symétrie, ce point est le centre de gravité.*

Cela se démontre comme précédemment.

Par exemple, le centre de gravité d'une portion de droite est le milieu de cette ligne : de même, le centre de gravité d'un parallélépipède, d'un parallélogramme, est au point de rencontre des diagonales.

§ II. — CENTRES DE GRAVITÉ DES LIGNES.

162. — Centre de gravité du périmètre d'un triangle.

Le centre de gravité du périmètre d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés.

Soit le triangle ABC (fig. 70) : les poids des côtés sont des forces

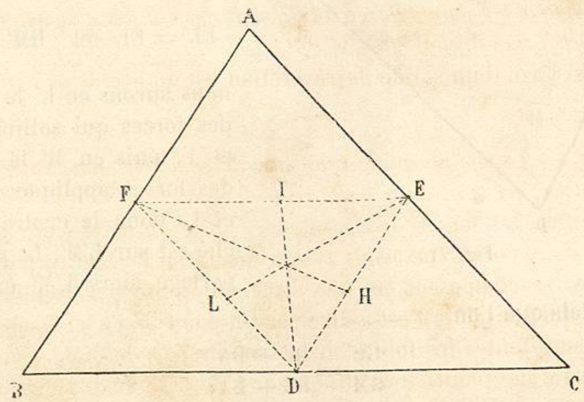

Fig. 70.

parallèles, proportionnelles aux longueurs de ces côtés, et appliquées aux milieux D, E, F de ces lignes.

Or, le centre des forces F et E est le point I de FE, tel que :

$$\frac{IF}{IE}=\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{DE};$$

donc le centre cherché est sur la droite DI qui, d'après la proportion précédente, est bissectrice de l'angle FDE.

Le centre de gravité est donc sur chacune des bissectrices des angles intérieurs du triangle DEF, par suite il coïncide avec le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Remarque. — Cette démonstration prouve, par des considérations de mécanique, que les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes, puisqu'un triangle a toujours pour sommets les milieux des côtés d'un autre triangle.

163. — Centre de gravité d'un contour polygonal.

Soit, par exemple (fig. 71), le quadrilatère ABCD, dont les milieux des côtés E, F, I, H sont sollicités par des forces parallèles et proportionnelles aux longueurs de ces côtés.

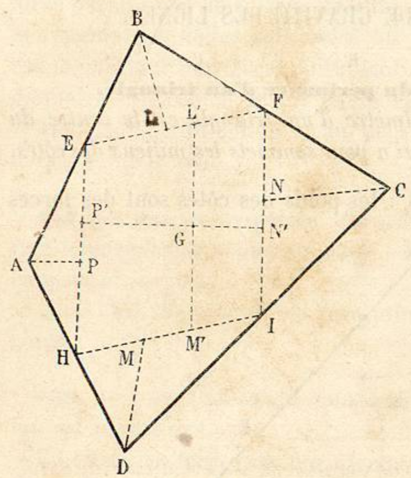

Fig. 71.

Nous traçons les bissectrices BL et DM des angles aux sommets B et D; en prenant :

$$FL'=EL \quad \text{et} \quad HM'=IM,$$

nous aurons en L′ le centre des forces qui sollicitent E et F, puis en M′ le centre des forces appliquées en H et I : donc le centre cherché est sur L′M′. Le point G partage alors L′M′ en segments tels que l'on a :

$$\frac{GL'}{GM'}=\frac{DC+DA}{BC+BA}.$$

Mais il est plus commode de construire en N′P′ une seconde droite contenant le point G, et cela en appliquant la méthode déjà indiquée.

164. — Enfin, dans le cas général, on aura toujours le point cherché en construisant le centre des forces parallèles sollicitant les milieux des côtés du contour polygonal, et dont les intensités sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.

165. — * Centre de gravité d'un arc de cercle.

Le centre de gravité d'un arc de cercle est situé sur le rayon qui passe par son milieu, et sa distance au centre est la quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde et au rayon.

Soit, en effet, l'arc ABC de centre O (fig. 72) : nous remarquons que le diamètre qui passe par le milieu B de cet arc étant perpen-

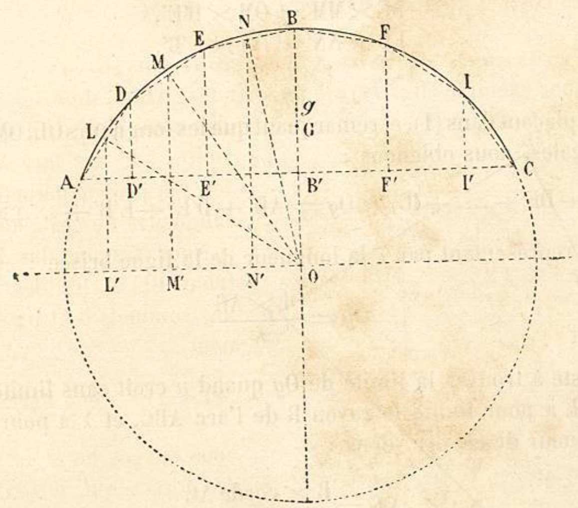

Fig. 72.

diculaire au milieu de toute corde parallèle à AC, est un axe de symétrie pour cette figure : donc le centre G est sur OB.

Pour trouver la distance OG, nous inscrivons dans l'arc une ligne brisée régulière ADEB...C d'un nombre arbitraire n de côtés.

Soit g le centre de gravité de cette ligne dont les côtés ont pour points milieux L, M, N..... Quand nous donnerons à n des valeurs croissant sans limite, la ligne brisée aura pour limite l'arc ABC, et par suite le point g aura pour position limite le point G.

Pour évaluer Og nous appliquons le théorème des moments par rapport au plan perpendiculaire au point O de OB, en supposant les forces rendues parallèles à ce plan ; nous aurons alors l'équation :

$$(1)\quad (AD+DE+\ldots+IC)\times Og = AD\times LL'+DE\times MM'+EB\times NN'+\ldots$$

Or, en traçant OL et projetant D en D' sur la corde, les triangles semblables OLL' et ADD' donnent :

$$\frac{AD}{OL}=\frac{AD'}{LL'},$$

d'où :

$$AD\times LL' = OL\times AD' ;$$

de même, nous obtiendrons :

$$DE\times MM' = OM\times D'E',$$
$$EB\times NN' = ON\times E'B',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

en remplaçant dans (1), et remarquant que les longueurs OL, OM, ON,... sont égales, nous obtenons :

$$(AD+DE+\ldots.+IC)\times Og = (AD'+D'E'+E'B'+\ldots.)\times OL ;$$

ou, en représentant par λ la longueur de la ligne brisée :

$$Og=\frac{OL\times AC}{\lambda}.$$

Il reste à trouver la limite de Og quand n croît sans limite :

Or OL a pour limite le rayon R de l'arc ABC, et λ a pour limite la longueur de cet arc, donc :

$$OG=\frac{R\times \text{corde } AC}{\text{arc } ABC}. \qquad (3)$$

C'est précisément ce qu'il fallait prouver.

§ III. — CENTRES DE GRAVITÉ DES SURFACES.

166. — Centre de gravité de l'aire du triangle.

Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est le point de concours des médianes.

Soit le triangle ABC (fig. 73), dans lequel D, E, F sont les milieux des côtés.

Le centre de gravité est sur l'une quelconque des trois médianes, car AD, par exemple, est un diamètre pour les cordes parallèles à BC.

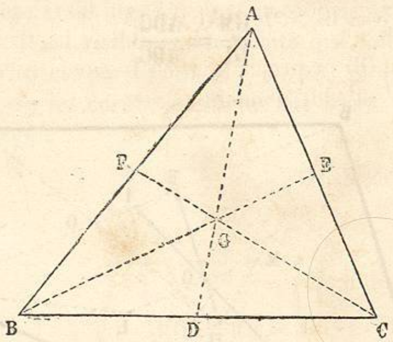

Fig. 73.

Remarque I. — Ceci prouve, par des considérations de mécanique, que les médianes d'un triangle sont concourantes.

167. — Remarque II. — *Le centre de gravité d'un triangle est le centre des moyennes distances des sommets*, c'est-à-dire le centre de trois forces égales, parallèles et de même sens, appliquées à ces sommets.

En effet, le centre des forces qui sollicitent B et C est le point D ; donc le centre des forces qui sollicitent A, B est G et sur AD, il est donc sur chaque médiane.

168. — Remarque III. — Cette dernière propriété prouve que le point de concours des médianes est aux deux tiers de chacune de ces lignes à partir du sommet : en effet, les forces qui sollicitent A et D sont entre elles comme les nombres 1 et 2, donc GD est la moitié de GA. D'ailleurs c'est bien le résultat que l'on obtient en construisant le centre des moyennes distances des points A, B, C.

169. — Corollaire. *Un polygone étant décomposable en triangles, on sait trouver le centre de gravité d'une aire polygonale quelconque.*

170. — Centre de gravité de l'aire du quadrilatère.

Le centre de gravité du quadrilatère ABCD (fig. 74) *dont les diagonales se coupent en* O, *est le point commun aux droites* HE, IF *qui joignent les milieux* H, I *des diagonales aux points* E, F *tels que* HF *égale* HO *et* IE *égale* IO.

La méthode générale nous conduit, en effet, à considérer les centres