les forces rendues parallèles à ce plan ; nous aurons alors l'équation :

$$(1)\quad (AD+DE+\ldots+IC)\times Og = AD\times LL'+DE\times MM'+EB\times NN'+\ldots$$

Or, en traçant OL et projetant D en D′ sur la corde, les triangles semblables OLL′ et ADD′ donnent :

$$\frac{AD}{OL}=\frac{AD'}{LL'},$$

d'où :

$$AD\times LL' = OL\times AD' ;$$

de même, nous obtiendrons :

$$DE\times MM' = OM\times D'E',$$
$$EB\times NN' = ON\times E'B',$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

en remplaçant dans (1), et remarquant que les longueurs OL, OM, ON,... sont égales, nous obtenons :

$$(AD+DE+\ldots.+IC)\times Og = (AD'+D'E'+E'B'+\ldots.)\times OL ;$$

ou, en représentant par λ la longueur de la ligne brisée :

$$Og=\frac{OL\times AC}{\lambda}.$$

Il reste à trouver la limite de Og quand n croît sans limite :

Or OL a pour limite le rayon R de l'arc ABC, et λ a pour limite la longueur de cet arc, donc :

$$OG=\frac{R\times \text{corde } AC}{\text{arc } ABC}. \qquad (3)$$

C'est précisément ce qu'il fallait prouver.

§ III. — CENTRES DE GRAVITÉ DES SURFACES.

166. — Centre de gravité de l'aire du triangle.

Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est le point de concours des médianes.

Soit le triangle ABC (fig. 73), dans lequel D, E, F sont les milieux des côtés.

Le centre de gravité est sur l'une quelconque des trois médianes, car AD, par exemple, est un diamètre pour les cordes parallèles à BC.

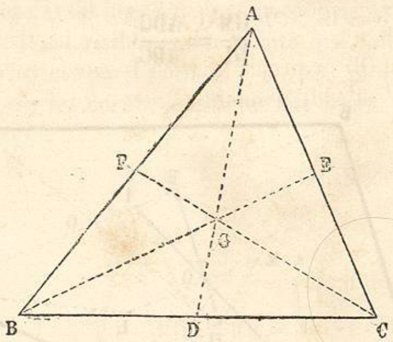

Fig. 73.

Remarque I. — Ceci prouve, par des considérations de mécanique, que les médianes d'un triangle sont concourantes.

167. — Remarque II. — *Le centre de gravité d'un triangle est le centre des moyennes distances des sommets*, c'est-à-dire le centre de trois forces égales, parallèles et de même sens, appliquées à ces sommets.

En effet, le centre des forces qui sollicitent B et C est le point D; donc le centre des forces qui sollicitent A, B est C et sur AD, il est donc sur chaque médiane.

168. — Remarque III. — Cette dernière propriété prouve que le point de concours des médianes est aux deux tiers de chacune de ces lignes à partir du sommet : en effet, les forces qui sollicitent A et D sont entre elles comme les nombres 1 et 2, donc GD est la moitié de GA. D'ailleurs c'est bien le résultat que l'on obtient en construisant le centre des moyennes distances des points A, B, C.

169. — Corollaire. *Un polygone étant décomposable en triangles, on sait trouver le centre de gravité d'une aire polygonale quelconque.*

170. — Centre de gravité de l'aire du quadrilatère.

Le centre de gravité du quadrilatère ABCD (fig. 74) *dont les diagonales se coupent en* O, *est le point commun aux droites* HE, IF *qui joignent les milieux* H, I *des diagonales aux points* E, F *tels que* HF *égale* HO *et* IE *égale* IO.

La méthode générale nous conduit, en effet, à considérer les centres de gravité M et L des triangles ABC, ADC dans lesquels AC décompose la figure, puis à prendre le point G sur ML tel que l'on ait :

$$\frac{GM}{GL} = \frac{ADC}{ABC}.$$

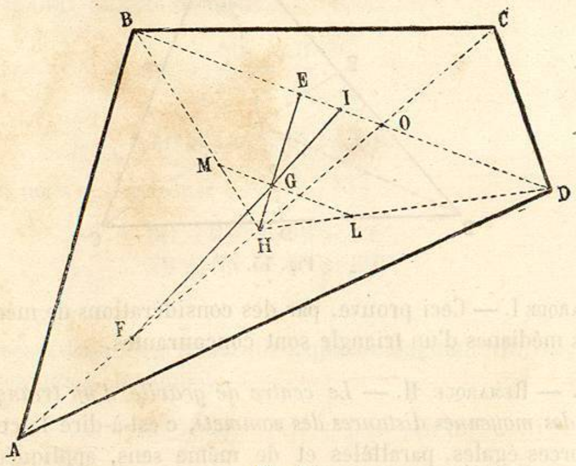

Fig. 74.

Or, ces triangles sont dans le rapport des distances à AC des sommets B et D, et par suite dans le rapport des longueurs OD, OB ; d'ailleurs ML étant parallèle à BD, la droite HG détermine sur BD un point E tel que l'on ait :

$$\frac{EB}{ED} = \frac{GM}{GL};$$

donc :

$$\frac{EB}{ED} = \frac{OD}{OB},$$

nous en concluons :

$$EB = OD \qquad \text{et} \qquad IE = IO.$$

Il en résulte que la droite HE ainsi déterminée passe par le point G, et il en est visiblement de même pour la droite IF.

171. — Centre de gravité de l'aire du trapèze.

Le centre de gravité de l'aire du trapèze est situé sur la droite qui joint les milieux des bases, et sur la droite qui joint les points qu'on obtient en prolongeant chaque base, et en sens inverse, d'une longueur égale à l'autre.

Soit le trapèze ABCD (fig. 75) dont les côtés non parallèles se rencontrent en O. Il est visible que la droite qui joint le point O au milieu E de BC passe par le milieu F de AD, et que cette ligne est un diamètre pour les cordes parallèles aux bases. Donc le centre de gravité est sur EF.

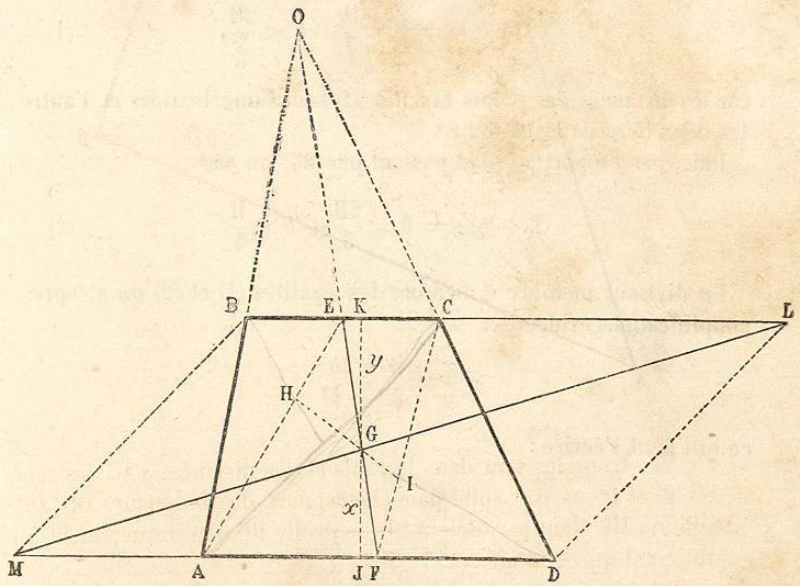

Fig. 75.

En second lieu, soient I et H les centres de gravité des triangles ABC, ADC, dans lesquels la diagonale AC partage l'aire. La droite IH passe aussi par le point G.

Proposons-nous de trouver dans quel rapport G partage EF. A cet effet, considérons le trapèze comme la somme des triangles ABC, ADC ; et appliquons successivement le théorème des moments par rapport aux plans passant par AD et BC et perpendiculaires au plan du trapèze.

Les bases du trapèze étant représentées par B, b et la hauteur par H, les forces composantes et résultante ont des intensités proportionnelles à :

$$\frac{BH}{2}, \qquad \frac{bH}{2}, \qquad \frac{(B+b)H}{2},$$

on ne changera pas le centre cherché en remplaçant ces forces par les suivantes :

$$B, \qquad b, \qquad B+b.$$

Soient d'ailleurs x et y les distances du point O aux côtés AD, BC ; elles sont dans le rapport des segments GF, GE que nous cherchons.

Par rapport au plan passant par AD, on a :

$$(B+b)\,x = B\times\frac{H}{3} + b\times\frac{2H}{3}, \qquad (1)$$

car les distances des points I et H à AD sont l'une le tiers et l'autre les deux tiers de la hauteur.

Puis, par rapport au plan passant par BC, on a :

$$(B+b)\,y = B\times\frac{2H}{3} + b\times\frac{H}{3}. \qquad (2)$$

En divisant membre à membre les égalités (1) et (2) on a, après simplifications évidentes :

$$\frac{x}{y}=\frac{B+2b}{2B+b},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{B}{2}+b}{B+\frac{b}{2}}.$$

Si donc nous prenons (fig. 75) AM = BC et CL = AD, nous aurons :

$$FM=\frac{B}{2}+b$$

et :

$$EL = B+\frac{b}{2},$$

donc la droite LM passe par le point G ; c'est ce qu'il fallait prouver.

REMARQUE. — On arriverait encore à la valeur du rapport précédent en considérant le trapèze comme différence des triangles OAD et OBC.

172. — *Centre de gravité du secteur circulaire.

Le centre de gravité d'un secteur circulaire est situé sur le rayon qui passe par le milieu de l'arc, à une distance du centre qui est les deux tiers de la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.

Soit le secteur ABC (fig. 76). Le centre de gravité G est situé tout d'abord sur le rayon OB qui passe par le milieu de l'arc, car cette ligne est un axe de symétrie pour le secteur.

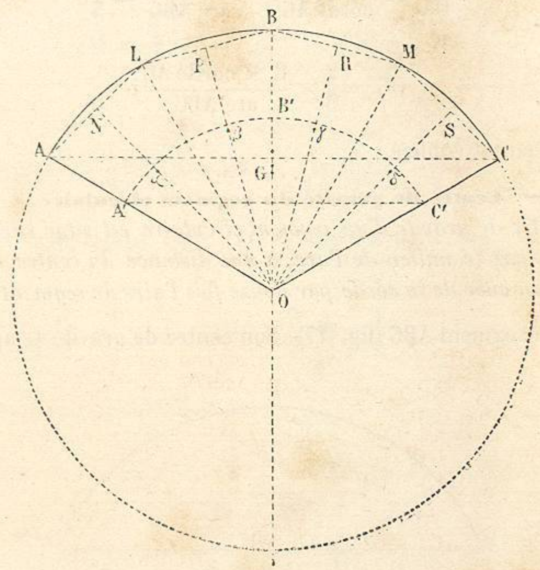

Fig. 76.

Proposons-nous de trouver la distance OG. A cet effet, considérons le secteur comme la limite vers laquelle tend le secteur polygonal régulier OALBMC formé par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc ABC, dont nous doublerons indéfiniment le nombre des côtés. Le centre G sera la position limite du centre de gravité du secteur polygonal.

Or, les centres de gravité α, β, γ, δ des triangles OAL, OLB... sont situés aux deux tiers des apothèmes ON, OP, OR, OS, c'est-à-dire sur l'arc de cercle de centre O, et dont le rayon est les deux tiers de l'apothème de la ligne brisée régulière. Quand le nombre des côtés de cette ligne croît sans limite, son apothème a pour limite le rayon OA, donc les centres α, β..., dont le nombre croît sans limite, viennent se placer aux divers points de l'arc A'B'C' concentrique à ABC, et dont le rayon est les deux tiers de OA. Le centre des forces parallèles a donc pour position limite le centre de gravité de l'arc A'B'C'.

En appliquant le résultat trouvé (165), nous obtenons :

$$OG = \frac{OA' \times \text{corde } A'C'}{\text{arc } A'B'C'},$$

or on a :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{\text{corde } A'C'}{\text{corde } AC} = \frac{\text{arc } A'B'C'}{\text{arc } ABC} = \frac{2}{3},$$

donc :

$$OG = \frac{2}{3} \times \frac{R \times \text{corde } AC}{\text{arc } ABC};$$

c'est le résultat énoncé.

173. — *Centre de gravité du segment circulaire.

Le centre de gravité d'un segment circulaire est situé sur le rayon qui passe par le milieu de l'arc, à une distance du centre qui est le quotient du cube de la corde par douze fois l'aire du segment.

Soit le segment ABC (fig. 77). Son centre de gravité G appartient

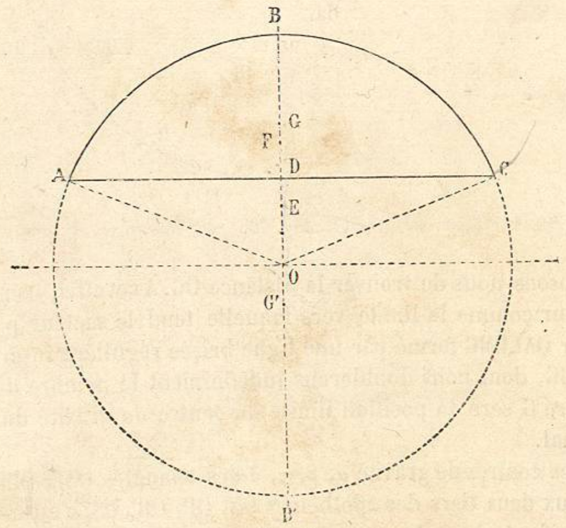

Fig. 77.

d'abord au rayon OB qui passe par le milieu de l'arc, car cette ligne est un axe de symétrie pour le segment.

Pour obtenir la distance OG, nous considérons le secteur OABC comme la somme du segment et du triangle OAC, et nous appliquons le théorème des moments par rapport au plan perpendiculaire au point O de OB. Soient E et F les centres de gravité du triangle et du secteur, nous aurons :

$$OF \times \text{secteur} = OE \times \text{triangle} + OG \times \text{segment}; \qquad (1)$$

or nous avons trouvé :

$$OF = \frac{2}{3} \times \frac{R \times AC}{\text{arc } ABC}, \qquad OE = \frac{2}{3} OD,$$

d'ailleurs :

$$\text{secteur} = \frac{1}{2} R \times \text{arc } ABC, \qquad \text{triangle} = \frac{1}{2} AC \times OD,$$

d'où, en remplaçant dans (1), et représentant par S l'aire du segment :

$$\frac{2}{3} \times \frac{R \times AC}{\text{arc } ABC} \times \frac{1}{2} R \times \text{arc } ABC = \frac{2}{3} OD \times \frac{1}{2} AC \times OD + OG \times S.$$

Ce qui se réduit visiblement à :

$$OG \times S = \frac{1}{3}\left(R^2 - \overline{OD}^2\right) \times AC;$$

mais on a :

$$R^2 - \overline{OD}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{4};$$

donc enfin :

$$OG = \frac{\overline{AC}^3}{12S}.$$

C'est le résultat qu'il fallait prouver.

Remarque. — La démonstration précédente suppose que le segment considéré est inférieur à un demi-cercle ; mais il est aisé de prouver que le résultat est indépendant de cette hypothèse, car en représentant par G' le centre de gravité du segment AB'C, et par S' son aire, on a :

$$S' \times OG' = S \times OG.$$

174. — *Centre de gravité de la zone sphérique.

Le centre de gravité d'une zone est situé au milieu de la droite qui joint les centres des bases.

Prenons en effet, pour plan de la figure 78, un plan passant par les pôles P, P′ de la zone considérée, et soient AB et CD les traces des

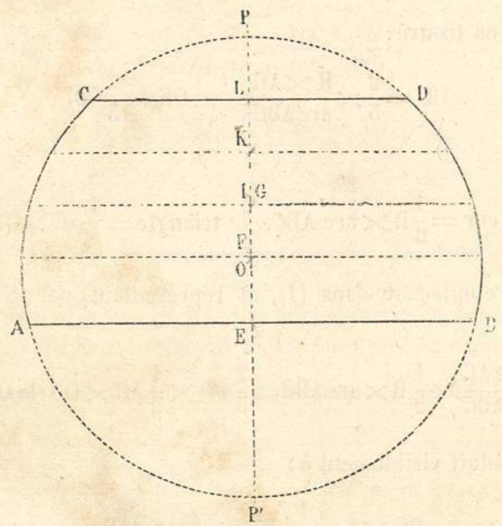

Fig. 78.

bases sur ce plan. Il est d'abord évident que PP′ étant un axe de symétrie pour la zone contient le centre de gravité G de sa surface.

Proposons-nous de déterminer la distance de ce point G au plan de la base AB. A cet effet, partageons LE en un nombre arbitraire n de parties égales; en menant par les points de division des plans parallèles aux bases, nous décomposons la zone en n zones équivalentes.

Appliquons le théorème des moments par rapport au plan de la base AB : nous aurons une première valeur approchée par défaut de la somme des moments des composantes en plaçant le centre de gravité de chaque zone partielle dans la base la plus voisine de AB. Nous aurons donc, en représentant par H la hauteur LE :

$$\mathrm{EG}\times 2\pi\mathrm{RH}>\frac{\mathrm{H}}{n}\times\frac{2\pi\mathrm{RH}}{n}+\frac{2\mathrm{H}}{n}\times\frac{2\pi\mathrm{RH}}{n}+\ldots+\frac{(n-1)\mathrm{H}}{n}\times\frac{2\pi\mathrm{RH}}{n},$$

ou :

$$\mathrm{EG}>\frac{\mathrm{H}}{n^2}\times\frac{(n-1)n}{2},$$

et enfin :

$$\mathrm{EG}>\frac{\mathrm{H}}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right). \qquad (1)$$

De même, en plaçant le centre de gravité de chacune des zones partielles dans la base qui est la plus éloignée de AB, nous augmenterons le moment de chaque composante et nous obtiendrons une nouvelle valeur approchée du moment de la résultante, mais l'erreur sera par excès. On obtient ainsi :

$$\mathrm{EG}\times 2\pi\mathrm{RH}<\frac{\mathrm{H}}{n}\times\frac{2\pi\mathrm{RH}}{n}+\frac{2\mathrm{H}}{n}\times\frac{2\pi\mathrm{RH}}{n}+\ldots+\frac{n\mathrm{H}}{n}\times\frac{2\pi\mathrm{RH}}{n}.$$

Ce qui se réduit comme ci-dessus à :

$$\mathrm{EG}<\frac{\mathrm{H}}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right). \qquad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) nous donnent donc deux variables qui comprennent EG; d'ailleurs ces variables ont pour limite commune $\frac{\mathrm{H}}{2}$ quand n croît sans limite; il en résulte la valeur :

$$\mathrm{EG}=\frac{\mathrm{H}}{2},$$

ce qu'il fallait prouver.

175. — *Centre de gravité de la surface du tétraèdre. *Le centre de gravité de la surface d'un tétraèdre se confond avec le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre qui a pour sommets les centres de gravité des faces.*

Soit, en effet, le tétraèdre ABCD (fig. 79), dont les faces ont pour centres de gravité les points a, b, c, d.

Le centre que nous cherchons est le centre de forces parallèles sollicitant ces points, dont les intensités sont proportionnelles aux aires des faces.

Or le centre des forces sollicitant les points c et d est le point E tel que :

$$\frac{\mathrm{E}c}{\mathrm{E}d}=\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{ABD}}.$$

Donc le centre cherché est dans le plan *ab*E.

Mais les faces du tétraèdre *abcd* sont respectivement semblables aux faces du tétraèdre considéré, et le rapport de deux faces semblables est $\frac{1}{9}$; donc on a aussi :

$$\frac{Ec}{Ed}=\frac{abc}{abd};$$

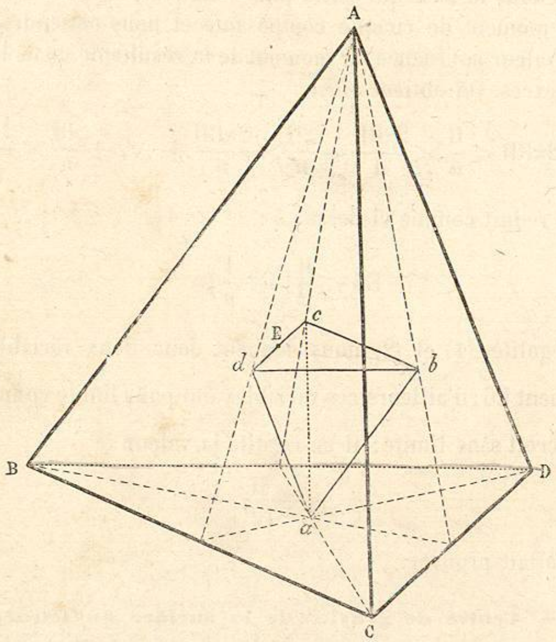

Fig. 79.

d'où il résulte que le plan *ab*E est le plan bissecteur du dièdre intérieur *dabc;* le centre cherché est par suite contenu dans chacun des six plans bissecteurs des dièdres intérieurs du tétraèdre *abcd;* il est donc bien le centre de la sphère inscrite dans ce solide.

Remarque. — Le raisonnement précédent prouve d'ailleurs que les six plans bissecteurs des dièdres intérieurs d'un tétraèdre passent par un même point; car en menant par chaque sommet d'un tétraèdre un plan parallèle à la face opposée, on obtient un second tétraèdre dont les centres de gravité des faces sont les sommets du premier.

176. — *PRINCIPE. *Le centre de gravité de la projection d'une aire plane est la projection du centre de gravité de cette aire.*

Le théorème est évident pour un triangle : soit donc l'aire polygonale ABCDEF (fig. 80) qui se projette en A'B'C'D'E'F' sur un plan P arbitraire que nous plaçons horizontalement. Nous décomposons le polygone en triangles par les diagonales AE, AD, AC, et soient α, β, γ, δ les centres de gravité de ces triangles; ils se projettent suivant les centres de gravité α', β', γ', δ' des triangles projections. Soient G

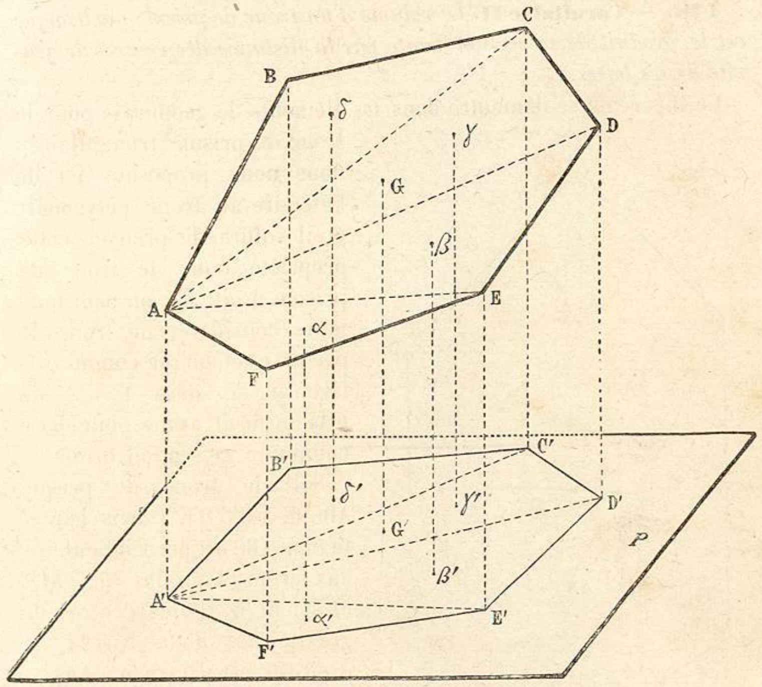

Fig. 80.

le centre de gravité du polygone et G' sa projection : en supposant le polygone invariablement lié à sa projection, nous voyons que les forces de pesanteur qui sollicitent les points α, β, γ, δ peuvent être appliquées en α', β', γ', δ' et leur résultante en G'. Par suite, les forces parallèles appliquées en α', β', γ', δ' et dont les intensités sont les aires des triangles AFE, ... ABC, ont pour centre le point G'; or les aires des triangles projections sont dans un rapport constant avec les aires des triangles eux-mêmes; donc nous pouvons, sans changer le point G', remplacer les intensités des forces précédentes par les aires des projections : le point G′ est donc bien le centre de gravité du polygone A′B′C′D′E′F′.

Remarque. — Le principe précédent subsiste quand on projette parallèlement à une direction arbitraire.

177. — Corollaire I. *Les centres de gravité des aires de toutes les sections planes d'un prisme sont situés sur une même droite parallèle aux arêtes du prisme.*

178. — Corollaire II. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque est le produit de sa section droite par la distance des centres de gravité de ses bases.*

Ce théorème se démontre dans les éléments de géométrie pour le tronc de prisme triangulaire : nous nous proposons ici de l'étendre au tronc polygonal, et il suffira de prouver cette propriété pour le tronc de prisme droit, car on peut toujours considérer un tronc de prisme quelconque comme différence de deux troncs de prisme droit ayant pour base commune sa section droite.

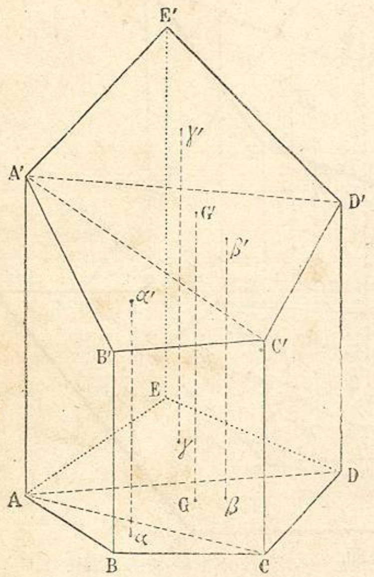

Fig. 81.

Soit le tronc de prisme ABCDE A′B′C′D′E′, dans lequel le plan ABC est perpendiculaire aux arêtes latérales (fig. 81), et soient G, G′ les centres de gravité des deux bases; le droit GG′ est parallèle à AA′.

Nous décomposons ce solide en troncs triangulaires par les plans diagonaux AA′C, AA′D ; soient alors α, β, γ, α', β', γ' les centres de gravité des triangles dans lesquels les bases sont décomposées ; en désignant par V le volume du tronc, on a :

$$V = ABC \times \alpha\alpha' + ACD \times \beta\beta' + ADE \times \gamma\gamma'.$$

Or, des forces parallèles, sollicitant les points α, β, γ, et proportionnelles aux aires des triangles, ont pour centre le point G ; donc,

en appliquant le théorème des moments par rapport au plan A′B′C′D′, et projetant les points α, β, γ parallèlement aux arêtes, nous avons la relation :

$$ABCD \times GG' = ABC \times \alpha\alpha' + ACD \times \beta\beta' + ADE \times \gamma\gamma' ;$$

donc on a finalement :

$$V = ABCD \times GG' ;$$

ce qu'il fallait prouver.

179. — Corollaire III. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque est le produit de l'une de ses bases par la distance du centre de gravité de l'autre base au plan de la première.*

Car en représentant par S l'aire de la section droite, du tronc dont le plan fait l'angle ω avec le plan de celle des bases dont l'aire est B, et en désignant par G, G′ les centres de gravité des bases B, B′, on a :

$$V = S \times GG' ;$$

or, S étant la projection de B, on a aussi :

$$S = B \cos\omega,$$

d'où :

$$V = B \times GG' \cos\omega,$$

et il est évident que ($GG' \cos\omega$) est la distance du point G′ au plan de la base B.

§ IV. — CENTRES DE GRAVITÉ DES VOLUMES.

180. — Centre de gravité du prisme triangulaire.

Le centre de gravité d'un prisme triangulaire se confond avec le centre de gravité de la section parallèle aux bases et à égale distance de ces plans.

Soit, en effet, le prisme triangulaire ABC A′B′C′ (fig. 82); nous faisons passer un plan par l'arête CC′ et le milieu D de AB : il coupe la face AA′BB′ suivant la parallèle DD′ aux arêtes, et les bases suivant les médianes CD, C′D′ ; ce plan est diamétral pour les portions de droites parallèles à AB et comprises dans le prisme : donc il contient le centre de gravité ; il en sera de même pour le plan pas-