SUSTITUCION Y REDUCCION.

243.—SUSTITUCION.—*Es la operacion que tiene por objeto reemplazar en una expresion por una cantidad su valor y ejecutar despues las operaciones indicadas.*

Comunmente la sustitucion se efectúa al fin de una operacion algebráica poniendo en lugar de las literales los valores que les corresponden en un caso dado, con el objeto de determinar *el valor numérico* de la expresion algebráica. Si por ejemplo, se tiene $x=\sqrt{2ge}$, y además se sabe que $g=9$, y $e=60$, sustituyendo los valores de g y de e se obtiene

$$x=\sqrt{2\times9\times60}$$

y ejecutando las operaciones indicadas se obtiene el valor numérico de

$$x=32{'}86$$

Otras veces la sustitucion se hace reemplazando unas cantidades por sus valores aunque no sean numéricos. Por ejemplo si se ha determinado que el cuadrado de una cantidad compuesta de dos partes a y b está expresado por la fórmula

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

y se tiene que $a=\frac{c}{d}$ y $b=\frac{h}{d}$, la sustitucion de estos valores nos dará

$$\left(\frac{c}{d}+\frac{h}{d}\right)^2=\frac{c^2}{d^2}+\frac{2ch}{d^2}+\frac{h^2}{d^2}=\frac{c^2+2ch+h^2}{d^2}$$

244.—REDUCCION.—*Esta operacion tiene por objeto formar un solo término con el valor de varios.*

La reduccion sólo puede tener lugar cuando los términos son semejantes, esto es, compuestos de las mismas literales afectadas respectivamente de los mismos exponentes ó de los mismos radicales, es decir, aquellos términos que no difieren más que en los signos y en los coeficientes.

Si se tiene por ejemplo, $7ab+5ab$

la operacion indicada es, que el valor de $5ab$ se ha de sumar con el de $7ab$; pero como el valor del producto ab es igual, la suma total la hallaremos sumando los coeficientes $7+5=12$ y multiplicando este número por ab, esto es,

$$7ab+5ab=12ab$$

basta concebir el término $7ab$ formado de la suma de siete términos iguales, ab, y el $5ab$ de cinco términos iguales, ab, para explicarse el fundamento de sumar los coeficientes

Si se tiene $h-7ab-5ab$

la operacion indicada es, que de el valor de h se debe restar primero $7ab$ y en seguida $5ab$, pero como lo mismo es restar todas las partes de una cantidad que restar esta, y $7ab$ y $5ab$ son las partes de $12ab$, tendremos:

$$h-7ab-5ab=h-12ab$$

en estos ejemplos en que los signos de los términos son iguales, hemos sumado los coeficientes afectando el resultado del signo comun de los términos.

Si se tiene por ejemplo, $7ab-5ab$

en este caso la operacion indicada es, que de el valor de $7ab$ debemos restar el de $5ab$; pero como $7ab=2ab+5ab$ y $5ab-5ab=0$

se tiene: $7ab-5ab=2ab+5ab-5ab=2ab$

y por tanto. $7ab-5ab=2ab$

Cuando los signos son desiguales se restan los coeficientes, y el resultado se afecta del signo que tiene la cantidad mayor.

Se ve, pues, que *en la reduccion pueden ocurrir dos casos: 1º los términos semejantes pueden estar afectados del mismo signo; entónces se suman los coeficientes dejando al resultado el mismo signo, y á continuacion de la suma de los coeficientes se ponen las literales de uno de los términos semejantes sin variacion alguna; 2º los términos semejantes pueden tener signos desiguales; entónces se restan los coeficientes, se afecta el resultado del signo del mayor término, y á continuacion de la diferencia de los coeficientes se escriben las literales sin variacion.*

Si se trata de hacer las reducciones posibles en la expresion siguiente compuesta de más de dos términos.

$$15a^3bc^2-3a^3c^2b+5a^3bc^2+2a^3c^2b-10a^3bc^2$$

supuesto que el órden de las sumas y restas no altera el resultado, reducirémos primero los términos positivos, en seguida los negativos, y por último, harémos la reduccion entre los dos términos encontrados:

$$15a^3bc^2-3a^3c^2b+5a^3bc^2+2a^3c^2b-10a^3bc^2=22a^3c^2b-13a^3c^2b=9a^3c^2b.$$

Cuando se tienen dos términos iguales con signos contrarios, sus valores se destruyen, esto es, dan cero por resultado; porque la diferencia entre cantidades iguales es 0.

Por ejemplo: $5a^2bc—5a^2bc=0$.

REGLA.—*Par ejecutar la reduccion en un polinomio, búsquense los términos semejantes: súmense primero los coeficientes de los que estén precedidos del signo +, en seguida súmense los coeficientes de los que estén precedidos del signo—, réstese el coeficiente menor del mayor, y afectando el resultado del signo de la cantidad mayor se hará seguir el coeficiente encontrado de las literales de uno de los términos semejantes sin ninguna variacion.*

Cuando un término no tiene signo, lo repetiremos, se le supone precedido del signo +.

245.—ADICION.—La adicion tiene en álgebra el mismo objeto que en Aritmética, reunir en una expresion el valor de varias.

Para sumar las cantidades en Algebra, se ponen todos los términos unos á continuacion de los otros con sus signos, y en seguida se hace la reduccion de los términos semejantes.

Sea por ejemplo sumar las tres expresiones siguientes:

$$\begin{array}{r} 3a^2b+2bc-d^2 \\ 5a^2b-2d^2-3bc \\ -2a^2b-5bc+5d^2 \\ \hline 6a^2b-6bc+2d^2 \end{array}$$

La ejecucion de la adicion no presenta dificultad cuando se sabe determinar los términos semejantes y ejecutar la reduccion correspondiente, teniendo cuidado de afectar del signo + el primer término de cada expresion cuando no lleva signo. La suma en Algebra, no siempre es mayor que alguno de los sumandos, pues depende de la relacion que pueda haber entre el valor de las cantidades positivas y negativas que la formen.

246.—SUSTRACCION.—La sustraccion tiene por objeto encontrar la diferencia entre dos cantidades, ó buscar una que sumada con el sustraendo dé el minuendo.

REGLA.—*Para restar las cantidades en Algebra se cambian los signos á todos los términos del sustraendo, y en seguida, se hace la reduccion de los términos que resulten semejantes con los del minuendo.*

Si se quiere restar de $a+b$ la expresion $b-c$, conforme á la regla, tendremos:

$$(a+b)-(b-c)=a+b-b+c=a+c$$

DEMOSTRACION.—Vamos á demostrar que cuando tenemos que restar de una cantidad a un binomio $b-c$ el resultado será igual al minuendo a seguido de los términos del sustraendo con los signos cambiados, esto es, que

$$a-(b-c)=a-b+c$$

Sabemos que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando se les agrega ó quita á ambas, cantidades iguales. En consecuencia, podremos agregar al minuendo y al sustraendo, los términos del sustraendo con los signos cambiados, sin alterar el valor de la diferencia, esto es:

$$a-(b-c)=(a-b+c)-(b-c-b+c)$$

pero como $b-b=o$, y $-c+c=o$, resulta que

$$a-(b-c)=a-b+c$$

lo que equivale precisamente á cambiar los signos del sustraendo. Como en el caso escogido para la demostracion el sustraendo consta de una cantidad positiva b y otra negativa c, que pudieron haber sido polinomios, es el más general que puede presentarse, y en cualquiera otro el mismo procedimiento de agregar el sustraendo con signos cambiados á los dos términos conducirá al resultado prescrito por la regla.

Por via de ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

1° $(4ab-3c^2+2bc)-(2ab-2c^3-bc)$
2° $(4ab^2-3b^2c)-(2ab^2-6b^2c)$
3° $(5a^3-3ac^2)-(2a^3-3ac^2)$

EJERCICIOS.—Hacer las sumas y restas que se indican en seguida:

$$\begin{array}{lr} & 5a^4+3a^2b^2c-7ab^4 \\ & -6a^4+2a^2b^2c+17ab^4 \\ & +9a^4-8a^2b^2c-10ab^4 \\ & +3a^4-5a^2b^2c-7ab^4 \\ \text{Resolucion:} & 11a^4-8a^2b^2c-7ab^4 \end{array}$$

$$[5b-8a-3c]-[7a-3b-2c]$$

R. $8b-15a-c$

$$(a+b)-(2a-3b)-(5a+7b)-(-13a+2b)$$

R. $7a-5b$

$$(5a^3-4a^2b-4ab^2+8b^3)-(2a^3-5a^2b-6ab^2+b^3)$$

R. $3a^3+a^2b+2ab^2+7b^3$

247.—Multiplicacion de los monomios.—En un monomio hay que atender á cuatro cosas: signos, coeficientes, literales y exponentes. Si por ejemplo, tenemos que multiplicar

$$3a^2bc\times 2a^3b^2$$

observaremos que como el valor del producto no se altera cuando se invierte el órden de los factores,

$$3a^2bc\times 2a^3b^2=3\times 2a^2a^3bb^2c$$

Respecto de los coeficientes para obtener el producto 3×2, *multiplicaremos estos números por las reglas de aritmética.*

En cuanto á las literales efectadas de exponentes, bastará descomponerlas en sus factores, para deducir la regla correspondiente.

$$a^2\times a^3=a.a.a.a.a.=a^5$$

esto es, *habrá que sumar los exponentes de la misma literal, para obtener el exponente del producto*, por lo cual,

$$b\times b^2=b^3$$

Respecto de las literales, como c, *que solo existen en un factor, se ponen á continuacion de las otras* para indicar la multiplicacion. Así el resultado final será

$$3a^2bc\times 2a^3b^2=6a^5b^3c$$

Respecto del signo del producto, notaremos que cuando los dos factores son positivos, esto es, cuando están afectados del signo + el producto tambien será positivo: $3a\times 4b=12ab$.

Si los factores tienen signos desiguales, por ejemplo, si se tiene que multiplicar $-2a\times 4b$, como el órden de los factores no altera el valor del producto, podremos siempre considerar como multiplicando la cantidad negativa, y como si repetimos un cierto número de veces $-2a$ la suma tendrá el mismo signo que el sumando, inferiremos que $-2a\times 4b=-8ab$, esto es, que cuando los factores tienen signos desiguales, el producto deberá tener el signo ménos.

Por último, si los dos factores están afectados del signo ménos, supuesto que cuando el multiplicador es negativo el producto es de signo contrario al del multiplicando, inferiremos que cuando el multiplicando y multiplicador son negativos, el producto deberá tener el signo más. Así:

$$-4b\times -2a=8ba.$$

Luego si los dos factores tienen el mismo signo, el producto tendrá el signo más; y si los factores tienen signos desiguales, el producto llevará el signo ménos.

Regla.—*Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes (por las reglas de aritmética), las literales diferentes se ponen unas á continuacion de otras, y en las iguales se suman sus exponentes, afectando el producto del signo más cuando los monomios tienen signos iguales, y del signo ménos cuando los factores tienen signos desiguales.*

248.—Multiplicacion de los polinomios.—Consideraremos cuatro casos: 1° multiplicar la suma de dos cantidades $a+b$ por una cantidad c; 2° multiplicar la suma de $a+b$ por la suma de otras cantidades $c+d$; 3° multiplicar la diferencia de dos cantidades $a-b$ por una cantidad c; y 4° multiplicar la diferencia de dos cantidades $(a-b)$ por la diferencia de otras dos $(c-d)$.

1° Para multiplicar $a+b$ por c, supuesto que el producto de la suma es igual á la suma de los productos, formaremos los productos de a y de b por c, y sumaremos los resultados

$$(a+b)\times c=ac+bc$$

Aquí todos los términos del producto que provienen de la multiplicacion de factores que tienen el signo más, resultan positivos.

2° Vamos á multiplicar $(a+b)$ por $(c+d.)$ Tendremos que determinar primero el producto de $a+b$ por c, y en seguida el de $a+b$ por d, sumando los dos productos. Aquí hemos multiplicado todos los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, y además, se observa que teniendo todos los factores signos iguales, los del producto resultan afectados del signo más.

$$\begin{array}{r} a+b \\ c+d \\ \hline ac+bc \\ +ad+bd \\ \hline ac+bc+ad+bd \end{array}$$

3° Multipliquemos $a-b$ por c. Tomando el producto ac de a por c se supone haber sumado, a, c veces; pero como no se quiere multiplicar a sino $a-b$ que es una cantidad b unidades menor que a, y como por cada unidad que disminuye el multiplicando el producto disminuye una vez el multiplicador, al producto ac debemos restarle bc para que sea el verdadero, quedando $(a-b)\times c=ac-bc$. Se vé que cada término del multiplicando se ha multiplicado por el multiplicador y que el producto de los términos de signos desiguales, lleva el signo ménos.

$$\begin{array}{r} a-b \\ c \\ \hline ac-bc \end{array}$$

4° Para multiplicar $a-b$ por $c-d$ concebiremos la operacion dividida

$$\begin{array}{r} a-b \\ c-d \\ \hline ac-bc \\ -ad+bd \end{array}$$

en dos partes; en la primera, conforme á lo explicado en el caso anterior, multiplicaremos $a-b$ por c, y obtendremos el producto $ac-bc$; en seguida, consideraremos que debemos multiplicar $(a-b)$ no por c, sino por $c-d$, que es una cantidad d unidades menor que c, en consecuencia el producto obtenido $ac-bc$ es mayor que el verdadero, d veces $(a-b)$, y para darle su valor exacto debemos restar del primer producto $ac-bc$ el de $(a-b)$ por d y se tendrá:

$$(a-b)\times(c-d)=(ac-bc)-(ad-bd)$$

pero para ejecutar la resta indicada, debemos cambiar los signos del sustraendo, luego, finalmente tendremos

$$(a-b)\times(c-d)=ac-bc-ad+bd$$

Este resultado obtenido conforme á un rigoroso raciocinio, nos enseña: que el producto de los binomios se forma multiplicando los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, y además, que el producto de dos factores que llevan signos iguales, ambos + ó ambos ménos—, resulta afectado del signo más; y que el producto de dos factores que llevan signos desiguales, resulta afectado del signo ménos.

La multiplicacion de dos polinomios cualesquiera, está comprendida en la del último caso, pues a y c pueden representar la suma de todos los términos positivos de los factores, y $-b$ y $-d$ la suma de los términos negativos de cada polinomio.

La regla dada para afectar del signo más el producto de dos monomios negativos, puede deducirse del último caso. En efecto, siendo

$$(a-b)\times(c-d)=ac-bc-ad+bd$$

si consideramos el caso en que se tenga al mismo tiempo $a=0$ y $c=0$, la expresion anterior se cambia en

$$-b\times-d=+bd$$

que era lo que se queria demostrar. Tales son los fundamentos de la siguiente

REGLA.—*El producto de dos polinomios se encuentra multiplicando todos los términos de uno de los factores por cada uno de los términos del otro: cada monomio del producto se afecta del signo más, cuando los que lo han producido tienen signos iguales, y del signo ménos, cuando los términos multiplicados tienen signos desiguales: los coeficientes*

se multiplican por las reglas de aritmética: las literales diferentes se ponen en el producto unas á continuacion de las otras, y las que son comunes á los términos que se multiplican no se escriben más que una vez en el producto, afectando cada literal con un exponente igual á la suma de los exponentes que dicha literal tenga en el multiplicando y multiplicador.

Se tiene costumbre de decir que en la multiplicacion hay que atender á cuatro cosas, que son: signos, coeficientes, literales y exponentes, y respecto á los signos se dice que

$$+\times+=+,\ +\times-=-,\ -\times+=-\ \text{y}\ -\times-=+$$

Esta regla, útil en la práctica, debe considerarse como una abreviacion de una parte de la regla de la multiplicacion de los polinomios cuyo fundamento hemos dado; pero debe tenerse presente que no pueden multiplicarse aisladamente los signos; sino que estos indican las operaciones que deben efectuarse con las cantidades que acompañan. No es el signo — el que se multiplica por el signo —, ni aun aisladamente $-b$ por $-d$, sino la diferencia $a-b$ por $c-d$, y en este caso un escrupuloso raciocinio nos conduce á afectar el producto de $-b$ por $-d$ del signo +.

249.—EJEMPLO DE MULTIPLICACION DE POLINOMIOS.—Como ejercicio pondremos los siguientes:

$$\begin{array}{l} 4a^2-16ax+3x^2 \\ \quad 5a^3-2a^2x \\ \hline 20a^5-80a^4x+15a^3x^2 \\ -8a^4x+32a^3x^2-6a^2x^3 \\ \hline 20a^5-88a^4x+47a^3x^2-6a^2x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5a^3b^3c^2-6a^4b^2c^5+7a^8b^5c^6 \\ 2a^3b^3c^2+3a^4b^2c^5-6a^7b^4c^3 \\ \hline 10a^6b^6c^4-12a^7b^5c^7+14a^{11}b^8c^8 \\ +15a^7b^5c^7-18a^8b^4c^{10}+21a^{12}b^7c^{11} \\ -30a^{10}b^7c^5+36a^{11}b^6c^8-42a^{15}b^9c^9 \\ \hline 10a^6b^6c^4+3a^7b^5c^7+14a^{11}b^8c^8 \\ -18a^8b^4c^{10}+21a^{12}b^7c^{11}-30a^{10}b^7c^5 \\ +36a^{11}b^6c^8-42a^{15}b^9c^9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2 \\ \frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b \\ \hline \frac{1}{16}a^3-\frac{1}{8}a^2b+\frac{1}{16}ab^2 \\ -\frac{1}{16}a^2b+\frac{1}{8}ab^2-\frac{1}{16}b^3 \\ \hline \frac{1}{16}a^3-\frac{3}{16}a^2b+\frac{3}{16}ab^2-\frac{1}{16}b^3 \end{array}$$

En la ejecucion de la multiplicacion, aunque no es necesario, se suelen ordenar con respecto á una misma letra el multiplicando y el multiplicador, esto es, se ponen los términos que contienen la misma letra en el órden decreciente ó creciente de sus exponentes. Para evitar equivocaciones, se tachan los términos semejantes reducidos cuando se asientan en el producto final.

250.—OBSERVACIONES.—1ª *El número de términos que resultan de la multiplicacion, ántes de hacer ninguna reduccion, es igual al producto del número de términos del multiplicando por el número de términos del multiplicador.* Así en el primer ejemplo del párrafo anterior, teniendo el multiplicando 3 términos y 2 el multiplicador, el producto tendrá $3\times2=6$ términos ántes de hacer ninguna reduccion. En el segundo ejemplo en que cada factor tiene 3 términos, el producto se compondrá de $3\times3=9$ términos, ántes de verificar la reduccion de términos semejantes. La razon de esto es que el producto se forma de la multiplicacion de todos los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, y en consecuencia el producto tendrá tantos términos como resulte de repetir los del multiplicando el número de veces expresado por los términos del multiplicador.—Es útil verificar que esta condicion está satisfecha en toda multiplicacion, á fin de evitar el error á que daria lugar la omision de la multiplicacion de algun término.

2ª Cuando hay términos semejantes, el número de los del producto puede limitarse mucho, pero debe observarse que no se puede reducir *el término que proviene del producto de los términos del multiplicando y multiplicador que contienen una misma literal elevada á la mayor potencia.* Así se observa en el 2º ejemplo que el producto de los términos $7a^8b^5c^6$ por $6a^7b^4c^3$ que son los que contienen la literal a elevada á la mayor potencia no se ha podido reducir con otro término y subsiste en el producto final $42a^{15}b^9c^9$. Esta condicion tiene lugar porque los términos que contienen la literal elevada á la mayor potencia, dan en el producto un término con mayor exponente que ningun otro, y por lo mismo no hay otro semejante con el que pueda reducirse.—El exámen de esta condicion es igualmente útil, pues descubre fácilmente alguna equivocacion que puede deslizarse en la prática de la multiplicacion.

3ª *Cuando todos los términos del multiplicando son homogéneos lo mismo que los del multiplicador, el producto está compuesto de términos homogéneos, y el grado de éstos es igual á la suma de las dimensiones de un término del multiplicando con las de uno del multiplicador.* Así se observa en el primer ejemplo, en el que tanto el multiplicando como el multiplicador son homogéneos, que el producto tambien lo es: y teniendo los términos del multiplicando 2 dimensiones y los del multiplicador 3, se ve que todos los del producto constan de 5 dimensiones, suma de $3+2$. La razon de esto es, que conforme á la regla, cada tér-

mino del producto se compone de tantos factores como hay en los términos que se multiplican, luego cuando los términos del multiplicando y multiplicador son homogéneos, los del producto tambien lo serán, y su grado será igual á la suma de las dimensiones de los factores que los han formado. La verificacion de esta condicion aclara fácilmente cuando en la práctica de una multiplicacion se ha cometido algun error relativo á las literales ó á los exponentes.

251.—TEOREMAS.—Vamos á hacer uso de la multiplicacion para establecer algunos principios de frecuente aplicacion, dando desde luego idea del método de demostracion y de investigacion que se sigue en álgebra.

I.—Si queremos averiguar á qué cosa es igual el cuadrado de la suma de dos cantidades, llamaremos una a y la otra b; multiplicaremos $(a+b)$ por $(a+b)$, y obteniéndose el producto $a^2+2ab+b^2$ tendremos que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ y como a y b pueden representar cualquiera cantidad, inferimos el siguiente teorema: *el cuadrado de la suma de dos cantidades, es igual al cuadrado de la primera, más el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab+ba+b^2 \end{array}$$

Tal es el teorema que fija la relacion que existe entre el cuadrado de la suma de dos cantidades y éstas.

Si se quiere hacer una aplicacion bastará dar valores á las literales de la fórmula obtenida. Si las cantidades dadas son 8 y 4 y se trata de buscar el cuadrado de su suma, tendremos:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

sustituyendo $(8+4)^2=8^2+2.8\times4+4^2$

ejecutando las operaciones indicadas, resulta:

$$12^2=64+64+16=+144$$

II.—Si queremos determinar la relacion que existe entre la diferencia de dos cantidades y su cuadrado, tendremos que si llamamos a y b las cantidades, su diferencia será $a-b$, y multiplicándola por sí misma se obtiene:

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

luego $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Se ve, pues, que *el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, ménos el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda*

Sea como ejemplo determinar el cuadrado de la diferencia entre 10 y 6,

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(10-6)^2=10^2-2.10.6+6^2=100-120+36=16$$

III.—Si tratamos de averiguar en general á qué es igual el producto de la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, nos bastará representar las cantidades por a y por b y multiplicar $a+b$ por $a-b$ como sigue:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2 \end{array}$$

luego $\qquad (a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$

De aquí inferimos que *la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, es igual á la diferencia de sus cuadrados.* Este principio es de frecuente aplicacion. Por ejemplo, si queremos determinar el producto de $(6+4)$ por $(6-4)$ tendremos:

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$$
$$(6+4)\ (6-4)=6^2-4^2=36-16=20$$

Aquí haremos observar de nuevo que la ejecucion de una operacion en álgebra, conduce á una expresion que nos indica una regla para obtener el resultado deseado de una manera sencilla en todos los casos semejantes al propuesto. El resultado algebráico de una operacion puesta en la forma de fórmula, es una regla que tiene la doble ventaja de la sencillez consiguiente á los signos empleados, y la de poderse aplicar á nuevas investigaciones. Así, por ejemplo, si se quiere determinar el cubo de la suma de dos cantidades, conocida la fórmula que da el cuadrado: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ bastará multiplicar este resultado por $a+b$ para obtener:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Ejercicios.—Hacer la multiplicacion:

$$(a^2+ab+b^2)\ (a-b)$$

Resultado: a^3-b^3

Hacer la multiplicacion:

$$(a^2-ab+b^2)\ (a+b)$$

R. a^3+b^3

Hacer la multiplicacion:

$$(x-a)^2(x+a)^2$$

R. $x^4-2a^2x^2+a^4$

Hacer la multiplicacion:

$$(x^2-2ax+a^2)\ (x-a)\ (x+a)$$

R. $x^4-2ax^3+2a^3x-a^4$

Hacer la operacion:

$$(x+y+z)^3-3(x+y)\ (y+z)\ (z+x)$$

R. $x^3+y^3+z^3$

Hacer la operacion:

$$(x+y+z)^2-(x-y-z)^2$$

R. $4\,x\,y+4\,x\,z.$

252.—División de los monomios.—Cuando se divide una cantidad a por otra b, el objeto de la operacion es encontrar un cociente que llamaremos c, con tal valor, que multiplicándolo por b se obtenga por producto a. Esto es, $a=bc$. Si hay una resta r, se debe tener $a=bc+r$ con la condicion de que sea $r<b$.

En la division de los monomios hay que atender, como en la multiplicacion, á los *signos, coeficientes, literales y exponentes,* y las reglas correspondientes las deduciremos del objeto de la division, que es encontrar una cantidad que multiplicada por el divisor, dé por producto el dividendo.

Respecto de los *signos,* hemos demostrado en la multiplicacion que el producto de cantidades afectadas de signos iguales debe llevar el signo $+$, y que el producto de cantidades afectadas de signos desiguales lleva el signo $-$. En consecuencia, cuando el dividendo, que es el producto del divisor por el cociente, tiene el signo $+$, el cociente llevará signo igual al del divisor; y cuando el dividendo tiene el signo $-$, el cociente deberá estar afectado de signo contrario al del divisor. De esto resulta, que *cuando se divide una cantidad por otra, si ambas tienen signos iguales, el cociente tendrá el signo $+$; y si las cantidades que se dividen tienen signos desiguales, el cociente llevará el signo $-$.* Es preciso tener esta regla como un hecho de cálculo, conse[illegible] nece-