términos por el cociente $6b^3d^2$. Los términos del 2° quebrado se multiplicarán por $4bde$; y los del 3° se multiplicarán por $3e$.

La suma, resta, multiplicacion y division de las fracciones, se ejecutan con las expresiones algebráicas conforme á las reglas de aritmética.

Para ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

1° $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{h}{g}=\frac{adg+bcg+bdh}{bdg},$$

2° $$\left(a+\frac{b}{d}\right)+\left(c+\frac{h}{g}\right)=\frac{ad+b}{d}+\frac{cg+h}{g}=\frac{adg+bg+cdg+dh}{dg}$$

3° $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},\ \frac{a}{m}-1=\frac{a-m}{m}.$$

4° $$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b},\ \frac{a}{mb}\times b=\frac{a}{m},\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(m+\frac{p}{q}\right)=\frac{(ac+b)\ \ (mq+p)}{cq}$$

5° $$\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{bc},\ \frac{am}{b}\div m=\frac{a}{b},\ \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

$$\left(a-\frac{b}{c}\right)\div\left(m+\frac{p}{q}\right)=\frac{ac-b}{c}\div\frac{mq+p}{q}=\frac{(ac-b)q}{(mq+p)c}$$

6° $$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)\ (a-b)}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{a+b}$$

7° $$\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}=\frac{\dfrac{a^4-b^4}{a-b}}{\dfrac{a^3-b^3}{a-b}}=\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+ab+b^2}=a+\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

260.—*Se llama igualdad la expresion algebráica que indica que dos cantidades tienen el mismo valor.* Las igualdades se indican poniendo el signo $=$ entre las cantidades que tienen el mismo valor. Por ejemplo, $3a+bc=d$ es una igualdad; las cantidades $3a+bc$ que están á la izquierda del signo $=$ forman el *primer miembro*, y las que están á la derecha, forman el *segundo miembro* de la igualdad.

Ecuacion es la expresion de la igualdad del valor de dos cantidades, cuyo modo de formacion generalmente es diferente. Comunmente se aplica el nombre de ecuacion á una igualdad que contiene incógnitas, y cantidades conocidas. En Algebra hay costumbre de representar los

datos de un problema con las primeras letras del alfabeto, y las incógnitas con las últimas; por ejemplo:

$$2a+x=24 \qquad x+y=\frac{a^2}{b}$$

son ecuaciones; debiendo observarse que las igualdades no subsisten ó se verifican sino en el caso de tener las incógnitas x, y, valores particulares adecuados á las condiciones de cada ecuacion.

Se llama *identidad, la igualdad que se verifica por sí misma.* Por ejemplo:

$$2x+3+2=5+2x,$$

Hay identidades expresadas exactamente por las mismas cantidades; en otras un miembro es el resultado de las operaciones indicadas en el otro de la igualdad.

Toda ecuacion debe convertirse en identidad cuando se reemplazan las incógnitas por sus valores, esto es, cuando se hace la verificacion de la ecuacion.

Se dice que las ecuaciones son *numéricas,* cuando sólo las incógnitas están representadas por letras.

Cuando uno de los miembros de una ecuacion no contiene más que la incógnita y el otro expresa su modo de formacion por medio de las cantidades conocidas, la expresion toma el nombre de *fórmula.*

Si por ejemplo el resultado de un problema es

$$x=\frac{(a+b)^n}{2}$$

esta expresion será una fórmula, porque en ella constan las relaciones abstractas que ligan entre sí á las cantidades del problema, y expresa el modo de generacion de la incógnita. (241.)

Cuando los valores de dos cantidades están ligados entre sí de manera que la alteracion de una produce una variacion en la otra cantidad, se dice que una cantidad es *funcion* de la otra. Por ejemplo; supuesto que alterándose el dividendo se altera el cociente, diremos que el cociente es funcion del dividendo, y viceversa. La superficie de un círculo s, variando con el radio r, es una funcion de esta línea, lo cual se indica $s=f(r)$. Del mismo modo el espacio que recorre un cuerpo al caer, es una funcion del tiempo, y recíprocamente el tiempo es una funcion del espacio. Ordinariamente sólo una de las cantidades se considera como variable independiente, y la otra cantidad, cuyas variaciones dependen de las de la primera, es la funcion propiamente dicha. *Las funciones son algebráicas* cuando se pueden expresar por las operaciones cuyos signos son $+$, $-$, $\times$, $\div$, los exponentes y los radicales; y cuando hay que emplear otras operaciones, se llaman *funciones trascendentes.* El logaritmo de un número es una funcion trascendente de él; las funciones circulares, esto es, aquellas en que entran los valores de las líneas del círculo, son igualmente trascendentes.

Segun es el número de incógnitas que contiene una ecuacion, se dice que es ecuacion de una, de dos, ó de más incógnitas. Por ejemplo: $ax+c-2x=3x-d$ es ecuacion de una incógnita porque sólo contiene la cantidad desconocida x. La ecuacion $ax+by+cz=3d-a$, es una ecuacion de tres incógnitas.

Las ecuaciones se clasifican tambien por su *grado* y se llaman ecuaciones de 1°, 2°, 3° grado, etc. *El grado de una ecuacion se estima por el grado mayor de la incógnita en la ecuacion.* Cuando hay varias incógnitas, el grado de la ecuacion es la mayor suma de los exponentes de las incógnitas en *un mismo término* de la ecuacion. Así $3x+b=x-\frac{2x}{c}$ es una ecuacion de primer grado. La ecuacion $ax+bx_1^2+cy=d$ es de 2° grado, $x^3y-y^2=2ab$ es una ecuacion de 4° grado.

261.—Ecuaciones, fundamentos para su resolucion.—Para resolver un problema algebráico es indispensable, ante todo, expresar por una ecuacion las condiciones que ligan las cantidades conocidas con las desconocidas; una vez hecho esto, es necesario aislar la incógnita de las cantidades unidas á ella á fin de tenerla en un solo miembro de la ecuacion y en el otro su valor, y por último, debe comprobarse el resultado obtenido.

Por ejemplo: sabiendo que la edad de una persona es 4 veces la de su hijo, y que la suma de las dos edades forma 45 años, se quiere determinar ¿cuál es la edad de cada uno?

Si suponemos que la edad del hijo sea x años, la del padre seria $4x$: y supuesto que la suma de las dos edades ha de formar 45 años, tendremos que

$$x+4x=45$$

Tal es la ecuacion que en este problema expresa la liga ó relacion que existe entre los datos y la incógnita. Esta traduccion de las condiciones del problema, digámoslo así, al lenguaje algebráico, forma la primera parte de la resolucion del problema; la 2ª consiste en ejecutar las operaciones indicadas y conseguir que la incógnita quede sola en un

miembro de la ecuacion. Con tal objeto, ejecutando las operaciones indicadas tendremos:

$$5x=45$$

Aquí vemos que 45 es el producto de la edad x del hijo por 5, y como si el producto de dos cantidades se parte por una de ellas, el cociente será el otro factor, tendremos:

$$x=\frac{45}{5}=9$$

A esto se llama despejar la incógnita.

Por último: se debe comprobar este resultado. Si la edad del hijo es 9 años, la del padre, que es cuatro veces mayor, será 36 años, y como $9+36$ da 45, queda comprobado que el resultado obtenido satisface las condiciones del problema.

En la resolucion de un problema se deben, pues, distinguir tres partes: 1ª *plantearlo*, esto es, formar una ecuacion en la que se indiquen las condiciones que en el problema ligan las cantidades conocidas con las desconocidas; 2ª *resolver la ecuacion*, cuya operacion tiene por objeto determinar el valor de la incógnita; y 3ª *verificar* el valor obtenido para la incógnita, comprobando que la cantidad encontrada satisface las condiciones del problema.

El Algebra sólo se ocupa de los problemas que dan lugar á ecuaciones formadas con operaciones conocidas.

El poco número de operaciones elementales de las matemáticas es la causa de la dificultad que se experimenta para expresar las condiciones de un problema con los signos de las operaciones y símbolos del Algebra, esto es, para plantearlo, y con el objeto de conseguir esto, ante todo, es necesario comprender la cuestion, familiarizarse con la escritura del Algebra, y adquirir á fuerza de práctica la costumbre de descubrir en el enunciado de un problema todas las condiciones explícitas é implícitas; pero cuando se ha llegado á formar una ecuacion con las cantidades que la cuestion supone iguales, hay procedimientos metódicos y seguros para deducir de esta expresion algebráica el valor de la incógnita, lo cual es el objeto de la segunda parte de la resolucion del problema.

El Algebra se ocupa de la resolucion de las ecuaciones y para conseguir este objeto, fecundo en sus aplicaciones, es necesario ejercitarse en pasar fácilmente del lenguaje ordinario á los signos ó símbolos del Algebra, y de éstos á aquel; y sólo de esta manera se llega á hacer familiar el uso del Algebra, cuya dificultad *no* consiste *sino* en la perfecta inteligencia de los signos y de su empleo.

La resolucion de una ecuacion está fundada en los principios siguientes:

1° *Una ecuacion no se altera cuando se agrega, ó cuando se quita, una misma cantidad á sus dos miembros.* Si se agregan cantidades que contienen incógnitas, estas deben tener el mismo grado que la ecuacion; á causa de que deben ser homogéneas las cantidades que se suman y se restan.

2° *Una ecuacion no se altera cuando con sus dos miembros se ejecutan operaciones iguales.* Las cantidades por las que se multiplican ó se dividen los dos miembros de una ecuacion no deben ser nulas, ni infinitas, ni contener incógnitas. Como cualquiera cantidad multiplicada por cero ó dividida por el infinito da cero por resultado; multiplicar los dos miembros de una ecuacion por semejantes expresiones conduce al absurdo de que operaciones iguales ejecutadas con cantidades diferentes dan resultados iguales. Por ejemplo:

$$3\times0=0$$
$$5\times0=0$$

luego $3\times0=5\times0$ y suprimiendo el factor comun 0, resulta el absurdo

$$3=5$$

Tampoco deben contener los factores ó divisores de los dos miembros de una ecuacion incógnitas, porque éstas pueden ser nulas ó infinitas. Por ejemplo:

sea $x=3$

multiplicando por la incógnita x los dos miembros de esta ecuacion, se tiene: $x^2=3x$

restando 3^2: $x^2-3^2=3x-3^2$

descomponiendo la diferencia de los cuadrados en sus factores (251—III) $(x+3)\ (x-3)=3(x-3)$

suprimiendo el factor $(x-3)$ $x+3=3$

sustituyendo por x su valor de la ecuacion 1ª resulta el absurdo

$$3+3=3$$

3° *Una ecuacion no se altera haciendo sufrir á uno de sus términos ó á uno de sus miembros modificaciones que no cambien su valor.* Esto es, se pueden ejecutar una ó varias de las operaciones indicadas, y se puede invertir el órden de algunas operaciones.

262.—Resolucion de las ecuaciones.—Ya hemos indicado que resolver una ecuacion es efectuar las operaciones necesarias á fin de obtener otra ecuacion en la que la incógnita sola forme uno de los miembros y sea igual al otro compuesto de cantidades conocidas combinadas entre sí por operaciones que se sabe ejecutar.

En una ecuacion de primer grado la incógnita no puede estar ligada con las cantidades conocidas más que por adicion, sustraccion, multiplicacion y division.

1° *Toda cantidad puede pasar de uno á otro miembro de una ecuacion con signo contrario.*

Sea la ecuacion $x+a=b$

Supuesto que si á cantidades iguales se quita una misma cantidad los resultados serán iguales; quitando á los dos miembros de la ecuacion, a, tendremos:

$$x+a-a=b-a$$

pero como $+a-a=0$, tendremos que

$$x=b-a$$

cuyo resultado nos enseña que la cantidad a que estaba en el primer miembro con signo $+$ ha pasado al segundo con signo $-$

Si se tiene la ecuacion

$$x-a=b$$

agregando á los dos miembros la cantidad a la ecuacion no se alterará, y tendremos

$$x-a+a=b+a$$

reduciendo queda

$$x=b+a$$

resultado que nos demuestra que la cantidad $-a$ del primer miembro de la ecuacion ha pasado al segundo con signo $+$

2° *Toda cantidad que está como factor en un miembro puede pasar al otro como divisor.*

Sea $ax=b$

Como si cantidades iguales se dividen por una misma cantidad los resultados serán iguales, tendremos:

$$\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$$

y como $\frac{a}{a}=1$ tendremos que

$$x=\frac{b}{a}$$

resultado que nos demuestra que la cantidad a que estaba como factor de x en el primer miembro ha pasado al segundo como divisor.

3° *Toda cantidad que está como divisor en un miembro de una ecuacion puede pasar al otro como factor.*

Sea por ejemplo

$$a=\frac{x}{b}$$

multiplicando los miembros de la ecuacion por b tendremos

$$ab=\frac{xb}{b}$$

pero como $\frac{b}{b}=1$ tendremos

$$ab=x$$

donde se ve que el divisor b de x en el segundo miembro de la ecuacion ha pasado al primero como factor.

4° *Para hacer desaparecer los denominadores de algunos términos de una ecuacion, se formará el menor múltiplo comun de los denominadores, en seguida se multiplicarán los términos enteros por el múltiplo comun, y los numeradores de los términos de la forma fraccionaria se multiplicarán por el cociente que resulte de dividir el múltiplo comun por el denominador de cada término.*

Esta regla tiene por fundamento: 1° que un término no cambia de valor cuando se multiplica y se divide por una cantidad, y 2° que una ecuacion no se altera cuando sus dos miembros se multiplican por la misma cantidad. Para dar su demostracion nos valdremos de la siguiente ecuacion:

$$\frac{ax}{3b^2}+a-\frac{x}{2}=\frac{a}{b}-d\;........(1)$$

El menor múltiplo comun de los denominadores es $6b^2$

1ª *Operacion.*—Multiplicaremos y dividiremos cada término de la ecuacion por una misma cantidad; pero de modo que se consiga hacer que todos los términos queden con el mismo denominador: $6b^2$

El primer término $\frac{ax}{3b^2}$ lo multiplicaremos y dividiremos por 2, cociente de $\frac{6b^2}{3b^2}$ y se trasformará en $\frac{2ax}{6b^2}=\frac{ax}{3b^2}$

El segundo término siendo entero lo multiplicaremos y lo dividiremos por $6b^2$ múltiplo de los denominadores, y se trasformará en

$$\frac{6ab^2}{6b^2}=a$$

El tercer término $-\frac{x}{2}$ lo multiplicaremos y dividiremos por $3b^2=\frac{6b^2}{2}$ y se trasformará en $-\frac{3b^2x}{6b^2}=-\frac{x}{2}$

El primer término del 2° miembro de la ecuacion $\frac{a}{b}$ lo multiplicaremos y dividiremos por $6b=\frac{6b^2}{b}$ y se trasformará en $\frac{6ab}{6b^2}=\frac{a}{b}$

El segundo término del 2° miembro de la ecuacion $-d$ siendo entero lo multiplicaremos y dividiremos por el múltiplo comun $6b^2$ y se trasformará en $-\frac{6b^2d}{6b^2}=-d$.

La ecuacion (1) quedará trasformada en

$$\frac{2ax}{6b^2}+\frac{6ab^2}{6b^2}-\frac{3b^2x}{6b^2}=\frac{6ba}{6b^2}-\frac{6b^2d}{6b^2}\;........(2)$$

El fundamento de esta primera operacion es: que el valor de un término no se altera cuando se multiplica y se divide por una misma cantidad, y esto es lo que se ha hecho con cada uno de los términos de la ecuacion (1), reduciéndolos á un comun denominador.

2ª *Operacion.*—Multiplicando todos los términos de la ecuacion (2) por $6b^2$, y teniendo presente que el producto de un quebrado por su denominador es el numerador, tendremos:

$$2ax+6ab^2-3b^2x=6ab-6b^2d\;........(3)$$

y como una ecuacion no se altera cuando se multiplican sus dos miembros por una misma cantidad, ejecutando la segunda operacion subsistirá la ecuacion. Se ve, pues, que la ejecucion de dos operaciones que no alteran la ecuacion, conduce al resultado que se obtiene desde luego aplicando la regla dada para hacer desaparecer los denominadores.

5° *Cuando la incógnita tiene el signo ménos, y conviene obtener su valor considerándola como positiva, se cambiarán los signos á todos los términos de la ecuacion.*

Por ejemplo, si tenemos $-x=a-b$

podemos poner $x=b-a$

La razon de esto es que, supuesto que podemos pasar una cantidad de un miembro de la ecuacion al otro con signo contrario, pasando las del primer miembro al segundo, y recíprocamente, se tendrá $b-a=x$ luego $x=b-a$.

De otro modo; supuesto que si cantidades iguales se multiplican por una misma cantidad, los resultados serán iguales, la ecuacion $-x=a-b$ subsistirá multiplicando sus términos todos por -1, y ejecutando la multiplicacion se tendrá

$$x=b-a$$

lo que equivale á cambiar signos á todos los términos.

En los principios que anteceden se funda la regla general para despejar una incógnita.

Se llama *despejar una incógnita, dejarla sola en un miembro de la ecuacion y sus valores en el otro.* La resolucion de una ecuacion tiene por objeto despejar una incógnita.

263.—Regla general para resolver una ecuacion de primer grado, y de una sola incógnita.—1° *Se quitan los denominadores,* (262—4°). 2° *Se ejecutan las operaciones y reducciones indicadas.* 3° *Se pasan á un miembro de la ecuacion todas las cantidades que contienen la incógnita, y al otro las que no la contienen.* 4° *Se saca la incógnita como factor comun.* 5° *Se divide el segundo miembro de la ecuacion por el factor, ó por el coeficiente de la incógnita.* 6° *Cuando la incógnita resulta precedida del signo ménos, se cambian signos á todos los términos de la última ecuacion.*

Cuando en los dos miembros de la ecuacion hay términos que contienen la incógnita, *se debe pasar el menor al otro miembro,* observando lo siguiente:

1° Si los dos términos son positivos se pasa el de menor coeficiente; 2° si los dos son negativos pasa el de mayor coeficiente, y 3°, cuando un término es positivo y otro negativo, se pasa el negativo.

Sea como ejemplo resolver la siguiente ecuacion:

$$\frac{ax}{b}+\frac{x}{c}-2=8-\frac{x}{d}$$

1° Para quitar los denominadores el menor múltiplo es bcd y conforme á la regla se tiene

$$acdx+bdx-2bcd=8bcd-bcx$$

2° Todas las operaciones indicadas están ejecutadas.

3° Se pasan al primer miembro los términos que contienen la incógnita

$$acdx+bdx+bcx=8bcd+2bcd$$

4° Sacando x como factor comun, y ejecutando la reduccion en el segundo miembro

$$x(acd+bd+cb)=10bcd$$

5° Dividiendo el segundo miembro por el factor de x, se tiene por último:

$$x=\frac{10bcd}{acd+bd+bc}$$

Sea como segundo ejemplo resolver la ecuacion siguiente:

$$\tfrac{4}{3}x-82=\tfrac{6}{5}x-90+\tfrac{2}{3}x$$

Quitando los denominadores, cuyo menor múltiplo es 15

$$20x-1230=18x-1350+10x$$

Pasando al primer miembro las cantidades que contienen la incógnita

$$20x-18x-10x=1230-1350$$

Ejecutando las reducciones y operaciones indicadas

$$-8x=-120$$

Dividiendo el segundo miembro por el coeficiente de x

$$-x=-\frac{120}{8}=-15$$