Cambiando los signos

$$x=15$$

Ejercicios.—Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado.

$\frac{ab}{x}-\frac{1}{x}=bc+d$ Resolucion $x=\frac{ab-1}{bc+d}$

$\frac{a^2x}{b-c}+dc=bx-ac$ R. $x=\frac{c(a+d)(b-c)}{b(b-c)-a^2}$

$b=a+\frac{m(a-x)}{3a+x}$ R. $x=\frac{a(m-3b+3a)}{b-a+m}$

$\frac{a(d^2+x^2)}{d.x}=\frac{ax}{d}+ac$ R. $x=\frac{d}{c}$

$\frac{cx^m}{a+bx}=\frac{fx^m}{d+ex}$ R. $x=\frac{af-cd}{ce-bf}$

$\frac{7x^n}{x-1}+\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}=\frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1}$ R. $x=-\frac{11}{22}$

$\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}+\frac{e}{fx}+\frac{g}{hx}-k=0$ R. $x=\frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfhk}$

$\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)}=3cx+\frac{bx}{a}$ R. $x=\frac{ab}{a+b}$

$\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}+\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}$

R. $x=\frac{5a(2b-a)}{3c-d}$

$(a+x)(b+x)-a(b+c)-x^2=\frac{a^2c}{b}$ R. $x=\frac{ac}{b}$.

264.—Plantear el problema.—*Esta parte tiene por objeto formar una ecuacion en la que se indiquen las condiciones que en el problema ligan las cantidades conocidas con las desconocidas.* Para conseguirlo, ante todo, es indispensable comprender bien las condiciones tácitas y expresas que deben satisfacerse, examinando con atencion los datos de la cuestion.

La inteligencia del problema suele facilitarse suponiendo que la incógnita tenga un valor numérico y ejecutando las operaciones indicadas en el enunciado con este número arbitrario para asegurarse de que satisface ó no las condiciones del problema. Una vez comprendido este, podrá siempre plantearse aplicando la siguiente

Regla para plantear un problema.—*Se supone resuelto, y representando la incógnita por x, se indican con los signos algebráicos las mismas operaciones que sería necesario ejecutar con la incógnita si estuviera conocida para asegurarse de que satisface las condiciones del problema.* Se ve, pues, que para plantear un problema basta expresar su verificacion con los signos del Algebra.

Supongamos que se pregunta cuál es el número cuya mitad, sumada con su tercera, con su cuarta parte y con 18, da por resultado 70.

Representando por x el número buscado, su mitad será $\frac{x}{2}$, su tercera será $\frac{x}{3}$, su cuarta será, $\frac{x}{4}$, y expresando las operaciones indicadas en el enunciado para obtener por resultado 70, el problema quedará planteado en la siguiente ecuacion:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+18=70$$

que se resolverá como sigue:

Quitando los denominadores, cuyo menor múltiplo es 12

$$6x+4x+3x+216=840$$

Pasando al segundo miembro 216, se tendrá

$$6x+4x+3x=840-216$$

Reduciendo $13x=624$

Dividiendo por 13 $x=\frac{624}{13}=48$

265.—Verificacion del valor de la incógnita.—Despues de haber planteado el problema, y resuelto la ecuacion, se debe comprobar que el valor obtenido para la incógnita, satisface las condiciones exigidas por el enunciado del problema. *Esta verificacion se hace ejecutando con el valor de la incógnita las operaciones indicadas por la cuestion, y viendo si se obtiene el resultado pedido.*

En el problema anterior el valor de la incógnita fué 48,

su mitad es........................	24
su tercera parte..................	16
su cuarta...........................	12
y agregando.......................	18
se obtiene.........................	70

cuyo número satisface las condiciones del problema.

Es útil hacer esta comprobacion, porque así se descubre si se ha cometido algun error al plantear el problema, ó si se ha padecido alguna equivocacion en la resolucion de la ecuacion.

266.—PROBLEMAS DE PRIMER GRADO Y UNA SOLA INCÓGNITA.—I. *Dividir el número* 230 *en tres partes, tales que el exceso de la parte media sobre la más pequeña sea* 40, *y que la mayor exceda á la parte media* 60.

1° *Plantear el problema.*

Si la parte media es x, la menor será $x-40$, y la mayor $x+60$; y como la suma de las tres partes debe dar 230, formaremos la siguiente ecuacion:

$$(x-40)+x+(x+60)=230.$$

2° *Resolver la ecuacion.*

No habiendo denominadores y estando en el primer miembro todos los términos que contiene la incógnita, pasaremos al segundo los que no la contienen.

$$x+x+x=230+40-60$$

Reduciendo $3x=210$

Dividiendo por 3 $x=70$ $\qquad 70-40=30$ parte menor

$70+60=130$ mayor parte.

3° *Verificacion* ó prueba.

Siendo 70 la parte media, la menor será 30, y la mayor 130 y la suma de las tres partes $30+70+130$ dando el número propuesto 230, el resultado obtenido quedará comprobado.

II. *Una persona tiene* 40 *años y su hijo* 12; *se desea saber dentro de cuántos años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo.*

Suponiendo que esto se verifique dentro de x años, entónces la edad del padre será $40+x$, y la del hijo $12+x$; pero supuesto que la primera debe ser triple de la segunda, tendremos la siguiente ecuacion:

$$40+x=3(12+x)$$

Ejecutando la multiplicacion $\qquad 40+x=36+3x$

Pasando al segundo miembro x $\qquad 40-36=2x$

$\qquad 4=2x$

de donde $\qquad x=2$

En efecto, á los dos años el padre tendrá 42 años de edad, y el hijo 14; y como $42=3\times14$ quedará resuelto y comprobado el problema.

III. *¿Cuál seria la deuda de una persona quien despues de haber pagado primero la mitad de su deuda, en seguida la tercera parte, y la doceava parte despues, queda debiendo* 630 *pesos?*

Si se llama x la deuda total que se busca, se tendrá planteado el problema en la siguiente ecuacion:

$$x=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+630$$

Para resolver esta ecuacion, quitaremos los denominadores, observando que 12 es el menor múltiplo comun y tendremos:

$$12x=6x+4x+x+7560$$
$$12x-11x=7560$$
$$x=7560$$

En efecto, $\qquad 7560\$=\frac{7560}{2}+\frac{7560}{3}+\frac{7560}{12}+630$

IV. *¿Cuál es el número cuyo tercio y cuarto juntos, suman* 63*?*

Llamando x el número buscado, tendremos planteado el problema en la siguiente ecuacion:

$$\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{4}x=63$$

Quitando los denominadores: $4x+3x=12\times63$

Reduciendo $7x=756$

Despejando $x=108$

La tercera parte de 108 es 36, su cuarta 27 y la suma de estas dos partes da 63.

Si se quiere resolver el problema semejante: *determinar un número cuya quinta y sexta parte juntas sumen* 22, será necesario plantear de nuevo el problema en la ecuacion:

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{6}=22$$

y en seguida resolverlo de una manera análoga

$$6x+5x=30\times22$$
$$x=\frac{660}{11}=60$$

Vamos á indicar, con este motivo, la ventaja que hay de emplear los signos algebráicos en estos casos. En efecto, si se buscara una regla para obtener, de la manera más sencilla, el resultado en estos dos problemas y en todos los semejantes, bastaria reemplazar las cantidades conocidas por letras y ejecutar las operaciones correspondientes á la resolucion del problema, que podria establecerse de un modo general en estos términos: *Buscar un número* x *que dividido primero por* a *y luego por* b *la suma de los cocientes sea* s.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=s \qquad x=\frac{abs}{a+b}$$

Esta última expresion no es el valor numérico de la incógnita, pero indicando las operaciones que deben efectuarse con los datos del problema para determinarlo, bastará sustituir éstos en lugar de las letras que los representan y ejecutar las operaciones indicadas para obtener el valor de la incógnita, cualesquiera que sean los datos del problema. Esto es, el resultado obtenido es una regla general para resolver todos los problemas semejantes. La espresion $x=\frac{abs}{a+b}$ es *una fórmula* é indica de una manera abreviada y precisa la regla para resolver un problema semejante á aquellos de que nos venimos ocupando, y que podria traducirse en el lenguaje comun de la manera siguiente: *El producto de las tres cantidades conocidas se dividirá por la suma de los dos divisores, para obtener el valor de la incógnita.*

Si valiéndonos de la fórmula $x=\frac{abs}{a+b}$ queremos resolver el problema dado, *encontrar un número cuya quinta y sexta parte juntas forman* 22, tendremos $a=5$, $b=6$, $s=22$, y sustituyendo en la fórmula

$$x=\frac{abs}{a+b}$$

se tiene

$$x=\frac{5\times6\times22}{5+6}=\frac{660}{11}=60$$

V.—*La suma de la edad de dos hermanos es 57 años, y sabiendo que el mayor tiene 7 años, más que el menor, se quiere determinar la edad de cada uno.*

Sea x la edad del hermano menor, la del mayor será $x+7$, y la suma de las dos edades, debiendo ser 57 años, plantearemos el problema en la siguiente ecuacion:

$$x+(x+7)=57$$

Resolviéndola se tiene $x=25$, edad del hermano menor.
$x+7=32$, edad del mayor.

Suma de las edades........57

Reflexionando un poco, se observará que hay algunos pormenores inútiles en el enunciado del problema, que puede reducirse á buscar dos números cuya suma sea 57, y su diferencia 7. Es muy útil desembarazar un problema de todos los accesorios extraños á su esencia, y los cuales contribuyen á oscurecerlo y á hacer perder la relacion que existe entre las cantidades. Sólo la práctica puede enseñar á entresacar lo que es necesario y lo que es inútil en un problema.

A fin de generalizar el problema precedente, *busquemos dos números que tengan* s *por suma, y* d *por diferencia.*

Siendo x el menor, el mayor será $x+d$, y debiendo ser s la suma de los dos, tendremos la siguiente ecuacion:

$$x+(x+d)=s$$

Resolviéndola se tiene: $2x=s-d$, y $x=\frac{s-d}{2}$

El número mayor será: $x+d=\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}=\frac{s+d}{2}$

De consiguiente: $x=\frac{s-d}{2} \qquad x+d=\frac{s+d}{2}$

Se ve, pues, que conforme á estas fórmulas, *conocida la suma y diferencia de dos cantidades, la mayor es igual á la mitad de la suma, más la mitad de la diferencia, y la menor es igual á la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia.*

VI. *Dividir un número* a *en dos partes que estén entre sí como* m *es con* n.

Siendo una parte x, para obtener la otra, estableceremos la proporcion:

$$m : n :: x : \frac{nx}{m}$$

y como la suma de las dos partes debe ser a, se tendrá la ecuacion:

$$x+\frac{xn}{m}=a$$

Resolviéndola se tiene $x=\frac{ma}{m+n}$

Si se quiere dividir a *en tres partes que estén entre sí, como $m : n : p$;* siendo x la primera parte, la 2ª y 3ª se determinarán por las proporciones:

$$m : n :: x : \frac{nx}{m}$$

$$m : p :: x : \frac{px}{m}$$

y debiendo ser la suma de las tres partes igual á a se tendrá la ecuacion:

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$$

resolviéndola se tiene $x=\frac{ma}{m+n+p}$

Fórmula que se aplicará para resolver todas las cuestiones de la regla de compañía simple.

VII. *Si se duplicara el número de pesos que tengo, decia una persona, daria 8 pesos: y habiéndose verificado esto tres veces consecutivas no le quedó nada: ¿Cuántos pesos tenia este hombre?*

Llamándolos x, la primera vez le quedarian $2x-8$: la 2^a vez $2(2x-8)-8=4x-24$: y la 3^a vez $2(4x-24)-8$ cuyo valor debe ser igual á cero. El problema quedará planteado como sigue:

$$2(4x-24)-8=0$$

Resolviendo la ecuacion $8x-48=8,\ 8x=56,\ x=7$

VIII. *A una fuente le entra agua por dos llaves, y observando que con el agua que entra por la 1^a se llena en 4 horas, y que abierta la 2^a llave solamente, se llena en 8 horas, se quiere saber: ¿en cuántas horas se llenará con las dos llaves abiertas?*

Supuesto que con la primera llave la fuente se llena en 4 horas, en una hora se llenará $\frac{1}{4}$ de la fuente, y con la segunda llave se llenará $\frac{1}{8}$ de la fuente en una hora. En consecuencia, abiertas las dos llaves se llenará $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ de la fuente en una hora, y llamando x el número de horas necesario para llenar toda la fuente, podremos establecer la siguiente ecuacion:

$$\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x=1$$

Resolviéndola se tiene: $2x+x=8,\ x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ horas.

La fuente se llenará en 2 horas 40 minutos.

IX. *Una persona que ve á otra tirar al blanco, le ofrece darle 10 pesos cada vez que acierte un tiro, con la condicion de que por cada uno que yerre le pague 5 pesos.* Despues de 20 tiros resulta que el tirador ha ganado 80 pesos, se quiere saber ¿cuántos tiros acertó y cuántos erró?

Llamando x el número de tiros acertados, $20-x$ será el de los errados, y como por cada uno de los primeros el tirador recibia 10 pesos, y por cada uno de los segundos pagaba 5 pesos, habiendo ganado 80 pesos, estableceremos la siguiente ecuacion:

$$10x-5(20-x)=80$$

Resolviéndola $10x-100+5x=80,\ 15x=180$

$$x=12$$

El número de tiros acertados será 12, el de errados 8. El tirador habrá recibido 10×12, y habrá pagado 5×8, en consecuencia, habrá ganado 80 pesos.

Si se trata de generalizar esta ecuacion, de modo que por cada tiro que acierte el tirador reciba a, por cada uno de los que yerre pague b, y despues de n tiros resulte una de tres cosas: 1° que el tirador haya ganado d pesos: 2° que haya perdido d pesos, y 3° que no haya ganado ni perdido:

en cada caso la ecuacion y el resultado será el siguiente:

1$^{er.}$ caso. $ax-b(n-x)=d,\quad x=\frac{bn+d}{a+b}$

2° caso. $ax-b(n-x)=-d,\quad x=\frac{bn-d}{a+b}$

3$^{er.}$ caso. $ax-b(n-x)=0,\quad x=\frac{bn}{a+b}$

De la fórmula $x=\frac{bn+d}{a+b}$ puede deducirse el resultado del 2° caso sin necesidad de establecer la segunda ecuacion ni resolverla, con solo sustituir $-d$ en lugar de d, y el resultado del 3$^{er.}$ caso puede deducirse igualmente de la misma fórmula, haciendo $d=0$. Por esto se ve que cuando hay variacion del valor ó del sentido de un dato en una cuestion ya resuelta, basta hacer la modificacion correspondiente en el último resultado, sin que sea necesario resolver la cuestion desde su orígen con esa variacion de datos.

A menudo sucede en Algebra, que teniéndose una fórmula tal como la de la cuestion de que venimos ocupándonos $x=\frac{bn+d}{a+b}$ se considera la incógnita como dato y uno de los datos anteriores como incógnita. Entónces tampoco es necesario resolver la cuestion desde su orígen, y bastará despejar de la fórmula final la literal que se considere como incógnita.

Por ejemplo, si se conoce el número de tiros acertados y se quiere determinar la ganancia del tirador, sin necesidad de plantear nuevamente el problema, de la ecuacion

$x=\frac{bn+d}{a+b}$ se despejará $d=x(a+b)-bn$

En general, *en una ecuacion se puede tomar por incógnita cualquiera de los datos ó literales que entran en ella,* no siendo necesario distinguir los elementos de una ecuacion en datos ó incógnitas, sino expresar simplemente la relacion que liga las cantidades que forman la ecuacion.

X. Determinar el valor de la fraccion periódica simple 0'(273).

Sea $$0'(273)=x$$

multiplicando por 1000 $$273'(273)=1000x$$

restando la primera ecuacion de la última se obtiene:

$$273=999x$$

luego $$x=\frac{273}{999}$$

XI. Determinar el valor de la fraccion periódica mixta 0'54(273).

Sea $$0'54(273)=x$$

multiplicando por 100 $$54'(273)=100x$$
multiplicando ésta por 1000 $$54273'(273)=100\,000x$$

restando de esta última ecuacion la anterior se tiene:

$$54273-54=99900x$$

luego $$x=\frac{54273-54}{99900}.$$

Este resultado es igual al que se obtiene conforme á la regla demostrada en Aritmética. (174 4° caso)

En efecto $$0'54(273)=\frac{54}{100}+\frac{273}{99900}$$

$$\frac{54}{100}+\frac{273}{99900}=\frac{54\times999+273}{99900}=\frac{54(1000-1)+273}{99900}=\frac{54000-54+273}{99900}$$

y finalmente $$0'54(273)=\frac{54273-54}{99900}$$

DISCUSION

DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO, Y OBSERVACIONES SOBRE LAS CANTIDADES NEGATIVAS Y VALORES INFINITOS, INDETERMINADOS É IMPOSIBLES.

267.—Formas diversas que pueden tener los valores de la incógnita.—En los problemas que hemos resuelto se habrá observado que la incógnita no ha tenido más que un valor, que éste ha sido positivo, y que sustituido en la ecuacion que nos ha servido para plantearlo se ha obtenido para el primer miembro un valor igual al del segundo; pero debiéndose considerar en Algebra las relaciones entre las cantidades de la manera más general que sea posible, es necesario tener símbolos para representar todos los resultados á que pueda conducir la resolucion de un problema, ó de una ecuacion.

El valor de una incógnita puede ser *positivo* ó *negativo; nulo* ó *infinitamente grande; determinado* ó *indeterminado; posible* ó *imposible.* Será positivo cuando su valor sea mayor que cero y negativo en el caso contrario: será nulo cuando sea igual á cero, é infinito cuando sea mayor que cualquiera magnitud: será determinado cuando no tenga más de un solo valor, é indeterminado cuando admita cualquiera; por último, será imposible cuando no haya ninguna cantidad que pueda satisfacer las condiciones del problema.

Demostraremos ante todo, *que en cualquiera ecuacion de primer grado, la incógnita no puede tener más que un solo valor.*

Demostracion.—La forma más general que puede darse á una ecuacion de primer grado, despues de quitar los denominadores, de hacer positivos ~~todos los términos~~ y de sacar la incógnita como factor comun, en cada miembro, es:

$$ax+b=cx+d$$

suponiendo que la incógnita x pudiera tener dos valores diferentes, n y n' por ejemplo, que verificaran la ecuacion, tendriamos:

$$an+b=cn+d \text{ de la que } n=\frac{d-b}{a-c}$$

y tambien

$$an'+b=cn'+d \text{ de la que } n'=\frac{d-b}{a-c}$$

y como dos cantidades iguales á una tercera no pueden ser desiguales,