el primero y el tercero dan 280 litros en cuatro horas: el segundo y el tercero dan 375 litros en seis horas y cuarto. Se quiere saber: 1° ¿cuánto producirá cada chorro por hora? y 2° siendo la capacidad del depósito de 18 metros cúbicos ¿en cuánto tiempo se llenará entrándole los tres chorros reunidos?

Sean x, y, z, los litros de agua producidos por cada chorro en una hora, y se tendrán las tres ecuaciones

$$(x+y)\ 3\tfrac{1}{2}=175$$
$$(x+z)\ 4\ =280$$
$$(y+z)\ 6\tfrac{1}{4}=375$$

de las que se obtiene: $x=30$, $y=20$, $z=40$.

Los tres chorros juntos dan en una hora $30+20+40=90$ litros; y por consiguiente, para llenar el depósito se necesitará $\frac{18000 \text{ lit.}}{90}=200$ horas.

IV.—Un número que consta de tres cifras es tal, que la suma de las tres cifras que lo forman da 16: invirtiendo el órden de las cifras si se suma el número dado con el número invertido, se obtiene 1211; y si se resta del número invertido se obtiene 297. ¿Cuál es el número?

Sea x la cifra que expresa las centenas, y las decenas y z las unidades: se tendrá para expresar el número $100x+10y+z$, y el número invertido será $100z+10y+x$; las condiciones del problema conducen al establecimiento de las tres ecuaciones:

$$x+y+z=16$$
$$(100z+10y+x)+(100x+10y+z)=1211$$
$$(100z+10y+x)-(100x+10y+z)=\ 297$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$x=4,\ y=5,\ z=7$$

El número pedido es: 457.

V.—Un comerciante tiene vinos de cuatro clases diferentes.

Haciendo una mezcla compuesta de 2 litros de la primera, 3 litròs de la segunda, 5 litros de la tercera y 10 litros de la cuarta, el litro de la mezcla resulta á razon de \$2'10.

De una segunda mezcla compuesta de 7 litros de la primera, 8 litros de la segunda, 10 litros de la tercera y 15 litros de la cuarta, resulta el litro á razon de \$2'20.

De una tercera mezcla compuesta de 10 litros de la primera, 5 litros de la segunda, 15 de la tercera y 20 de la cuarta, resulta el litro á razon de \$2'24.

En fin, de una cuarta mezcla formada de 18 litros de la primera, 17 litros de la segunda, 40 de la tercera y 25 de la cuarta, resulta el litro á razon de \$2'29.

Se quiere saber el precio de cada clase de vino.

Sean x, y, z, u, los precios de la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª clase de vino.

La primera mezcla se compone de $2+3+5+10=20$ litros á \$2'10, cuesta 42 pesos.

La segunda mezcla, compuesta de $7+8+10+15=40$ litros á \$2'20, vale 88 pesos.

La tercera mezcla, de $10+5+15+20=50$ litros á \$2'24, vale 112 pesos.

Por último, la cuarta mezcla, compuesta de $18+17+40+25=100$ litros á \$2'29, cuesta 229 pesos.

Con tales datos, el problema quedará planteado en las siguientes ecuaciones:

$$2x+3y+5z+10u=42$$
$$7x+8y+10z+15u=88$$
$$10x+5y+15z+20u=112$$
$$18x+17y+40z+25u=229$$

De las que se obtiene:

$$x=3,\ y=2,\ z=2'4,\ \text{y}\ u=1'8.$$

DESIGUALDADES

276.—Trasformaciones de las desigualdades.—*Se llama desigualdad la expresion que indica que dos cantidades tienen valores diferentes.*

Estas expresiones se indican por medio del signo $>$ ó $<$, poniendo la cantidad mayor del lado de la abertura, y la menor del lado del vértice del signo.

$$a>a-b, \qquad a<a+b$$

se lee a mayor que $a-b$; y a menor que $a+b$.

Muchas cuestiones dependen de este género de relaciones, y por tanto, importa conocer las trasformaciones que pueden sufrir subsistiendo la desigualdad. La principal dificultad de estas trasformaciones nace de la introduccion en los cálculos de las cantidades negativas; pero habiendo muchos casos en Algebra y en Geometría que se resuelven haciendo uso de las desigualdades, es necesario conocer el fundamento de tales trasformaciones para saber cuándo se podrán efectuar y en qué casos no.

Toda desigualdad $a>b$ debe concebirse como un símbolo de la ecuacion $a=b+x$ en la que x expresa la diferencia entre las cantidades a y b. Si se tiene $b<a$, esto equivale á la ecuacion $b=a-x$, en la que x indica tambien la diferencia entre a y b; siendo de notarse que no obstante que se conoce el sentido de la desigualdad, el valor de la diferencia, que hemos representado por x, no siempre se puede determinar con precision. Por ejemplo, puede ponerse que la suma es mayor que varios sumandos, aun cuando se desconozca el valor de los demas sumandos; el producto de dos quebrados propios es menor que uno de ellos y no se necesita conocer la diferencia para establecer la respectiva desigualdad.

1° *Si se agrega ó se quita una misma cantidad á los dos miembros de una desigualdad, esta subsistirá en el mismo sentido.*

Sea $A>a$ desigualdad que equivale á la ecuacion $A=a+d$, representando d la diferencia desconocida.

Agregando h á los miembros de esta ecuacion, se tiene

$$A+h=a+h+d$$

y como la suma total es mayor que la de varios sumandos, se infiere que

$$A+h>a+h$$

Este resultado demuestra que la desigualdad no se ha alterado agregando h á sus dos miembros.

Sea ahora, $A>a$, que equivale á $A=a+d$

Quitando h á los dos miembros de la ecuacion: $A-h=a-h+d$, como al suprimir d en el segundo miembro de esta ecuacion, lo hacemos *menor*, se infiere que $A-h>a-h$
cuyo resultado demuestra que una desigualdad no se altera cuando se quita á sus miembros una misma cantidad.

2° *En toda desigualdad se puede trasladar cualquier término de un miembro á otro, con signo contrario.*

Sea la desigualdad $a+b-c>d$

Supuesto que una desigualdad no se altera cuando se agrega ó se quita una cantidad á sus dos miembros, podremos restarles b y agregarles c, y se tendrá

$$a+b-c-b+c>d-b+c$$

reduciendo se tiene $a>d-b+c$

donde se ve que las cantidades b y c han pasado al segundo miembro de la desigualdad con signo contrario.

3° *Una desigualdad subsiste en el mismo sentido cuando se multiplican sus dos miembros por una cantidad positiva.*

Sea $A>a$, dándole la forma $A=a+d$

si se multiplican sus dos miembros por m, se tiene: $Am=am+dm$,

luego $Am>am$,

que era lo que se debia demostrar.

4° *Si se multiplican por una cantidad negativa los dos miembros de una desigualdad, esta resultará en sentido inverso.*

Sea $A>a$ equivalente á $A=a+d$

multiplicando por $-m$ la ecuacion, se tiene: $-Am=-am-dm$, como para hacer desaparecer $-dm$ en el segundo miembro de esta ecuacion tenemos que agregar $+dm$, lo haremos *mayor*, y por tanto

$$-Am<-am$$

Se ve que la desigualdad resulta en sentido contrario.

5° *Para quitar los denominadores de los términos de una desigualdad, se procederá lo mismo que en las ecuaciones cuando el denominador ó múltiplo comun sea positivo;* supuesto que esta operacion está fundada en multiplicar todos los términos de la expresion por un mismo número, y acabamos de demostrar que se pueden multiplicar los miembros de una desigualdad por una cantidad positiva, sin cambiar de sentido: cuando el múltiplo comun de los denominadores sea negativo, es preciso invertir el sentido de la desigualdad, y cuando exprese una diferencia, como $b-c$, para quitar los denominadores es preciso tener la seguridad de que es $b>c$, ó de que $b<c$.

6° *Para cambiar el signo á todos los términos de una desigualdad, es necesario invertir el sentido de ésta.*

Porque el cambio de signos equivale á multiplicar todos los términos por -1, y se ha visto que cuando se multiplican los dos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa, resulta en sentido inverso. Esta propiedad constituye una diferencia característica entre las trasformaciones de las ecuaciones y las de las desigualdades.

7° *Si se dividen los dos miembros de una desigualdad por una cantidad positiva, ésta subsiste en el mismo sentido.*

Sea $A>a$, que equivale á $A=a+d$.

Dividiendo los términos de la ecuacion por m: $\frac{A}{m}=\frac{a}{m}+\frac{d}{m}$

luego $\frac{A}{m}>\frac{a}{m}$

8° *Si se dividen los dos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa, la desigualdad resultará en sentido inverso.*

Sea $A>a$. que equivale á $A=a+d$

Dividiendo los términos de la ecuacion por $-m$: $-\frac{A}{m}=-\frac{a}{m}-\frac{d}{m}$

luego $-\frac{A}{m}<-\frac{a}{m}$

De estos dos principios se deduce que: *en las desigualdades toda cantidad que está como factor en un miembro, puede pasar como divisor al otro; observando que cuando el factor es positivo, la desigualdad subsiste en el mismo sentido; que cuando el factor es negativo, la desigualdad resulta en sentido contrario, y cuando el factor expresa una diferencia, deberá averiguarse préviamente el signo del resultado de dicha diferencia.*

9° *Cuando se tienen varias desigualdades en el mismo sentido, se pueden sumar ordenadamente, resultando una desigualdad en el mismo sentido.*

Si se tiene $A>a$, que equivale á $A=a+d$
$A'>a'$ „ „ $A'=a'+d'$
resultará: $A+A'>a+a'$; porque $A+A'=a+a'+(d+d')$

10°—*Dos desigualdades en el mismo sentido no se deben restar, porque no se puede determinar el sentido de la desigualdad que resulte.*

Sean $A>a$ que equivale á $A=a+d$
y $A'>a'$ „ „ $A'=a'+d'$

restando la 2ª ecuacion de la 1ª se tiene: $A-A'=a-a'+d-d'$

En la que $A-A'$ podrá ser igual, mayor ó menor que $a-a'$, segun sea el valor de $d-d'$, que es desconocido.

Si $d-d'=o$ resultará $A-A'=a-a'$
Si $d-d'>o$ resultará $A-A'>a-a'$
Y si $d-d'<o$ se tendrá $A-A'<a-a'$

11°—*Se pueden restar dos desigualdades establecidas en sentido diferente, conservando la desigualdad resultante el sentido de la desigualdad cuyos miembros han servido de minuendos.*

Sean $A>a$, esto es, $A=a+d$
y $a'<A'$ „ $a'=A'-d'$
restando la 2ª ecuacion de la 1ª: $A-a'=a-A'+d+d'$,
luego $A-a'>a-A'$

12°—*Varias desigualdades establecidas en el mismo sentido, se pueden multiplicar ordenadamente cuando los términos que las forman son positivos; pero no se deberán multiplicar cuando alguno sea negativo.*

Sea $a<A$ que equivale á $A=a+d$
y $b<B$ „ .. $B=b+d'$
multiplicando las ecuaciones $AB=ab+bd+ad'+dd'$
luego $ab<AB$

pero no podrán multiplicarse las desigualdades cuando estén establecidas en sentido contrario, ni tampoco cuando entren en los factores cantidades negativas; pues el sentido de la desigualdad dependerá del valor de las cantidades que se consideren en cada caso.

De esto se deduce que: *cuando los miembros de una desigualdad son cantidades positivas, pueden elevarse á cualquiera potencia.*

13°—*Se pueden dividir dos desigualdades establecidas en sentido contrario, debiendo conservar la desigualdad resultante el sentido de la de los miembros que han servido de dividendos.*

Sea $A>a$ que equivale á $A=a+d$
y $a'<A'$ „ „ $a'=A'-d'$

dividiendo ordenadamente las ecuaciones: $\frac{A}{a'}=\frac{a+d}{A'-d'}$

pero como conforme á los principios fundamentales del cálculo de los quebrados (141)

$x+\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+x$

$$\frac{a+d}{A'-d'}>\frac{a+d}{A'}\ , \ y\ \frac{a+d}{A'}>\frac{a}{A'}, \text{ con más razon } \frac{a+d}{A'-d}>\frac{a}{A'}$$

luego $\frac{A}{a'}>\frac{a}{A'}$ que es lo que se debia demostrar.

Daremos esta demostracion de otra manera.

Sean $A>a$

y $a'<A'$

Como mientras mayor sea el dividendo siendo uno mismo el divisor tanto mayor será el cociente, tendremos dividiendo la primera desigualdad por a' que

$$\frac{A}{a'}>\frac{a}{a'}$$

y como mientras mayor sea el divisor siendo uno mismo el dividendo, tanto menor será el cociente, si dividimos a por los miembros de la desigualdad $a'<A'$, tendremos:

$$\frac{a}{a'}>\frac{a}{A'}$$

luego si $\frac{A}{a'}>\frac{a}{a'}$ y $\frac{a}{a'}>\frac{a}{A'}$

se infiere que $\frac{A}{a'}>\frac{a}{A'}$

que es lo que se debia demostrar.

277.—En resúmen: *una desigualdad no se altera cuando se agrega ó quita á sus dos miembros una misma cantidad, ó cuando se multiplican ó dividen por una cantidad positiva; se pueden trasladar de un miembro á otro los términos con signo contrario; se pueden quitar los denominadores y los factores como en las ecuaciones, cuando éstos son positivos; pero cuando hay que multiplicar ó dividir los términos de una desigualdad por una cantidad negativa, ó cuando se cambian todos los signos, es necesario invertir el sentido de la desigualdad; cuando los miembros de ésta son positivos, se pueden elevar á una potencia sin variar el sentido de la desigualdad; cuando se tienen varias desigualdades establecidas en el mismo sentido, se pueden sumar ordenadamente y multiplicarlas cuando sus miembros son positivos; pero para restar ó dividir las desigualdades, es preciso que estén en sentido contrario, conservando la desigualdad resultante el sentido de la de los miembros que sirven de minuendos ó de dividendos.*

278.—*Valores límites.*—Cuando se tienen varias desigualdades que contienen la misma incógnita, cada una de ellas da un límite al valor de la incógnita, y pueden presentarse tres casos: 1°, estos límites pueden estar en el mismo sentido como $x>5$, $x>8$, en cuyo caso, por ejemplo, la primera condicion es superflua por estar comprendida en la segunda $x>8$: 2° pueden estar indicados los límites en sentido opuesto, como $x>10$, $x<20$, y entónces x no podrá tener sino los valores intermedios entre 10 y 20: 3°, puede suceder por último, que los límites de los valores se excluyan unos á otros, como $x<15$, $x>20$, en cuyo caso, el problema es absurdo supuesto que envuelve condiciones contradictorias.

279.—Cantidades negativas.—Si en la expresion $y=a-x$ se supone que x es una cantidad variable, susceptible de tener diversos valores, se verá que y tendrá valores correlativos á los que se den á x. Si esta cantidad aumenta, el valor de y disminuirá, y al contrario, si el valor de x disminuye, el de y aumentará. Así, pues, tendremos:

1° si $x<a$, será positivo el valor de $y=a-x$
2° si $x=a$, se tendrá $y=o$
3° si $x>a$, será negativo y $-y=a-x$

Si en la 1ª desigualdad $x<a$, condicion que hace el valor de y positivo, pasamos x al segundo miembro, tendremos:

$$o<a-x$$

esto es $o<y$

lo que significa que cuando una cantidad es mayor que 0 es positiva. Si en la 3ª desigualdad $x>a$, condicion que hace negativo á y, pasamos x al segundo miembro, tendremos:

$$o>a-x$$

esto es $o>-y$

luego cuando una cantidad es negativa será menor que cero.

Adoptando estos resultados como símbolos de las cantidades positivas y negativas, se ve que podemos considerar *las cantidades positivas como expresiones cuyo valor es mayor que cero, y las negativas como menores que cero,* lo cual es una convencion útil, y que proporciona facilidad para ejecutar los cálculos.

280.—Problemas.—Como ejercicio resolveremos las siguientes cuestiones:

I.—*¿Cuál es el número mayor que 15; cuyo triple más 1 es menor que su duplo más 20; y tal además que si se le quita 1 y esta diferencia se divide por la suma del número con 3 el cociente sea mayor que $\frac{4}{5}$?*

En virtud de estas condiciones estableceremos las siguientes desigualdades:

$$x>15, \qquad 3x+1<2x+20, \qquad \frac{x-1}{x+3}>\frac{4}{5}$$

trasladando en la 2ª $\quad 3x-2x<20-1 \quad$ da $x<19$
quitando los denominadores en la 3ª $\quad 5x-5>4x+12$
trasladando $\quad 5x-4x>12+5, \quad$ lo que da $x>17$

En consecuencia, el valor de x debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$x>15, \qquad x<19, \qquad \text{y } x>17.$$

De estas condiciones la 1ª está comprendida en la última y todos los números comprendidos entre 17 y 19, satisfarán el problema, lo que da un número infinito de resoluciones, pudiendo hacerse $x=17\frac{1}{2}$, $17\frac{2}{3}$, $17\frac{3}{4}$, $17\frac{4}{5}$, etc.; pero si se agrega la condicion de que el valor de x sea número entero, sólo tendrá una resolucion $x=18$. Valor que en efecto es mayor que 15; $3\times18+1$ es menor que $2\times18+20$; y por último $18-1$ partido por $18+3$ da por cociente $\frac{17}{21}$ que es una fraccion mayor que $\frac{4}{5}$.

II.—*Se tiene una máquina de vapor que se alimenta con leña que se compra en el monte á razon de 6 centavos de peso la carga; cuesta el flete de la carga de leña del monte al establecimiento donde funciona la máquina 50 centavos, y queriendo reemplazar la leña por carbon de piedra, se trata de determinar la distancia máxima á que tendria cuenta encontrar una mina, bajo el supuesto de que la carga de carbon de piedra cueste en la boca de la mina 20 centavos, y su flete cueste á razon de 12 centavos la carga por legua, habiéndose determinado por la experiencia que 75 cargas de leña producen el mismo efecto que 28 cargas de carbon de piedra.*

	Leña.	Carbon de piedra.
Costo de la carga.........	6 cs,	.... 20 cs.
Flete de idem..............	50 ,,	.... 12x ,,
Cargas que se necesitan....	75 ,,	.... 28 ,,

Supuesto que 75 cargas de leña producen el mismo efecto que 28 de carbon, es preciso que el costo total de estas últimas sea menor que el de 75 cargas de leña para que pueda tener cuenta la explotacion de la mina de carbon de piedra, cuya condicion, llamando x las leguas de distancia de la mina al establecimiento, da lugar á la siguiente desigualdad:

$$28(20+12x)<75(6+50)$$

Ejecutando las multiplicaciones indicadas

$$560+336x<450+3750$$

Trasladando y reduciendo: $\quad 336x<4200-560$

Despejando $\quad x<\frac{3640}{336}$

$$x<\ 10'83 \text{ leguas.}$$

En consecuencia, es preciso que la distancia de la mina conforme á las condiciones del problema no pase de 10'83 leguas. En efecto, por comprobacion supondremos que la distancia sea de 11 leguas.

28 cargas de carbon á 20 cs., costarán en la mina........	$	5'60
Flete de 28 cargas por 11 leguas á 12 cs. por legua......		36'96
Costo del carbon...........	$	42'56
75 cargas de leña á 56 cs., costarán........................	$	42'00

precio inferior al del carbon de piedra cuando éste se encuentra á la distancia de 11 leguas.

ECUACIONES INDETERMINADAS DE PRIMER GRADO.

281.—Consideraciones generales sobre las ecuaciones indeterminadas de primer grado.—Hemos visto que en los problemas que dan lugar á una ecuacion de primer grado con una sola incógnita, ó á un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como ecuaciones, no se obtiene para cada incógnita mas que *un solo valor*, y por esto se les llama problemas *determinados*. Ahora vamos á ocuparnos de los *problemas indeterminados, que son aquellos cuyas condiciones dan lugar á un número de ecuaciones menor que el de incógnitas.*

Por ejemplo, si se pide cuáles son dos números cuya suma sea igual á 30, el problema se plantcará en la siguiente ecuacion:

$$x+y=30$$

que contiene dos incógnitas. Si se despeja á una de ellas, se tiene:

$$x=30-y$$