I.—*¿Cuál es el número mayor que* 15; *cuyo triple más* 1 *es menor que su duplo más* 20; *y tal además que si se le quita* 1 *y esta diferencia se divide por la suma del número con* 3 *el cociente sea mayor que* $\frac{4}{5}$?

En virtud de estas condiciones estableceremos las siguientes desigualdades:

$$x>15, \qquad 3x+1<2x+20, \qquad \frac{x-1}{x+3}>\frac{4}{5}$$

trasladando en la 2ª $\quad 3x-2x<20-1 \quad$ da $x<19$

quitando los denominadores en la 3ª $\quad 5x-5>4x+12$

trasladando $\quad 5x-4x>12+5, \quad$ lo que da $x>17$

En consecuencia, el valor de x debe satisfacer las siguientes condiciones;

$$x>15, \qquad x<19, \qquad \text{y } x>17.$$

De estas condiciones la 1ª está comprendida en la última y todos los números comprendidos entre 17 y 19, satisfarán el problema, lo que da un número infinito de resoluciones, pudiendo hacerse $x=17\frac{1}{2}$, $17\frac{3}{4}$, $17\frac{2}{3}$, $17\frac{5}{8}$, etc.; pero si se agrega la condicion de que el valor de x sea número entero, sólo tendrá una resolucion $x=18$. Valor que en efecto es mayor que 15; $3\times18+1$ es menor que $2\times18+20$; y por último $18-1$ partido por $18+3$ da por cociente $\frac{17}{21}$ que es una fraccion mayor que $\frac{4}{5}$.

II.—*Se tiene una máquina de vapor que se alimenta con leña que se compra en el monte á razon de* 6 *centavos de peso la carga; cuesta el flete de la carga de leña del monte al establecimiento donde funciona la máquina* 50 *centavos, y queriendo reemplazar la leña por carbon de piedra, se trata de determinar la distancia máxima á que tendria cuenta encontrar una mina, bajo el supuesto de que la carga de carbon de piedra cueste en la boca de la mina* 20 *centavos, y su flete cueste á razon de* 12 *centavos la carga por legua, habiéndose determinado por la experiencia que* 75 *cargas de leña producen el mismo efecto que* 28 *cargas de carbon de piedra.*

	Leña.	Carbon de piedra.
Costo de la carga.........	6 cs,	.... 20 cs.
Flete de idem............	50 ,,	.... 12x
Cargas que se necesitan....	75 ,,	.... 28 ,,

Supuesto que 75 cargas de leña producen el mismo efecto que 28 de carbon, es preciso que el costo total de estas últimas sea menor que el de 75 cargas de leña para que pueda tener cuenta la explotacion de la mina de carbon de piedra, cuya condicion, llamando x las leguas de distancia de la mina al establecimiento, da lugar á la siguiente desigualdad:

$$28(20+12x)<75(6+50)$$

Ejecutando las multiplicaciones indicadas

$$560+336x<450+3750$$

Trasladando y reduciendo: $\quad 336x<4200-560$

Despejando $\quad x<\frac{3640}{336}$

$$x< 10'83 \text{ leguas.}$$

En consecuencia, es preciso que la distancia de la mina conforme á las condiciones del problema no pase de 10'83 leguas. En efecto, por comprobacion supondremos que la distancia sea de 11 leguas.

28 cargas de carbon á 20 cs., costarán en la mina........	$	5'60
Flete de 28 cargas por 11 leguas á 12 cs. por legua.......		36'96
Costo del carbon............	$	42'56
75 cargas de leña á 56 cs., costarán....	$	42'00

precio inferior al del carbon de piedra cuando éste se encuentra á la distancia de 11 leguas.

ECUACIONES INDETERMINADAS DE PRIMER GRADO.

281.—Consideraciones generales sobre las ecuaciones indeterminadas de primer grado.—Hemos visto que en los problemas que dan lugar á una ecuacion de primer grado con una sola incógnita, ó á un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como ecuaciones, no se obtiene para cada incógnita mas que *un solo valor*, y por esto se les llama problemas *determinados*. Ahora vamos á ocuparnos de los *problemas indeterminados, que son aquellos cuyas condiciones dan lugar á un número de ecuaciones menor que el de incógnitas.*

Por ejemplo, si se pide cuáles son dos números cuya suma sea igual á 30, el problema se plantcará en la siguiente ecuacion:

$$x+y=30$$

que contiene dos incógnitas. Si se despeja á una de ellas, se tiene:

$$x=30-y$$

en la que si se da un valor arbitrario á y se obtendrá otro relativo para x. Así si se hace:

$y=1$, se obtendrá $x=29$. Si hacemos $y=2$, resulta $x=28$.

Si $y=2\frac{1}{2}$, $x=27\frac{1}{2}$; y cada uno de estos sistemas de valores correlativos satisfará las condiciones del problema de dar dos números cuya suma es 30.

Además, debe observarse que si se le dan á y cualquiera clase de valores, enteros ó fraccionarios, positivos ó negativos, el número de valores que pueden obtenerse para x será infinito. Sin embargo, *unas veces por la naturaleza de la cuestion, otras para limitar el número de resoluciones de un problema indeterminado, se fija la condicion de que los valores de las incógnitas han de ser precisamente números enteros y positivos.*

Cuando no se tiene más que una ecuacion y dos incógnitas, si se quitan los denominadores, y se pasan al primer miembro los términos que contienen á las incógnitas, y al segundo las cantidades conocidas, la ecuacion en su forma más general será:

$$\pm ax \pm by = \pm m$$

Expresando a la suma ó diferencia de las cantidades que multiplican á x; b las que multiplican á y; y m las cantidades independientes de las incógnitas. De esta fórmula se deducen dos casos esencialmente diferentes:

1° $\qquad ax+by=m$

2° $\qquad ax-by=m$

En el primer caso, la suma de dos cantidades debe ser igual á m; y en el segundo, la diferencia de dos cantidades debe ser igual á m. Una vez adoptada la restriccion de que las incógnitas han de ser números enteros y positivos, fácilmente se percibe que las cuestiones comprendidas en la fórmula

$$ax+by=m$$

tienen un número limitado de resoluciones, pues debiendo dar las incógnitas multiplicadas por sus coeficientes por suma un número m, naturalmente no puede ser mayor que m ninguno de los sumandos ax y by.

Por el contrario, las cuestiones comprendidas en la fórmula

$$ax-by=m$$

tienen en general un número ilimitado de resoluciones, porque es infinito el número de cantidades positivas que pueden dar la misma diferencia, supuesto que ésta no se altera cuando se agrega ó quita una misma cantidad á sus dos términos. Sin embargo, hay algunas cuestiones que dan lugar á la forma de la ecuacion $ax-by=m$ cuyo número de resoluciones se limita por alguna otra condicion, como que el valor de x no pase de 100, ú otra análoga.

282.—Regla para resolver las ecuaciones indeterminadas de primer grado.—Sea por resolver la siguiente cuestion. Entre dos jornaleros han ganado 44 reales; al primero se le pagan tres reales diarios, y al segundo cinco reales: se quiere saber ¿cuántos dias habrá trabajado cada uno de ellos?

Llamando x los dias que trabajó el primer jornalero, é y los que trabajó el segundo, el problema quedará planteado en la ecuacion siguiente:

$$3x+5y=44$$

debiendo ser tanto x como y números enteros y positivos. Despejaremos la incógnita que tiene menor coeficiente, en razon de que debiendo quedar este coeficiente como divisor de todos los otros términos, la division podrá efectuarse, obteniéndose un cociente que constará de una parte entera y de otra fraccionaria. Así tendremos:

$$x=\frac{44-5y}{3}$$

ejecutando las divisiones por 3 en el segundo miembro se tendrá:

$$x=14-y+\frac{2-2y}{3} \dots\dots\dots (1)$$

Aquí se ve que el valor de x consta de varias partes de las que 14 é y son enteras, y en consecuencia para que el valor de x sea númeno entero, es necesario que la parte $\frac{2-2y}{3}$ tambien lo sea; por lo cual el problema está reducido á determinar para y un valor que haga que el cociente de $2-2y$ partido por 3, sea un número entero que llamaremos p. Este número p es una nueva indeterminada que ha de llenar la condicion de ser número entero, y el valor de x (1) se convertirá en

$$x=14-y+p$$

que escribiremos por separado á la derecha y arriba de nuestros cálculos y tendremos que resolver la ecuacion

$$\frac{2-2y}{3}=p$$

quitando el denominador: $2-2y=3p$
despejando á y que tiene menor coeficiente:

$$\begin{aligned} x&=14-y+p\\ y&=1-p-q\\ p&=2q\\ y&=1-3q\\ x&=13+5q \end{aligned}$$

$$y=\frac{2-3p}{2}$$

Ejecutando la division indicada tendremos

$$y=1-p-\frac{p}{2}$$

para que el valor de y sea entero basta que la parte $\frac{p}{2}$ sea igual á un número entero que llamaremos q, y el valor de y se convertirá en

$$y=1-p-q$$

que escribiremos debajo del de x, y tendremos que resolver la ecuacion

$$\frac{p}{2}=q$$

quitando el denominador se tiene

$$p=2q$$

valor que será entero siempre que lo sea q. Este valor lo pondremos debajo del de y, y observaremos que siempre que sean p y q números enteros, el valor de la incógnita y tambien será entero, y por último, siendo p é y números enteros, lo será x. En consecuencia, bastará dar á q un valor cualquiera entero para que x é y lo sean.

Sustituyendo el valor $p=2q$ en el de $y=1-p-q$, tendremos:

$y=1-2q-q=1-3q$ que escribiremos abajo del de p.

Sustituyendo el valor de $y=1-3q$ y el de $p=2q$, en el de $x=14-y+p$ se tiene $x=14-1+3q+2q=13+5q$, que pondremos debajo del de y.

En estos últimos valores:

$$\begin{aligned} x&=13+5q\\ y&=1-3q \end{aligned}$$

si se da á q un valor entero cualquiera, los de x é y lo serán igualmente; pero como además de ser *enteros* los valores de las incógnitas deben

ser *positivos*, esto es, *mayores* que 0, para llenar esta otra condicion y obtener los límites de los valores que pueden darse á q, estableceremos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 13+5q&>0\\ 1-3q&>0 \end{aligned}$$

Resolviéndolas se obtienen para q los siguientes valores

$$q>-2\tfrac{3}{5};\ q<\tfrac{1}{3};$$

por el 1° podrá ser $q=-2,-1, 0, 1, 2$ y los demás números positivos:
por el 2° podrá ser $q=0,-1,-2,-3$ y los demás números negativos.

En consecuencia, para que x é y sean positivos y enteros q solo podrá tener los valores $0,-1$ y -2. Sustituyendo estos valores de q en los de x é y se obtiene:

siendo
$$\begin{aligned} q&=\ 0,-1,-2.\\ x&=13,\ \ 8,\ \ 3.\\ y&=\ 1,\ \ 4,\ \ 7. \end{aligned}$$

El problema admite, pues, tres resoluciones:

1ª El peon que gana 3 rs. trabajó 13 dias y el de á 5 rs. trabajó 1 dia.
2ª ———idem——3 rs.—idem—8—————5——idem 4 id.
3ª ———idem——3 rs.—idem—3—————5——idem 7 id.

En efecto, en cualquiera de estos casos los dos jornaleros juntos ganan 44 reales.

$$\begin{aligned} &3\times 13+5\times 1=44 \text{ rs.}\\ &3\times\ 8+5\times 4=44\\ &3\times\ 3+5\times 7=44 \end{aligned}$$

En lo expuesto se funda la siguiente:

REGLA PARA RESOLVER UNA ECUACION INDETERMINADA DE PRIMER GRADO.—1° *Una vez quitados los denominadores y hechas las reducciones, se despeja la incógnita que tiene menor coeficiente; se ejecuta la division en la parte posible y se obtiene el valor de la incógnita expresado por varios términos enteros y una parte en la forma de quebrado: haciendo este quebrado igual á una nueva indeterminada* p, *se obtiene el valor de la primera incógnita expresado por partes enteras. En la ecuacion formada con* p *y el quebrado que representa, se quita el denominador: se despeja la segunda incógnita: se ejecuta la division indicada en la parte posible, y haciendo al quebrado que forma parte de su valor igual á una nueva indeterminada* q, *se obtiene el valor de la segunda incógnita expresado en partes enteras. Se procede con el valor de* q *lo* *mismo que con el de* p, *y se obtiene el valor de* p *expresado por partes enteras y un quebrado que se iguala á una nueva indeterminada* r, *y se continúa así la operacion hasta obtener un valor expresado en partes todas de la forma entera.*

2° *Suponiendo que se determinó primero el valor de* x, *en seguida el de* y, *luego los de* p, q, *y que el de* r *haya resultado de la forma entera; se procederá en seguida en sentido inverso sustituyendo el valor de* r *en el de* q, *éstos en el de* p, *despues éstos en el valor de* y, *y por último éstos en el de* x.

3° *Obtenidos los valores de* x *y de* y *en la forma entera y en funcion de una misma indeterminada* r, *se establecen dos desigualdades indicando que tanto el valor de* x *como el de* y *han de ser mayores que cero: de estas desigualdades se sacan los valores límites de la indeterminada* r; *tomando los números enteros que haya entre estos límites, y sustituyéndolos en los valores de* x *y de* y *se tendrán todos los valores enteros y positivos que pueden satisfacer las condiciones del problema expresadas en la ecuacion.*

283.—Ejemplo.—Sea por resolver en números enteros y positivos la ecuacion:

$$27x-19y=43$$

1° Despejando á y, que es la incógnita de menor coeficiente, y ejecutando la division en la parte posible, se tiene:

$$y=\frac{27x-43}{19}=x-2+\frac{8x-5}{19}$$

Para que y sea número entero se necesita que lo sea x y el quebrado $\frac{8x-5}{19}$ que haremos igual á la indeterminada p, con lo cual se tendrá

$$y=x-2+p\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$p=\frac{8x-5}{19} \text{ de donde } x=\frac{19p+5}{8}=2p+\frac{3p+5}{8}$$

y se tendrá $\quad x=2p+q\ldots\ldots\ldots(2)$

haciendo $q=\frac{3p+5}{8}$, de donde $p=\frac{8q-5}{3}=2q-1+\frac{2q-2}{3}$

y se tendrá $\quad p=2q-1+r\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

haciendo $r=\frac{2q-2}{3}$, de donde $q=\frac{3r+2}{2}=r+1+\frac{r}{2}$

y se tendrá $\quad q=r+1+s\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

haciendo $s=\frac{r}{2}$, de donde $r=2s\ldots\ldots\ldots(5)$

Una vez encontradas las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) retrocederemos sustituyendo los últimos valores en las ecuaciones anteriores, para hacer desaparecer las indeterminadas intermedias.

$$\begin{aligned} y&=x-2+p\ldots(1)\\ x&=2p+q\ldots.(2)\\ p&=2q-1+r.(3)\\ q&=r+1+s\ldots(4)\\ r&=2s\ldots\ldots.(5)\end{aligned}$$

2° Sustituyendo el valor de r en el de q. $q=3s+1$
idem de r y q en el de p. $p=8s+1$
idem de p y q en el de x. $x=19s+3$
idem de x y p en el de y. $y=27s+2$

3°—Para determinar los límites de los valores que pueden darse á la indeterminada s á fin de que x é y sean números *positivos*, estableceremos las siguientes desigualdades:

$$19s+3>0 \qquad\qquad 27s+2>0$$

las que dan $\quad s>-\frac{3}{19} \qquad\qquad s>-\frac{2}{27}$

los números enteros mayores que estos límites son: 0, 1, 2, 3, 4, etc.

En consecuencia, el número de resoluciones que admite la ecuacion propuesta es infinito. Sustituyendo los valores de s en las ecuaciones de los valores generales de x é y

$x=19s+3, \qquad y=27s+2$, se tendrá

para $\quad s=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x=3,\ 22,\ 41,\ 60\ldots\ldots\ldots\ldots$
$y=2,\ 29,\ 56,\ 83\ldots\ldots\ldots\ldots$

Cualquiera de los valores correlativos de x é y satisfacen la ecuacion propuesta $27x-19y=43$. En efecto, si se toman por ejemplo los últimos valores puestos se tendrá:

$$27\times60-19\times83=43$$

284.—Observaciones sobre los problemas indeterminados.—Hemos dicho ya que para limitar en algunos casos el número de resoluciones que pueden tener los problemas indeterminados, se fija la condicion de que los valores de las incógnitas sean precisamente números *enteros* y *positivos*, y que todas aquellas cuestiones comprendidas en la fórmula

$$ax+by=m$$

conducen precisamente á un número limitado de resoluciones, en razon de que el valor de cualquiera de las incógnitas debe ser menor que m.

En efecto, la ecuacion del problema no llega á tomar la forma

$$ax+by=m$$

sino despues de haberse quitado los denominadores y de hacer las reducciones respectivas, de modo que los coeficientes a y b son números enteros, y debiendo serlo igualmente las incógnitas se tendrá que

$$x<ax$$

porque un factor es menor que su producto por otro número entero. Además

$$ax<m$$

porque un sumando es menor que la suma; luego

$$x<m$$

Del mismo modo demostrariamos que

$$y<m$$

lo cual establece un límite en la magnitud de los valores de las incógnitas y por consecuencia en el número posible de resoluciones del problema. Igualmente dijimos que las cuestiones comprendidas en la fórmula

$$ax-by=m$$

tienen por regla general un número ilimitado de resoluciones; porque siendo m la diferencia entre los valores ax, y by y pudiendo variar al infinito estos valores sin alterarse su diferencia, es claro que x é y podrán tener una infinidad de valores que son otras tantas resoluciones de la cuestion.

Fijados los casos en que un problema indeterminado conduce á un número *limitado* ó *ilimitado de resoluciones* en números enteros y positivos, vamos á examinar en cuáles el problema será imposible.—La resolucion de un problema indeterminado en números enteros y positivos es imposible en tres casos:

1° Cuando da lugar á una ecuacion de la forma

$$ax+by=0$$

porque es imposible que la suma de dos cantidades esencialmente positivas pueda ser cero. Esta ecuacion no puede subsistir á ménos que se

tenga á la vez $x=0$, é $y=0$: ó $a=0$, y $b=0$, cuyas condiciones la reducen á $0=0$.

2° Cuando la cuestion da lugar á la ecuacion de la forma

$$ax+by=-m$$

porque es un absurdo que la suma de dos cantidades positivas sea una cantidad negativa.

3° *Cuando los coeficientes de* x *y de* y *no son primos entre sí y el factor comun á ambos no divide exactamente al segundo miembro* m *de la ecuacion.* Para demostrar este principio, tomemos la ecuacion de la forma

$$ax+by=m$$

y supongamos que a y b no sean primos entre sí, sino que tengan un factor comun f por el que no sea divisible m. Esto es, se tendrá ... $a=cf$, $b=df$, no siendo m divisible por el factor f, comun á los coeficientes de x é y. Sustituyendo estos valores en la ecuacion se trasforma en

$$cfx+dfy=m$$

dividiendo por f $$cx+dy=\frac{m}{f}$$

como $\frac{m}{f}$ es un número fraccionario, supuesto que f no divide exactamente á m, y como son números enteros, tanto los coeficientes c y d como las incógnitas x é y, no es posible que la suma de dos productos de números enteros sea un número fraccionario; luego en el caso que venimos examinando es imposible resolver la cuestion en números enteros y positivos.

Igual demostracion dariamos para el caso de que el problema diese lugar á una ecuacion de la forma

$$ax-by=m$$

pues esta se convertiría en

$$cx-dy=\frac{m}{f}$$

y seria un absurdo que la diferencia entre dos números enteros, cx, y dy, fuera un número fraccionario $\frac{m}{f}$.

Siendo útil conocer alguna abreviaciones que pueden efectuarse en la resolucion de las ecuaciones indeterminadas, nos ocuparemos de dos principales.

1ª *abreviacion.*—A menudo sucede que el coeficiente del término que