representa el dividendo en el numerador es mayor que la mitad del denominador; en este caso la série de operaciones necesarias para resolver la ecuacion se simplifica, *cambiando signo al término del numerador, reemplazando el coeficiente de este término por la diferencia que hay entre este coeficiente y el denominador, y poniendo á continuacion del quebrado la literal del término del numerador con el signo que tenia en él, y por coeficiente tácito la unidad.*

Si se tiene por ejemplo,

$$x=\frac{a-6y}{8}$$

reemplazaremos en el quebrado el término $-6y$ por $+2y$, y á continuacion del quebrado pondremos $-y$, esto es,

$$x=\frac{a-6y}{8}=\frac{a+2y}{8}-y$$

En efecto, $\frac{-6y}{8}=\frac{-6y}{8}+\frac{8y}{8}-y=\frac{2y}{8}-y$ que es lo que prescribe la regla por medio de la cual se disminuye el número de divisiones.

Resolviendo la ecuacion

$$3x+5y=22=a$$

$$x=-2y+p$$

$$x=\frac{a-5y}{3}=-y+\frac{a-2y}{3} \qquad y=3p-a$$

como $\frac{a-2y}{3}=\frac{a+y}{3}-y$ $\qquad x=2a-5p$

se tiene $x=-2y+p$ $\qquad x=44-5p$

haciendo $p=\frac{a+y}{3}$ de donde $y=3p-a$ $\qquad y=3p-22$

valores generales de x é y que conducen á los mismos resultados, pero obtenidos más fácilmente.

2ª *abreviacion.—Cuando los términos del numerador tienen un factor comun, ántes de hacer la division debe sacarse este factor comun.*

Sea como ejemplo resolver la ecuacion

$$80x-17y=39$$

Despejando á $y=\frac{80x-39}{17}=4x-2+\frac{12x-5}{17}$

Efectuando la 1ª abreviacion $y=5x-2+\frac{-5x-5}{17}$

como el numerador $-5x-5$ tiene el factor comun -5, lo sacaremos,

y se tiene $y=5x-2-5\times\frac{x+1}{17}$

lo que da $y=5x-2-5p \ldots\ldots\ldots y=5x-2-5p$

haciendo $p=\frac{x+1}{17}$ se tiene $x=17p-1 \ldots\ldots\ldots x=17p-1$

sustituyendo este valor en el de y $\qquad y=80p-7$

Con estas abreviaciones se ha llegado fácilmente á las ecuaciones generales, pudiendo determinarse los límites de los valores por medio de las desigualdades

$$17p-1>0 \qquad 80p-7>0$$

que dan un número infinito de resoluciones.

Haciendo: $p=1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots.$
se obtiene: $x=16,\ 33,\ 50,\ 67\ldots.$
$y=73,\ 153,\ 233,\ 313\ldots.$

Otra abreviacion, como se habrá notado, es reemplazar el valor numérico del 2° miembro de la primera ecuacion por una literal.

Comprobaciones.—Cuando en la resolucion de las ecuaciones indeterminadas no se ha cometido ninguna equivocacion, deben verificarse las dos condiciones siguientes: 1ª los valores generales ó definitivos de las incógnitas x é y tienen siempre la forma general $x=n+bt$
$y=n'-at$
siendo n y n' valores numéricos, y los coeficientes de la última indeterminada t serán los de x é y en la ecuacion primitiva $ax+by=m$; observándose que en el valor de x el coeficiente b de t será el de y en la ecuacion, y que en el valor de y el coeficiente a de t será el de x: además, uno de estos coeficientes tendrá el mismo signo que en la ecuacion (b en el caso que consideramos), y el otro coeficiente a tendrá signo contrario: 2ª, los valores de x y los de y, formarán una série creciente ó decreciente, en la que la diferencia entre los valores de x será el coeficiente de y; y la diferencia entre los valores de y será el coeficiente de x en la ecuacion primitiva.

Por ejemplo: en la última ecuacion que hemos resuelto para explicar la 2ª abreviacion, teniamos:

ecuacion primitiva $\qquad 80x-17y=39$
valores generales de las incógnitas $\qquad x=17p-1$
$y=80p-7$
valores numéricos $\qquad x=16,\ 33,\ 50,\ 67\ldots\ldots.$
$y=73,\ 153,\ 233,\ 313\ldots\ldots.$

Aquí se ve que en los valores generales de las incógnitas la indeterminada p tiene en el valor de x el coeficiente 17 de y en la ecuacion con signo cambiado; y en el valor de y, tiene p el coeficiente 80 de x con el mismo signo. Los valores de x forman una série de números crecientes 16, 33, 50, 67.... entre los cuales la diferencia constante es 17, coeficiente de y en la ecuacion. Los valores de y: 73, 153, 233, 313... forman tambien una série de números cuya diferencia es 80, coeficiente de x en la ecuacion primitiva $80x-17y=39$.

Esta última observacion es útil para determinar todos los valores que pueden tener las incógnitas cuando se conocen dos de ellos.

El mejor medio para asegurarse de que no se ha cometido ningun error en la resolucion de una ecuacion indeterminada, es *reconstruirla* por medio de los valores generales de las incógnitas, para lo cual basta eliminar la última indeterminada en los expresados valores de las incógnitas.

Por ejemplo, resolviendo la última ecuacion, los valores de las incógnitas fueron:

$$x=17p-1$$
$$y=80p-7$$

para eliminar á p seguiremos el método de adicion y sustraccion y tendremos:

$$80x=80\times 17p-80$$
$$17y=80\times 17p-119$$

restando la segunda de la primera resulta:

$$80x-17y=119-80=39$$

que es la ecuacion primitiva de la que se obtuvieron los valores por medio de los cuales se ha reconstruido.

285.—Problemas. —Como ejercicio pondremos los siguientes problemas indeterminados:

I.—*Determinar dos partes de* 100, *de modo que una sea divisible por* 7 *y la otra por* 11.

Una parte será $7x$ y la otra $11y$: la cuestion quedará planteada en la siguiente ecuacion que resolveremos conforme á la regla dada (282)

$$7x+11y=100=a$$

1° $\qquad x=\dfrac{a-11y}{7}=-y+\dfrac{a-4y}{7}$

Por la 1ª abreviacion $x=-2y+\dfrac{a+3y}{7}$........$x=-2y+p$

$p=\dfrac{a+3y}{7} \quad y=\dfrac{7p-a}{3}=2p+\dfrac{p-a}{3}$ ....$y=\ 2p+q$

$q=\dfrac{p-a}{3} \quad p=3q+a$ ....$p=\ 3q+a$

2° Sustituyendo el valor de p en el de y........$y=\ 7q+2a$

$$x=-11q-3a$$

3° Estableciendo las desigualdades, y sustituyendo el valor de a

$$y=7q+200>0;\ x=-11q-300>0$$

se tiene $\qquad q>-28\tfrac{4}{7} \qquad q<-27\tfrac{3}{11}$

En consecuencia q no puede tener más que un valor entero igual á -28, lo que da $x=8$, $y=4$; y las partes de 100 serán 56 y 44, divisible la 1ª por 7, y la 2ª por 11.

II.—Un labrador compra mulas y bueyes en lo que gasta 1770 pesos: cada mula le cuesta 31 pesos, y cada buey 21: se quiere saber ¿cuántas mulas y cuántos bueyes ha comprado?

Llamando x el número de mulas é y el de bueyes, tendremos

$$31x+21y=1770=a$$

$y=\dfrac{a-31x}{21}=-x+\dfrac{a-10x}{21}$........$y=p-x$

$p=\dfrac{a-10x}{21}, \quad x=\dfrac{a-21p}{10}=-2p+\dfrac{a-p}{10}$ ..$x=-2p+q$

$q=\dfrac{a-p}{10},\ p=a-10q$ ....$p=a-10q$

$$x=21q-2a$$
$$y=3a-31q$$

$$x=21q-3540>0, \quad y=5310-31q>0$$
$$q>168\tfrac{12}{21} \qquad q<171\tfrac{9}{31}$$

Valores de $\qquad q=169,\quad 170,\quad 171$

$$x=\ 9,\quad 30,\quad 51$$
$$y=\ 71,\quad 40,\quad 9$$

El problema admite, pues, tres resoluciones.

III.—Preguntándole á una persona qué cantidad de dinero tiene, contesta que si lo cuenta de 7 en 7 pesos le sobran 5; y que si lo cuenta de 11 en 11 pesos le sobran 3; advirtiendo que la suma que tiene no llega á 200 pesos.

Con tales datos el problema quedará planteado en la ecuacion

$$7x+5=11y+3$$

Trasladando $\qquad 11y-7x=2$

la forma de esta ecuacion expresando una diferencia debía conducirnos á un número ilimitado de resoluciones y tal seria el resultado si no se tuviera la condicion de que el número de pesos representado por $7x+5$ ó por $11y+3$ no puede ser mayor que 200. Resolveremos la ecuacion $11y-7x=2$

$$x=\frac{11y-2}{7}=y+\frac{4y-2}{7}=2y-\frac{3y+2}{7}\ldots\ldots\ldots x=2y-p$$

$$p=\frac{3y+2}{7}\text{ de donde } y=\frac{7p-2}{3}=2p+\frac{p-2}{3}\ldots y=2p+q$$

$$q=\frac{p-2}{3}\qquad p=3q+2\ldots\ldots\ldots p=3q+2$$

$$y=7q+4$$
$$x=11q+6$$

$$x=11q+6>0,\quad y=7q+4>0$$

dan $\qquad q>-\frac{6}{11}\qquad q>-\frac{4}{7}$

valores de $\quad q=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots\ldots$

$x=6,\ 17,\ 28,\ 39,\ 50\ldots\ldots$

$y=4,\ 11,\ 18,\ 25,\ 32\ldots\ldots$

Tomando los valores relativos de x é y se encuentra que la cantidad podria ser

para
$$x=6,\ 17,\ 28,$$
$$y=4,\ 11,\ 18,$$
$$7x+5=47,\ 124,\ 201,$$
$$11y+3=47,\ 124,\ 201,$$

Como los terceros valores de x é y conducen á una suma de 201 pesos, mayor que 200, es claro que la cuestion no admite más que dos resoluciones.

IV.—*Hallar un número divisible por* 5 *y por* 7.

Si llamamos n este número, tendremos que $n=5x=7y$, de donde resulta que el problema quedará planteado en la ecuacion

$$5x-7y=0$$

la que resolviéndola debe conducir á un número infinito de resoluciones cuando no hay otra condicion que lo limite.

$$x=\frac{7y}{5}=y+\frac{2y}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=y+p$$

$$p=\frac{2y}{5}\text{ de donde } y=\frac{5p}{2}=2p+\frac{p}{2}\ldots\ldots\ldots y=2p+q$$

$$q=\frac{p}{2}\qquad p=2q\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p=2q$$

$$y=5q$$
$$x=7q$$

las desigualdades $\quad 5q>0 \qquad 7q>0$

dan los límites $\quad q>0 \qquad q>0$

luego $\quad q=1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots\ldots$

$x=7,\ 14,\ 21,\ 28\ldots\ldots$

$y=5,\ 10,\ 15,\ 20\ldots\ldots$

con una infinidad de resoluciones.

(*) 286.—ECUACIONES INDETERMINADAS DE PRIMER GRADO CON MAS DE DOS INCOGNITAS.—Consideraremos primero el caso en que se tengan tres incógnitas y solo haya dos ecuaciones.

Supongamos que se trate de determinar en números enteros y positivos el valor de las incógnitas en las ecuaciones:

$$6x+7y+4z=122\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$11x+8y-6z=145\ldots\ldots\ldots(2)$$

Con el objeto de eliminar á z multiplicaremos por 3 la ecuacion (1)

$$18x+21y+12z=366$$

Idem por 2 la (2) $\quad 22x+16y-12z=290$

Sumándolas $\quad 40x+37y=656\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

Teniendo una ecuacion con dos incógnitas la resolveremos como sigue:

$$y=\frac{656-40x}{37}=17-x+\frac{27-3x}{37}\ldots\ldots\ldots\ldots y=17-x+p$$

haciendo

$$p=\frac{27-3x}{37}\qquad x=\frac{27-37p}{3}=9-12p-\frac{p}{3}\ldots\ldots x=9-12p-q$$

haciendo $\quad q=\frac{p}{3},\quad p=3q\ldots\ldots\ldots\ldots p=3q$

Sustituyendo se tiene
$$\left.\begin{aligned}x&=9-37q\\ y&=8+40q\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

los valores $x=9-37q$, $y=8+40q$ los sustituiremos en la ecuacion (1) y tendremos:

(*) Este párrafo y los marcados con asterisco, no deben formar parte del programa de la Escuela Nacional Preparatoria, en concepto del autor.

$$54-222q+56+280q+4z=122$$

reduciendo $\qquad 58q+4x=12$

dividiendo por 2 $\qquad 29q+2z=6 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$

resolviendo la ecuacion (5)

$$z=\frac{6-29q}{2}=3-14q-\frac{q}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots z=3-14q-r$$

haciendo $r=\frac{q}{2}$, lo que da$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q=2r$

Sustituyendo el valor de q en el de $z\ldots\ldots\ldots z=3-29r$

Obtenidos los valores de z y q en funcion de r sustituiremos el valor de q en los de x é y (4), y se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x=9-74r \\ y=8+80r \\ z=3-29r \end{array}\right\} \quad (6)$$

con lo cual se ha conseguido que las tres incógnitas queden en funcion de la misma indeterminada r.

Una vez obtenidos estos valores generales, debiendo ser las incógnitas números enteros y positivos, estableceremos las siguientes desigualdades para determinar los límites de los valores de la indeterminada r.

$$9-74r>0, \qquad 8+80r>0, \qquad 3-29r>0.$$

que dan $\qquad r<\frac{9}{74} \qquad r>-\frac{8}{80} \qquad r<\frac{3}{29}$

Aquí debemos hacer notar que *siempre que hay tres desigualdades, las condiciones de una, están explícita ó implícitamente comprendidas en otra; por lo que con seguridad puede excluirse una de ellas.*

En el caso actual tenemos:

$$r<\frac{9}{74} \text{ y } r<\frac{3}{29}$$

y si multiplicamos por 3 los dos términos del último quebrado resulta

$$r<\frac{9}{74} \text{ y } r<\frac{9}{87}$$

por lo que todo número menor que $\frac{9}{87}$ es tambien $<$ que $\frac{9}{74}$.

De esto resulta que excluyendo la primera desigualdad $r<\frac{9}{74}$, y debiendo ser $r<\frac{3}{29}$ y $r>-\frac{8}{80}$, solo podrá ser cero. Haciendo: $r=0$ se tiene en el sistema (6) $x=9$, $y=8$, $z=3$, números que verifican las ecuaciones:

$$6x+7y+4z=122 \qquad 11x+8y-6z=145$$

El procedimiento que acabamos de explicar se resume en la siguiente

Regla para resolver un problema indeterminado de primer grado con tres incógnitas y dos ecuaciones.—*En las dos ecuaciones propuestas se elimina una incógnita y de la ecuacion resultante se deducen dos fórmulas que dan los valores de las incógnitas en funcion de una indeterminada, que llamaremos* s. *En seguida se sustituyen los valores de estas incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones propuestas, lo que da una ecuacion que no contiene más que á la incógnita que se eliminó al principio y á* s. *Por medio de la regla general* (282) *se deducen de esta ecuacion dos fórmulas que dan los valores de las dos incógnitas que contiene en funcion de una nueva indeterminada que llamaremos* t. *Por último, se sustituirá en los valores de las dos primeras incógnitas el valor de* s, *con lo que las tres incógnitas quedarán expresadas en funcion de una misma indeterminada* t, *y con cuyos valores se establecerán tres desigualdades indicando que son mayores que cero para fijar los límites de sus valores y deducir los de las incógnitas.*

Repetiremos que para que la resolucion de las ecuaciones pueda conducir á valores enteros, es preciso que si los coeficientes de las incógnitas tienen un factor comun, este factor divida exactamente al 2° miembro de la ecuacion. (284—3°)

Cuando una de las tres incógnitas tenga por coeficiente la unidad, para abreviar la resolucion, deberá eliminarse esta incógnita, y despues de haber deducido las fórmulas que dan los valores de las otras dos incógnitas en funcion de la indeterminada s, se sustituirán en la ecuacion donde la 3ª incógnita tiene la unidad por coeficiente, pues así se obtiene desde luego su valor en funcion de la misma indeterminada s.

(*) 287.—PROBLEMAS.—Para ejercicio resolveremos los siguientes:

I.— *Un comerciante tiene vino de tres clases: uno que vale* 15 *pesos la jarra, otro de á* 10 *y el tercero de á* 6 *pesos; queriendo formar una mezcla de* 100 *jarras que resulte á razon de* 8 *pesos la jarra, se pregunta, ¿cuántas jarras de vino deberá tomar de cada una de las tres clases?*

Llamando x, y, z, las porciones de cada clase, el problema quedará planteado en las siguientes ecuaciones:

$$x+y+z=100\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$15x+10y+6z=800 \;\ldots\;(2)$$

Multiplicando la (1) por 6 $\qquad 6x+6y+6z=600$

Restando esta de la (2) $\qquad 9x+4y=200\ldots\ldots\ldots(3)$

$$y=\frac{200-9x}{4}=50-2x-\frac{x}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots y=50-2x-p$$

haciendo $p=\frac{x}{4}$ $\qquad$ se tiene$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left.\begin{array}{l} x=4p \\ y=50-9p \end{array}\right\} (4)$

Sustituyendo los valores (4) de x é y en la ecuacion (1) se tiene

$$4p+50-9p+z=100 \text{ de donde } \quad z=50+5p$$

Teniendo los valores de las tres incógnitas en funcion de p para fijar los límites de esta indeterminada, estableceremos las siguientes desigualdades:

	$4p>0$	$50-9p>0$,	$50+5p>0$
las que dan	$p>0$	$p<5\frac{5}{9}$	$p>-10$

La tercera condicion es inútil, porque está comprendida en la 1ª y p no tendrá más que 5 valores de 1 á 5.

$p=$	1,	2,	3,	4,	5
$x=$	4,	8,	12,	16,	20
$y=$	41,	32,	23,	14,	5
$z=$	55,	60,	65,	70,	75

Cualquier sistema de los cinco valores correlativos de las tres incógnitas satisfacen las condiciones del problema. Tomemos por comprobacion, por ejemplo, los segundos, y se tiene

$$8+32+60=100$$
$$15\times8+32\times10+6\times60=800$$

II.—*Dividir el número 120 en tres partes, divisible la primera por 3, la segunda por 4, y la tercera por 5; y tales que una de ellas, la segunda, sea igual á la semisuma de las otras dos.*

Llamando $3x$ la primera parte, $4y$ la segunda, $5z$ la tercera, el problema quedará planteado en las siguientes ecuaciones:

$$3x+4y+5z=120 \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$4y=\frac{3x+5z}{2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Restando la segunda ecuacion de la (1) $3x+5z=120-\dfrac{3x+5z}{2}$

quitando el denominador $\quad 6x+10z=240-3x-5z$

trasladando y reduciendo $\quad 9x+15z=240$

Dividiendo por 3 $\quad 3x+5z=80 \ldots\ldots (3)$

$$x=\frac{80-5z}{3}=-z+\frac{80-2z}{3}=-2z+\frac{80+z}{3} \ldots x=p-2z$$

$$p=\frac{80+z}{3} \qquad z=3p-80 \ldots \ldots \left.\begin{aligned} z&=3p-80 \\ x&=160-5p \end{aligned}\right\} (4)$$

Sustituyendo los valores (4) en la (1) se tiene

$$480-15p+4y+15p-400=120$$

reduciendo y despejando á y se tiene: $\qquad y=10$

No dependiendo el valor de y de ninguna indeterminada, fijaremos los límites que pueda tener el de p por medio de las desigualdades

	$3p-80>0$	$160-5p>0$
que dan	$p>26\frac{2}{3}$	$p<32$

los valores de p serán	$p=$	27,	28,	29,	30,	31
	$x=$	25,	20,	15,	10,	5
	$y=$	10,	10,	10,	10,	10
	$z=$	1,	4,	7,	10,	13

con cualquier sistema de los valores correlativos de las tres incógnitas se verifican las condiciones del problema.

(*) 288.—PROBLEMAS INDETERMINADOS DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA MÁS QUE EL NÚMERO DE ECUACIONES.—Cuando se tiene, por ejemplo, tres ecuaciones y cuatro incógnitas se seguirá la siguiente regla para resolver el problema.

Se elimina una de las incógnitas, y resultando un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, se resuelve este como se ha explicado (286) *quedando expresado el valor de las incógnitas en funcion de una indeterminada que llamaremos* s. *En seguida se sustituyen los valores de las tres incógnitas en una de las ecuaciones primitivas, con lo que se obtiene una ecuacion con la cuarta incógnita y la indeterminada* s. *Si en esta ecuacion la cuarta incógnita no tiene por coeficiente la unidad, se resuelve por la regla general* (282); *obteniéndose los valores de la 4ª incógnita y de* s *en funcion de una indeterminada que llamaremos* t. *El valor encontrado para* s *se sustituye en los valores de las tres primeras incógnitas en funcion de esta indeterminada, y resultará que las cuatro incógnitas quedarán en funcion de la indeterminada* t. *Por último, estableciendo cuatro desigualdades con los valores de las incógnitas que deben ser mayores que cero, se fijarán los límites de* t *y los valores correspondientes de las incógnitas.*

El mismo procedimiento se seguirá cuando se tengan cinco incógnitas y cuatro ecuaciones, y en general cuando haya de resolverse un problema con una incógnita más que él número de ecuaciones.