CUADRADO Y RAIZ CUADRADA.

289.—CUADRADO Y RAIZ CUADRADA DE LOS MONOMIOS.—Se sabe que el cuadrado ó la segunda potencia de una cantidad es el producto que resulta de multiplicarla por sí misma, y en consecuencia, para elevar un monomio ó una expresion algebráica cualquiera al cuadrado, bastará multiplicarla por sí misma por las reglas que conocemos.

Si se quiere elevar al cuadrado $3a^3 x^5$ se tendrá:

$$(3\,a^3\,x^5)^2 = 3\,a^3\,x^5 \times 3\,a^3\,x^5$$

y como el órden de los factores no altera el producto tendremos:

$$(3\,a^3\,x^5)^2 = 3.3\,a^3\,a^3\,x^5\,x^5 = 3^2\,a^{3\times2}\,x^{5\times2}$$

Si se tiene: $(-5\,c^3\,x^4)^2$, como factores con signos iguales dan un producto afectado del signo más

tendremos: $$(-5\,c^3\,x^4)^2 = +5^2\,c^{3\times2}\,x^{4\times2}$$

De esto se deduce que *para elevar al cuadrado un monomio, el resultado se afectará siempre del signo más, el coeficiente se elevará al cuadrado por las reglas de aritmética, y los exponentes se multiplicarán por 2.*

Cuando el monomio sea un quebrado, se elevará conforme á esta regla, separadamente el numerador y el denominador.

Recíprocamente, *para extraer la raíz de un monomio positivo, se extraerá la raíz cuadrada del coeficiente y se dividirán por 2 los exponentes de las literales, afectando el resultado con el doble signo más y ménos.*

Por ejemplo:

$$\sqrt{4\,a^2\,b^6} = \pm 2ab^3 \qquad \sqrt{9\,a^4\,b^2\,c^8} = \pm 3\,a^2\,b\,c^4$$

El signo $\pm$ se llama de ambigüedad, porque como tanto $+2ab^3$ como $-2ab^3$ elevados al cuadrado producen $4a^2\,b^6$, hay duda sobre cual de estos dos signos debe tener el resultado, el cual es preciso afectarlo de ambos cuando no hay alguna condicion que obligue á desechar el valor positivo ó el negativo.

Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado, se extraerá separadamente la del numerador y la del denominador, afectando el resultado del signo de ambigüedad, siendo necesario que el quebrado sea positivo para que la operacion sea posible.

Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{16\,a^2 b^4}{4\,a^6}} = \pm\frac{4ab^2}{2a^3} = \pm\frac{2b^2}{a^2}$$

Se conoce que un *monomio no tiene raíz exacta cuando su coeficiente no es cuadrado perfecto, ó cuando los exponentes de las literales no son pares.* En este caso, la operacion algebráica no conduce á un resultado racional, y será necesario sustituir los valores de las literales y ejecutar en seguida la extraccion de la raíz del número correspondiente.

Cuando el monomio á que se ha de extraer la raíz cuadrada está precedido del signo *ménos,* la operacion no puede ejecutarse porque no hay ninguna cantidad que elevada al cuadrado produzca una cantidad, negativa. En efecto, si se tiene por ejemplo, $\sqrt{-a^2}$ ninguna cantidad positiva como $+a$, ni ninguna negativa como $-a$, ni aún cero, que es el orígen de unas y otras, multiplicado por sí mismo, puede dar por producto la cantidad negativa $-a^2$. Esta imposibilidad para encontrar el valor del resultado expresado por las cantidades que conocemos, indica un absurdo y se llama *expresion imaginaria á la raíz cuadrada de una cantidad negativa.*

TEOREMA.—*La raíz cuadrada del producto de varios factores, es igual al producto de las raíces de los factores.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}$$

Supongamos que $\sqrt{abc} = x$

y que $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = y$

Elevando al cuadrado estas dos ecuaciones, teniendo presente la definicion de raíz cuadrada y que para elevar un monomio hay que elevar cada uno de sus factores, resulta:

$$abc = x^2$$
$$abc = y^2$$

luego $x^2 = y^2$

y extrayendo raíz $x = y$

Siendo x igual á y sus valores tambien lo serán, y se tendrá:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$

que es lo que se debia demostrar.

Este teorema sirve de fundamento para sacar fuera del radical alguno ó varios de los factores que tienen raíz exacta.

Por ejemplo: $\sqrt{4ab^2c^3} = \pm 2bc\sqrt{ac}$

Cuando un monomio consta de algunos factores que son cuadrados perfectos y de otros que no lo son, se extrae la raíz de los factores que *tienen raíz exacta, y el resultado se pondrá como factor de los otros que se dejarán dentro del radical.*

Recíprocamente, y fundándose en el teorema demostrado, pueden introducirse dentro del radical algunos de los factores que están como coeficientes de la expresion radical, elevándolos al cuadrado.

Por ejemplo: $2bc^2\sqrt{ac}=\sqrt{4ab^2c^5}$

Recordaremos (240) que en las expresiones radicales se llama coeficiente á las cantidades literales ó numéricas que están como factor del radical.

Como los términos que tienen raíz cuadrada exacta son aquellos cuyos coeficientes son cuadrados perfectos y cuyas literales están afectadas de exponentes pares, á menudo se descompone una expresion radical, con el fin de simplificarla, en unos factores que tienen raíz exacta, satisfaciendo estas dos condiciones y en otros que no la tienen. Por ejemplo:

$$\sqrt{32a^5b^3}=\sqrt{16\times 2a^4ab^2b}=4a^2b\sqrt{2ab}$$

$$\sqrt{48a^7b^{13}c^5}=\sqrt{16\times 3a^6ab^{12}b.c,^4c}=4a^3b^6c^2\sqrt{3abc}$$

igualmente $3a\sqrt{b}=\sqrt{9a^2b}$

290.—Cuadrado y raiz cuadrada de un binomio.—Para elevar un binomio al cuadrado bastará multiplicarlo por sí mismo. Así:

$$(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=(a-b)\ (a-b)=a^2-2ab+b^2$$
$$(-a-b)^2=(-a-b)\ (-a-b)=a^2+2ab+b^2$$

en general

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

luego el cuadrado de un binomio consta de tres términos: el cuadrado de cada uno de sus dos términos, más ó ménos el doble producto de los términos del binomio. Este doble producto será positivo cuando los dos términos del binomio tengan el mismo signo, y será negativo cuando los términos del binomio tengan signos desiguales.

Para que un trinomio pueda tener raíz cuadrada, es necesario que dos de sus términos sean positivos y cuadrados perfectos, y que el tercer término sea igual al doble producto de las raíces de los otros dos. Cuando este doble producto sea positivo, la raíz del trinomio será igual á la suma de los dos factores que forman el doble producto; y cuando sea negativo, la raíz será igual á la diferencia de esos factores.

Por ejemplo:

$$\left(\tfrac{3}{4}a-bc^3\right)^2=\tfrac{9}{16}a^2-2\tfrac{3}{4}abc^3+b^2c^6$$
$$(ax+x)^2=a^2x^2+2ax^2+x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+ab+b^2}=\tfrac{1}{2}a+b$$
$$\sqrt{4a^2-\tfrac{4}{3}ab^3+\tfrac{1}{9}b^6}=2a-\tfrac{1}{3}b^3$$

291.—Cuadrado y raiz cuadrada de los polinomios.—Para elevar un polinomio cualquiera $a+b+c+d$ al cuadrado, consideraremos primero el binomio $a+b$ cuya segunda potencia es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo. En seguida consideraremos el trinomio $(a+b+c)$ como compuesto de dos términos: uno $(a+b)$ cuyo cuadrado conocemos ya, y de otro c. Por último, consideraremos el polinomio $(a+b+c+d)$ como compuesto de dos términos: uno $(a+b+c)$, cuyo cuadrado conocemos ya, y de otro d.

Así, pues, tendremos:

1° $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2° $(a+b+c)^2=\Big((a+b)+c\Big)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$

3° $(a+b+c+d)^2=\Big((a+b+c)+d\Big)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2$

De estos resultados se deduce la siguiente

Regla.—*El cuadrado de un polinomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo; más el doble producto de la suma de los dos primeros por el tercero, más el cuadrado del tercero, más el doble producto de la suma de los tres primeros por el cuarto, más el cuadrado del cuarto, y así sucesivamente.*

Sea como ejemplo elevar al cuadrado la expresion

$$(ax^3+bx^2+cx+d)^2=a^2x^6+2abx^5+b^2x^4+2(ax^3+bx^2)cx+c^2x^2+2(ax^3+bx^2+cx)d+d^2$$

Se ve, pues, que cuando hay una misma literal en varios términos de un polinomio, al elevarlo al cuadrado, si se ha ordenado el primer polinomio con respecto á las potencias de la literal, el resultado quedará igualmente ordenado con respecto á las potencias de la misma literal.

Como la extraccion de la raíz cuadrada es una operacion inversa de la elevacion al cuadrado, para efectuar esta operacion es necesario encontrar sucesivamente las partes de la raíz, formar en seguida las partidas del cuadrado de los términos encontrados y restarlas del polinomio cuya raíz se busca.

En lo expuesto se funda la siguiente

REGLA.—*Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio se ordenará con respecto á las potencias decrecientes de una misma literal: en seguida se buscará la raíz cuadrada del primer término, se formará su cuadrado y se restará del polinomio, quedando como resta todos los términos del polinomio ménos el primero: en seguida se duplicará la raíz hallada, se dividirá el primer término de la resta por el duplo de la raíz, y el cociente, que será el segundo término de la raíz, se pondrá al lado de ésta y del duplo del primero de la raíz; se multiplicará el segundo término de la raíz por la suma del duplo del primero más el segundo, y el producto se restará de la primera resta: en seguida se duplicarán los dos términos de la raíz, se dividirá el primer término de la resta por el primero del duplo de la raíz, el cociente será el tercero de la raíz; se multiplicará por él la suma del duplo de los dos primeros términos de la raíz más el tercero, y el producto se restará de la segunda resta; y así se continuará la operacion hasta encontrar cero por resta ó algun indicio de que no es posible obtener una raíz exacta.*

292.—EJEMPLOS.—Como ejercicio de la extraccion de la raíz cuadrada de los polinomios, pondremos los siguientes ejemplos:

I. Extraer la raíz cuadrada de $9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4$, polinomio ordenado con respecto á las potencias de a.

He aquí la marcha de la operacion:

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4} & 3a^2-2ab+5b^2 \\
-9a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4 & (6a^2-2ab)\times-2ab \\
+12a^3b-4a^2b^2 \qquad\qquad\qquad & (6a^2-4ab+5b^2)\times 5b^2 \\
\hline
+30a^2b^2-20ab^3+25b^4 & \\
-30a^2b^2+20ab^3-25b^4 & \\
\hline
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

La raíz del polinomio propuesto es el trinomio $3a^2-2ab+5b^2$, lo que se comprueba multiplicándolo por sí mismo.

II.—Extraer la raíz cuadrada de $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2} & a+b+c \\
-a^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & (2a+b)\times b \\
\hline
+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 & (2a+2b+c)\times c \\
-2ab-b^2 \qquad\qquad\qquad & \\
\hline
+2ac+2bc+c^2 & \\
-2ac-2bc-c^2 & \\
\hline
0 \qquad\quad &
\end{array}$$

293.—OBSERVACIONES SOBRE LA EXTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA DE LOS POLINOMIOS Y DE LOS BINOMIOS.—En Algebra sucede lo mismo que en Aritmética: rara vez una cantidad tiene raíz exacta, y así como hemos indicado que con un corto exámen puede decidirse desde luego si un monomio y si un trinomio tendrá ó no raíz exacta, otro tanto puede hacerse con un polinomio.

Para que un polinomio pueda tener raíz cuadrada exacta, es indispensable que, despues de haberlo ordenado con respecto á las potencias de una misma literal, tanto el primer término como el último sean positivos y cuadrados perfectos, debiendo satisfacerse esta condicion con cualquiera otra literal respecto de la que pudiera haberse ordenado el polinomio: además, al ejecutar la operacion es necesario que pueda dividirse exactamente el primer término de cada resta por el duplo del primer término de la raíz. Cuando estas condiciones estén satisfechas, puede comenzarse y seguirse ejecutando la operacion; pudiendo asegurarse que un polinomio no tendrá raíz exacta cuando no se verifiquen esas condiciones, ó cuando se haya encontrado en la raíz un término que sea la raíz cuadrada del último del polinomio, y quede una resta.

La ordenacion de un polinomio para extraerle la raíz cuadrada, puede hacerse indistintamente respecto de las potencias crecientes ó decrecientes de una misma literal.

Un binomio no puede ser el cuadrado de ninguna expresion algebráica.

En efecto, no es el cuadrado de un monomio, supuesto que el cuadrado de un monomio es un monomio; tampoco es el cuadrado de un binomio, supuesto que el cuadrado de un binomio es un trinomio; en fin, no es el cuadrado de un trinomio ni de ningun polinomio, porque *el cuadrado de un polinomio consta cuando ménos de cuatro términos.* En efecto, como para elevar al cuadrado un polinomio, que supondremos ordenado respecto á las potencias decrecientes de una misma literal, es necesario multiplicarlo por sí mismo, en el producto encontraremos los dos términos que provienen respectivamente de elevar al cuadrado el término en que la literal ordenatriz está elevada á la mayor y á la menor potencia, porque no hay otros términos semejantes á ellos; (250—2ª) además, el segundo término del producto y el penúltimo son irreductibles con los otros términos del producto, porque siendo el segundo término del producto, el doble del producto de los dos primeros términos del polinomio, encerrará la literal ordenatriz con un exponente mayor que el que puede tener esta literal en los demas términos, y por tanto, no habrá otro término semejante con el que pudiera reducirse; y como el mismo raciocinio es aplicable al penúltimo término del producto, queda demostrado que el cuadrado de un polinomio consta cuando ménos de cuatro términos.

Resulta, pues, que á un binomio no es posible extraerle la raíz cuadrada *algebráicamente;* siendo preciso conocer los valores numéricos de los términos del binomio y hacer la operacion por Aritmética.

Cálculo de las expresiones radicales y de las cantidades afectadas de exponentes fraccionarios y negativos.

294.—Elevacion de los monomios á una potencia cualquiera.—Hemos visto (247) que para multiplicar dos monomios se multiplican sus coeficientes, que cuando las literales son iguales se suman sus exponentes, y que el producto lleva el signo + cuando los factores tienen signos iguales, y el signo — cuando tienen signos desiguales. En consecuencia, cuando tengamos que elevar un monomio á una potencia, la operacion se trasforma en una multiplicacion cuyos factores son iguales, y por tanto, los coeficientes habrá que elevarlos por las reglas de Aritmética, y en cuanto á las literales, las sumas sucesivas de sus exponentes, que son iguales, se convierte en multiplicar cada exponente por el grado de la potencia.

Por ejemplo:

$$(2a^3b^2)^4=2a^3b^2\times 2a^3b^2\times 2a^3b^2\times 2a^3b^2$$
$$=2.\ 2.\ 2.\ 2a^3a^3a^3a^3b^2b^2b^2b^2=2^4a^{3\times 4}\ b^{2\times 4}=16a^{12}b^8$$

Respecto al signo del resultado se observará que cuando el monomio es positivo, como más por más siempre da más, la potencia, cualquiera que sea su grado, tambien será positiva. Si el monomio está afectado del signo ménos, consideraremos dos casos: *cuando el exponente de la potencia sea par, y cuando sea impar.*

Cuando el exponente de una potencia es *par*, será por esta causa du-

plo de otro número que llamaremos n, y en virtud de que el producto de dos literales iguales se obtiene sumando sus exponentes, tendremos, que denominando en general $2n$ el exponente *par* y siendo

$$(+a)^{2n}=+a^n\times+a^n=+a^{2n}$$
$$(-a)^{2n}=-a^n\times-a^n=+a^{2n}$$

resulta que *la potencia par de una cantidad positiva ó negativa siempre es positiva.*

Cuando la potencia sea impar y positivo el monomio, el resultado llevará el mismo signo que este, porque todos los factores del producto son positivos. Si el monomio es negativo, el resultado podrá considerarse como el producto de la cantidad propuesta por una potencia par, así

$$(-a)^{2n+1}=-a\times(-a)^{2n}$$

y como toda potencia *par* de cualquiera cantidad es esencialmente positiva y el producto de una cantidad positiva por otra negativa, es negativo, se infiere que *la potencia impar de un monomio estará afectada del mismo signo que el monomio.*

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para elevar un monomio á una potencia, se elevará á esta su coeficiente por las reglas de la aritmética, se multiplicarán los exponentes de las literales por el exponente de la potencia, y el resultado se afectará del signo más cuando el grado de la potencia sea par, y cuando sea impar se le pondrá el signo del monomio.

Por ejemplo:

$$\left(\frac{6a^3b^n}{c^2}\right)^5=\frac{7776a^{15}b^{5n}}{c^{10}},\quad \left(-\tfrac{3}{4}a^2dh^3\right)^5=-\frac{243}{1024}a^{10}d^5h^{15}$$

295.—Extraccion de raices de los monomios.—Como para determinar la raíz de un monomio hay que ejecutar operaciones inversas de las que hemos prescrito para elevarlo á una potencia, habrá que extraer la raíz de su coeficiente por las reglas de aritmética, y que dividir el exponente de cada literal por el índice del radical.

Con *respecto á los signos* haremos notar que como tanto $+a$, como $-a$ elevada á una potencia par $2n$ produce un resultado positivo $+a^{2n}$, se infiere que la raíz par de una cantidad positiva debe ir precedida del signo $\pm$ esto es