remos los dos términos que provienen respectivamente de elevar al cuadrado el término en que la literal ordenatriz está elevada á la mayor y á la menor potencia, porque no hay otros términos semejantes á ellos; (250—2ª) además, el segundo término del producto y el penúltimo son irreductibles con los otros términos del producto, porque siendo el segundo término del producto, el doble del producto de los dos primeros términos del polinomio, encerrará la literal ordenatriz con un exponente mayor que el que puede tener esta literal en los demas términos, y por tanto, no habrá otro término semejante con el que pudiera reducirse; y como el mismo raciocinio es aplicable al penúltimo término del producto, queda demostrado que el cuadrado de un polinomio consta cuando ménos de cuatro términos.

Resulta, pues, que á un binomio no es posible extraerle la raíz cuadrada *algebráicamente;* siendo preciso conocer los valores numéricos de los términos del binomio y hacer la operacion por Aritmética.

Cálculo de las expresiones radicales y de las cantidades afectadas de exponentes fraccionarios y negativos.

294.—Elevacion de los monomios á una potencia cualquiera. —Hemos visto (247) que para multiplicar dos monomios se multiplican sus coeficientes, que cuando las literales son iguales se suman sus exponentes, y que el producto lleva el signo + cuando los factores tienen signos iguales, y el signo — cuando tienen signos desiguales. En consecuencia, cuando tengamos que elevar un monomio á una potencia, la operacion se trasforma en una multiplicacion cuyos factores son iguales, y por tanto, los coeficientes habrá que elevarlos por las reglas de Aritmética, y en cuanto á las literales, las sumas sucesivas de sus exponentes, que son iguales, se convierte en multiplicar cada exponente por el grado de la potencia.

Por ejemplo:

$$(2a^3b^2)^4=2a^3b^2\times 2a^3b^2\times 2a^3b^2\times 2a^3b^2$$
$$=2.\ 2.\ 2.\ 2a^3a^3a^3a^3b^2b^2b^2b^2=2^4a^{3\times 4}\ b^{2\times 4}=16a^{12}b^8$$

Respecto al signo del resultado se observará que cuando el monomio es positivo, como más por más siempre da más, la potencia, cualquiera que sea su grado, tambien será positiva. Si el monomio está afectado del signo ménos, consideraremos dos casos: *cuando el exponente de la potencia sea par, y cuando sea impar.*

Cuando el exponente de una potencia es *par*, será por esta causa du-

plo de otro número que llamaremos n, y en virtud de que el producto de dos literales iguales se obtiene sumando sus exponentes, tendremos, que denominando en general $2n$ el exponente *par* y siendo

$$(+a)^{2n}=+a^n\times+a^n=+a^{2n}$$
$$(-a)^{2n}=-a^n\times-a^n=+a^{2n}$$

resulta que *la potencia par de una cantidad positiva ó negativa siempre es positiva.*

Cuando la potencia sea impar y positivo el monomio, el resultado llevará el mismo signo que este, porque todos los factores del producto son positivos. Si el monomio es negativo, el resultado podrá considerarse como el producto de la cantidad propuesta por una potencia par, así

$$(-a)^{2n+1}=-a\times(-a)^{2n}$$

y como toda potencia *par* de cualquiera cantidad es esencialmente positiva y el producto de una cantidad positiva por otra negativa, es negativo, se infiere que *la potencia impar de un monomio estará afectada del mismo signo que el monomio.*

De lo expuesto se deduce la siguiente regla:

Para elevar un monomio á una potencia, se elevará á esta su coeficiente por las reglas de la aritmética, se multiplicarán los exponentes de las literales por el exponente de la potencia, y el resultado se afectará del signo más cuando el grado de la potencia sea par, y cuando sea impar se le pondrá el signo del monomio.

Por ejemplo:

$$\left(\frac{6a^3b^n}{c^2}\right)^5=\frac{7776a^{15}b^{5n}}{c^{10}},\quad \left(-\tfrac{3}{4}a^2dh^3\right)^5=-\frac{243}{1024}a^{10}d^5h^{15}$$

295.—Extraccion de raices de los monomios.—Como para determinar la raíz de un monomio hay que ejecutar operaciones inversas de las que hemos prescrito para elevarlo á una potencia, habrá que extraer la raíz de su coeficiente por las reglas de aritmética, y que dividir el exponente de cada literal por el índice del radical.

Con *respecto á los signos* haremos notar que como tanto $+a$, como $-a$ elevada á una potencia par $2n$ produce un resultado positivo $+a^{2n}$, se infiere que la raíz par de una cantidad positiva debe ir precedida del signo $\pm$ esto es

$$\sqrt[2n]{+A}=\pm x$$

y como toda potencia impar de una cantidad lleva el signo de la cantidad, tendremos:

$$\sqrt[2n+1]{+A}=+x$$
$$\sqrt[2n+1]{-A}=-x.$$

Examinemos, por último, el caso en que la cantidad sea negativa y el índice de la raíz par. Como tanto $+a$, como $-a$, elevada á una potencia par da $+a^{2n}$, y toda potencia de 0 es cero, se infiere que no hay ninguna cantidad ni mayor ni menor, ni igual á cero que elevada á una potencia *par* pueda producir una cantidad negativa. En consecuencia, la expresion $\sqrt[2n]{-a}$ es el símbolo de un absurdo, de una operacion impracticable, y se dice que es *una expresion imaginaria.*

En lo expuesto anteriormente se funda la siguiente regla:

Para extraer la raíz de un monomio, se extrae la raíz de su coeficiente, y se dividen los exponentes de las literales por el índice de la raíz; poniendo el signo ± al resultado cuando el monomio es positivo y el índice del radical es par; ó el signo del monomio cuando el índice del radical es impar. Si el monomio es negativo y el índice de la raíz es par, la expresion es imaginaria y la operacion solo puede quedar indicada.

Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{81a^8b^{12}c^{16}}=\pm3a^2b^3c^4\,,\qquad \sqrt[5]{-\frac{a^{10}b^5c^{15}}{32d^{10}}}=-\frac{a^2bc^3}{2d^2}$$

En consecuencia, para que tenga raíz exacta un monomio, es necesario que su coeficiente la tenga, y que todos los exponentes de las literales sean divisibles exactamente por el índice de la raíz. Cuando éste es par y el monomio negativo, la raíz es imposible y la expresion es imaginaria.

296.—Teoremas relativos á los radicales.—Vamos á demostrar algunos teoremas que sirven de fundamento para trasformar las expresiones radicales y para efectuar con ellas toda clase de operaciones:

Teorema.—I. *La raíz del producto de varias cantidades es igual al producto de las raíces de sus factores.*

Demostracion.—Sea $\sqrt[n]{abc}$, cuya expresion decimos que es igual al producto de $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}$; porque si suponemos que

$$\sqrt[n]{abc}\;=x\ldots\ldots\ldots(1)$$

y que $\qquad\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\;=y\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

Como por la definicion de raíz, $(\sqrt[n]{abc})^n=abc$, y como para elevar un monomio debe elevarse cada uno de sus factores $(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.)^n=abc$; elevando cada uno de los miembros de las ecuaciones (1) y (2) á la potencia n, se tiene:

$$abc=x^n$$
$$abc=y^n$$

luego $\qquad x^n=y^n$

y extrayendo la raíz n^{ma} se obtiene:

$$x=y$$

Siendo x igual á y, sus valores tambien lo serán, y se tendrá:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.$$

que es lo que se debia demostrar.

Teorema II.—*La raíz del cociente de dos cantidades es igual al cociente de las raíces de estas cantidades.*

Supuesto que $\qquad\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$

Se infiere que $\qquad\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{a}{b}$

pero como a y b son respectivamente las raíces m^{mas} de a^m y de b^m, la última igualdad demuestra el teorema.

Teorema III.—*Para elevar una expresion radical á una potencia, basta elevar á esta potencia la cantidad colocada debajo del radical.*

En efecto, se tiene.

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\ldots\ldots\times\sqrt[m]{a}$$

ó teor. I. $\qquad(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a\times a\times\ldots\ldots\times a}$

ó finalmente $\qquad(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}$

que es lo que se debia demostrar.

TEOREMA IV.—*Para extraer la raíz (m n^{ma}) de una cantidad, basta extraer la raíz n^{ma} de esta cantidad y en seguida la raíz m^{ma} del resultado.*

Se trata de demostrar que

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Sea

$$\sqrt[mn]{a}=x$$

y

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=y$$

elevando la primera ecuacion á la potencia mn se tiene:

$$a=x^{mn} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

elevando la segunda á la potencia m se tiene:

$$\sqrt[n]{a}=y^m$$

elevando esta á la potencia n se tiene:

$$a=y^{mn} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

comparando las ecuaciones (1) y (2), resulta:

$$x^{mn}=y^{mn}$$

luego

$$x=y$$

y sustituyendo los valores de x y de y resulta la igualdad

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

que demuestra el teorema.

Se puede invertir el órden de las operaciones sin alterar el resultado, esto es, extraer primero la raíz m y en seguida la n, ó al contrario.

El teorema precedente se extiende á la extraccion de un número cualquiera de raíces sucesivas.

TEOREMA V.—*Se puede, sin alterar el valor de un radical, multiplicar ó dividir por un mismo número el índice del radical y el exponente de la cantidad colocada bajo el radical.*

Se trata de demostrar que

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}$$

Ahora bien

$$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{\sqrt[p]{a^{np}}} \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

pero como $a^{np}=(a^n)^p$ y $\sqrt[p]{(a^n)^p}=a^n$, sustituyendo en la ecuacion (1) resulta

$$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}$$

igualdad que demuestra la primera parte del teorema. Además, como m y n son respectivamente los cocientes de mp y de np por p, la misma igualdad demuestra que se pueden dividir por un mismo número el índice de un radical y el exponente de la cantidad colocada dentro del signo radical.

297.—TRASFORMACIONES DE LOS RADICALES.—I. *Sacar fuera del radical uno ó varios factores.* Sea por ejemplo la expresion $\sqrt[m]{a^mb}$. Decimos que es igual á $a\sqrt[m]{b}$. En efecto, conforme al teor. I.

$$\sqrt[m]{a^mb}=\sqrt[m]{a^m}\times\sqrt[m]{b}=a\sqrt[m]{b}$$

luego

$$\sqrt[m]{a^mb}=a\sqrt[m]{b}$$

Cuando se ejecuta esta trasformacion, se dice que *se saca fuera del radical una cantidad*, y para efectuarla se extrae del factor colocado dentro del radical la raíz que indica el índice.

Ejemplos:

$$\sqrt{4a^6b}=2a^3\sqrt{b}$$

$$\sqrt[3]{16a^5b^2}=\sqrt[3]{2^3 . 2a^3a^2b^2}=2a\sqrt[3]{2a^2b^2}$$

Sucede á menudo que no todos los factores de una expresion radical tienen raíz exacta; y en este caso, fundándonos en la trasformacion anterior, se puede extraer la raíz de las cantidades que la tienen, y poner los resultados como factores de las que quedan dentro del radical.

Para determinar los factores de una expresion que tienen raíz exacta puede aplicarse la siguiente

REGLA.—*Los coeficientes numéricos que están dentro del signo radical se descompondrán en sus factores primos, despues de lo cual se dejarán sin variacion los números y las literales cuyos exponentes sean menores ó iguales al índice del radical; y los factores numéricos ó literales cuyos exponentes sean mayores que el índice, se descompondrán en dos factores de los que uno tenga por exponente el índice del radical ó un múltiplo del índice, y el otro el exceso ó resta que quede al dividir cada exponente por el índice del radical.* Puesta la expresion en esa forma tendrán raíz exacta todos los factores cuyos exponentes sean iguales ó múltiplos del índice del radical; pudiendo estar los factores en el numerador ó en el denominador de la expresion.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{8a^6b^2}{d^5}}$ puede descomponerse en factores que tienen raíz exacta y en otros que no la tienen.

$$\sqrt[3]{\frac{8a^6b^2}{d^5}}=\sqrt[3]{\frac{2^3a^6}{d^3}\times\frac{b^2}{d^2}}=\frac{2a^2}{d}\sqrt[3]{\frac{b^2}{d^2}}$$

En virtud de lo expuesto, las expresiones radicales experimentan en los cálculos trasformaciones y simplificaciones de mucho uso. Así por ejemplo:

$$\sqrt[3]{432}=2\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{16}=6\sqrt[3]{2};\quad \sqrt{nq^2}=q\sqrt{n}$$

$$\sqrt[5]{\frac{c^6d^8}{a^5}}=\frac{cd}{a}\sqrt[5]{cd^3};\ \sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)}=(a-b)\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{x^2y}+a\sqrt[4]{x^2y}+b\sqrt[4]{x^2y}=(1+a+b)\sqrt[4]{x^2y}$$

$$\sqrt{75}-4\sqrt{3}=\sqrt{25\times3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}(5-4)=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75a^3b^2}-4\sqrt{3a^3b^2}=ab\sqrt{3a}$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}+\frac{h}{g}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}=\frac{ag+bh}{bg}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

A las expresiones imaginarias se les suele dar otra forma, por ejemplo:

$$\sqrt[4]{-a^4}=a\sqrt[4]{-1};\quad \sqrt[4]{-a^5}=a\sqrt[4]{-a}$$

expresando el producto de una cantidad real por una imaginaria.

II.—*Poner dentro del radical uno ó varios factores.* Sea como ejemplo la expresion $a\sqrt[n]{b}$, y decimos que es igual á $\sqrt[n]{a^nb}$.

En efecto, como $a=\sqrt[n]{a^n}$ sustituyendo su valor, se tiene: $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}$

y segun el teor. I. $\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$

luego $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}.$

Se ve pues, que para operar esta trasformacion, basta elevar el factor que se considera á la potencia que indica el índice del radical y escribirlo dentro de este; pudiendo formar parte del denominador de la expresion el factor que se quiere poner dentro del radical.

Por ejemplo; $2a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{8a^3b}$

$$\frac{5a^2}{b^3}\times\sqrt[n]{\frac{d}{c}}=\sqrt[n]{\frac{5^na^{2n}d}{b^{3n}c}}$$

III.—*Simplificar un radical.*—Cuando el *índice* de un radical y el *exponente* de la cantidad, ó de todos los factores que están dentro del radical tienen un factor comun, se puede suprimir sin alterar el valor de la expresion, $\sqrt[mp]{a^{sp}}=\sqrt[m]{a^s}$. Esta trasformacion tiene por fundamento el teorema V.

Por ejemplo $\sqrt[6]{a^4b^2}=\sqrt[3]{a^2b}$

$$\sqrt[m]{a^m}=a^1=a$$

$$\sqrt[n]{a^{ns}}=\sqrt[n]{a^na^s}=a\sqrt[n]{a^s}$$

$$\sqrt[4]{81a^6b^{2n}}=\sqrt[4]{3^4a^6b^{2n}}=3\sqrt{a^3b^n}.$$

IV.—*Reducir los radicales al mismo índice.* Esta trasformacion tiene por objeto, estando dados varios radicales de índices diferentes, encontrar otros respectivamente iguales á ellos pero que tengan el mismo índice. Esta trasformacion presenta una gran analogía con la reduccion de los quebrados al mismo denominador.

Sean los radicales

$$\sqrt[m]{a^s}\ \text{y}\ \sqrt[p]{a^q}$$

multiplicando m y s por p, y en el 2° radical p y q por m se obtienen los radicales:

$$\sqrt[mp]{a^{sp}}\ \text{y}\ \sqrt[mp]{a^{mq}}$$

equivalentes á los primeros (teor. V) y con el mismo índice.

En general, *para reducir cualquier número de radicales al mismo índice, se multiplica el índice de cada radical y el exponente de cada uno de los factores numéricos ó literales que están dentro del signo radical por el producto de los índices de todos los demás.*

Cuando *los índices de los radicales no son primos entre sí,* se pueden reducir estos radicales á un índice igual á su menor múltiplo comun. *En este caso el índice de cada radical es el menor múltiplo comun, y los factores literales ó numéricos que están dentro del signo, se elevarán á la potencia que indique el cociente que resulta de dividir el menor múltiplo comun por el índice del radical.*

Sean los radicales:

$$\sqrt[3]{3a^2}\times\sqrt{4a^3}\times\sqrt[5]{ab}$$

reducidos al mismo índice se trasforman en sus iguales:

$$\sqrt[30]{3^{10}a^{20}}\times\sqrt[30]{4^{15}a^{45}}\times\sqrt[30]{a^6b^6}$$

Los radicales: $\sqrt[4]{a}$ y $\sqrt[6]{b}$

el menor múltiplo de cuyos índices es 12, se trasforman en

$$\sqrt[12]{a^3} \text{ y } \sqrt[12]{b^2}$$

Las expresionos:

$$2a\sqrt{ab}, \quad \sqrt[3]{\frac{b^2}{d}}, \quad \text{y } 8a\sqrt[4]{\frac{bc^3}{d}}$$

se trasforman en las siguientes:

$$2a\sqrt[12]{a^6b^6}, \quad \sqrt[12]{\frac{b^8}{d^4}}, \quad \text{y } 8a\sqrt[12]{\frac{b^3c^9}{d^3}}.$$

298.—Operaciones con las expresiones radicales.—Hemos dicho que se consideran como radicales semejantes aquellos cuya parte radical es igual, y que se llama coeficiente de un radical la parte que está fuera del signo.

Para sumar y restar las expresiones radicales cuando éstas no son semejantes, solo se indican las operaciones; cuando los radicales son semejantes se suman y restan los coeficientes, y la suma ó diferencia de éstos se multiplica por la parte radical.

Por ejemplo:

$$4\sqrt[3]{ab^2}+(c+d)\sqrt[3]{ab^2}=(4+c+d)\sqrt[3]{ab^2}$$
$$3\sqrt{ab^3}-(c+d)\sqrt{ab^3}=(3-c-d)\sqrt{ab^3}$$

La ejecucion de esta regla equivale á sacar como factor comun la parte radical.

Para multiplicar ó dividir dos expresiones radicales, se reducen préviamente al mismo índice (297, IV) *y en seguida se multiplican ó dividen las cantidades que están fuera y las que están dentro del signo.*

El fundamento de esta regla es: 1° que el valor de las expresiones radicales no cambia cuando se reducen al mismo índice: 2° que cuando hay que multiplicar estas expresiones, conforme á las reglas generales de la multiplicacion (247) deben multiplicarse separadamente los coeficientes y las literales, y hemos visto que el producto de dos radicales semejantes es igual á la raíz del producto de los factores que contienen (296); y 3° que cuando deben dividirse, se sabe que la raíz de un quebrado es igual á la raíz del numerador dividida por la del denominador.

Sea como ejemplo:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab};\ 3\sqrt[4]{5a^2b}\times-5\sqrt[4]{ab}=-15\sqrt[4]{5a^3b^2}$$
$$3a\sqrt[6]{b}\times5b\sqrt[8]{2c}=3a\sqrt[24]{b^4}\times5b\sqrt[24]{8c^3}=15ab\sqrt[24]{8b^4c^3}$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\ \frac{5a\sqrt{b}}{2b\sqrt{c}}=\frac{5a}{2b}\sqrt{\frac{b}{c}},\ \frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}}=3a\sqrt{3c}$$
$$\frac{15ab\sqrt[8]{2bc}}{3a\sqrt[6]{b}}=\frac{15ab\sqrt[24]{8b^3c^3}}{3a\sqrt[24]{b^4}}=5b\sqrt[24]{\frac{8c^3}{b}}$$

Vamos á explicar cómo se puede *sacar como factor comun* á c en la expresion $(c+b)^2$

No conteniendo todos los términos á c, multiplicaremos y dividirémos la expresion por esta cantidad, (257—3°) y como $c=(\sqrt{c})^2$ tendremos:

$$(c+b)^2=\frac{c}{c}(c+b)^2=c\left(\frac{c+b}{\sqrt{c}}\right)^2=c\left(\frac{c}{\sqrt{c}}+\frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2$$

Saquemos á d^2 como factor comun de la expresion $(d+b)^3$

$$(d+b)^3=\frac{d^2}{d^2}(d+b)^3=d^2\left(\frac{d+b}{\sqrt[3]{d^2}}\right)^3=d^2\left(\frac{d}{\sqrt[3]{d^2}}+\frac{b}{\sqrt[3]{d^2}}\right)^3$$

Por último, saquemos como factor comun á a^m en la expresion $(a+b)^n$

$$(a+b)^n=\frac{a^m}{a^m}(a+b)^n=a^m\left(\frac{a}{\sqrt[n]{a^m}}+\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^n$$