Al ejecutar la multiplicacion y division de las expresiones radicales, la regla dada (248) para los signos, experimenta modificaciones en algunos casos. Así $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ siendo el cuadrado de $\sqrt{-a}$ el producto es $-a$, mientras que á primera vista pareceria que debia dar $\sqrt{+a^2}=a$. Si observamos que $\sqrt{a^2}=\pm a$; la incertidumbre del signo no existe sino cuando se ignora si a^2 procede del cuadrado de $+a$, ó del de $-a$, lo cual no tiene lugar en el caso que consideramos, en el que debe desecharse el resultado $+a$.

De aquí deducimos que $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$.

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\sqrt{-1}=-\sqrt{ab}$$

Se verá igualmente que $\sqrt{-a}$ tiene por 1ª, 2ª, 3ª, 4ª.... potencias

$$\sqrt{-a},\ -a,\ -a\sqrt{-a},\ \ +a^2,\ \ldots.$$

Para elevar una expresion radical á una potencia, se elevarán á esta potencia cada uno de sus factores, dejándolos dentro del signo. En caso de que el índice de la raíz sea múltiplo del exponente de la potencia, se dividirá el índice de la raíz por el exponente de la potencia.

Si tenemos que elevar, por ejemplo, $\sqrt{3a^2b}$ al cubo, fundándonos en el teorema III, núm. 396, tendremos que:

$$(\sqrt{3a^2b})^3=\sqrt{27a^6b^3}$$

que es lo que prescribe la 1ª parte de la regla.

Para demostrar la segunda parte de la regla haremos ver que

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

En efecto, acabamos de probar que

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

pero como (296, V) una expresion radical no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número el índice del radical y los exponentes de las cantidades que están dentro del signo, resulta que

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{m}{m}}}=\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

luego $$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

que es lo que se queria demostrar.

Así: $(\sqrt{3a^2b})^3=\sqrt{27a^6b^3}$, $(\sqrt{2})^3=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$$(\sqrt[4]{9a^4b^6})^2=\sqrt{9a^4b^6}=\pm 3a^2b^3 \qquad (\sqrt[6]{3a^2h})^3=\sqrt{3a^2h}=a\sqrt{3h}$$

Si se tiene que elevar la cantidad b á la duodécima potencia, como 12 se puede descomponer en varios factores $2\times2\times3$, y hemos visto que para elevar un monomio á una potencia, basta multiplicar su exponente por el de la potencia, tendremos

$$a^{12}=\left((a^2)^2\right)^3$$

supuesto que $\left((a^2)^2\right)^3=a^{2.2.3}=a^{12}$ y que tanto en una como en otra expresion entra 12 veces a como factor del producto; pero además de que operando con un número el resultado se obtiene más brevemente por el procedimiento de elevaciones sucesivas, en álgebra es muchas veces conveniente descomponer una potencia en otras parciales.

Cuando el exponente de una potencia es múltiplo de otros números, el resultado será igual á la cantidad elevada sucesivamente á las potencias indicadas por los factores del exponente.

Por ejemplo: $a^4=(a^2)^2$; $a^6=(a^2)^3$; en general $a^{m.n}=(a^n)^m$

Para extaaer la raíz de un monomio afectado de un radical, se multiplica el índice del radical por el grado de la raíz que ha de extraerse, y se dejan las cantidades que están dentro del signo sin variacion. En el caso de que los coeficientes y las literales que están como factores dentro del radical tengan raíz exacta, se extraerá ésta á los coeficientes y se dividirán los exponentes de las literales por el grado de la raíz que se ha de extraer, dejando el índice sin variacion.

La primera parte de la regla tiene por fundamento el teorema IV del núm. 296, supuesto que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

En cuanto al caso á que se refiere la segunda parte, si tenemos:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{3n}}},$$

Como $$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{3n}}}=\sqrt[nm]{a^{3n}}$$

y si dividimos por n tanto el índice mn como el exponente $3n$ (296) tendremos:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{3n}}}=\sqrt[m]{a^3}$$

que es lo prescrito en la segunda parte de la regla.

Por ejemplo:
$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2a^2b}}=\sqrt[12]{2a^2b}\,;\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{c}}=\sqrt[m.n]{c}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\frac{4a^2b^4}{16c^4}}}=\sqrt[3]{\frac{2ab^2}{4c^2}}\,;\qquad \sqrt[3]{\sqrt{\frac{27b^6d^3}{8a^3}}}=\sqrt{\frac{3b^2d}{2a}}$$

Fundándonos en el teorema IV del núm. 296, *cuando el índice de un radical pueda descomponerse en varios factores, la raíz podrá obtenerse extrayendo á la cantidad las raíces sucesivas que indican los factores del índice.*

Siendo 12=2×2×3, $\sqrt[12]{n}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{n}}}$

$$\sqrt[4]{81}=\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=3;\quad \sqrt[6]{15625}=\sqrt[3]{\sqrt{15625}}=\sqrt[3]{125}=5$$

$$\sqrt[8]{256a^8b^{10}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{256a^8b^{10}}}}=\sqrt{\sqrt{16a^4b^5}}=\sqrt{4a^2b^2\sqrt{b}}=2ab\sqrt[4]{b}$$

$$\sqrt[m.n]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Esta trasformacion es útil para extraer las raíces superiores de los números cuando el grado de éstas es múltiplo del de la raíz cuadrada ó cúbica, operaciones que hemos enseñado á ejecutar en aritmética, y para dar otra forma á algunas expresiones radicales.

299.—EXPRESIONES CON EXPONENTES NEGATIVOS.—Al ocuparnos de la division de las cantidades algebráicas, hemos demostrado que para dividir dos literales iguales se deben restar sus exponentes. Así:

$$\frac{a^4}{a^2}=a^{4-2}=a^2;$$

pero si el exponente del divisor es mayor que el del dividendo, el resultado será un exponente negativo.

Si se tiene $\frac{a^2}{a^5}$ el resultado es igual á $a^{2-5}=a^{-3}$ y como la definicion de exponentes no es aplicable á esta clase de expresiones, es indispensa-

ble interpretar símbolos como el resultado a^{-3}. Tenemos, por la regla de la division.

$$\frac{a^2}{a^5}=a^{-3}$$

Si dividimos por a^2 los dos términos del quebrado $\frac{a^2}{a^5}$ tendremos:

$$\frac{a^2}{a^5}=\frac{1}{a^3}$$

luego $\qquad a^{-3}=\frac{1}{a^3}$

En general, si quisieramos averiguar cuál es el valor de a^{-p} tendriamos:

$$a^{-p}=x$$

multiplicando por a^p $\qquad a^{-p}\times a^p=xa^p$

de donde (256) $\qquad 1=xa^p$

despejando á x $\qquad \frac{1}{a^p}=x$

luego $\qquad a^{-p}=\frac{1}{a^p}$

De esto resulta, que *toda cantidad cuyo exponente es negativo, es el símbolo de un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador la cantidad tomada con exponente positivo.*

Cuando se tiene una expresion como a^{-3}, el exponente negativo indica las veces que la cantidad entra, no como factor, sino como divisor.

Hay en Algebra la ventaja de que una vez obtenida una fórmula, ésta da el valor que se busca, cualesquiera que puedan ser los datos cuyas relaciones expresa. Así la division de a^m por a^n es a^{m-n} cualesquiera que puedan ser los valores de estas cantidades, aunque algunos resultados sea necesario interpretarlos para comprender su sentido.

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

1º Si $m>n$, esto es, si $m=n+d$, tendremos:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{n+d}}{a^n}=a^d$$

2º Si se tiene $m=n$, tendremos sustituyendo en la ecuacion (1)

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^m}=a^0=1$$

la expresion a^0 por sí sola carece de sentido, pero observando que ha resultado de dividir una cantidad por sí misma, se comprende que es símbolo de la unidad.

3° Si se tiene $m<n$, esto es, $n=m+p$: sustituyendo este valor en la ecuacion (1), tendremos:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+p}}=a^{m-m-p}=a^{-p}$$

Por otra parte $$\frac{a^m}{a^{m+p}}=\frac{a^m}{a^m a^p}=\frac{1}{a^p}$$

luego $$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$$

aquí se ha dividido una cantidad por otra mayor, y en consecuencia el resultado ha sido un quebrado.

Una vez explicada la significacion de las expresiones con exponentes negativos en virtud de las operaciones de que resultan, podremos ejecutar con ellas los cálculos como si fueran cantidades exponenciales comunes, cambiando la forma del último resultado cuando sea necesario.

300.—Teorema.—*Toda cantidad puede pasar del numerador al denominador de un quebrado, y viceversa con exponente de signo contrario.*

Demostracion.—Sea la expresion $\frac{b}{ac^n}$ y vamos á demostrar que c^n puede pasar al numerador cambiándole el signo á su exponente.

Como el valor de un quebrado no se altera multiplicando sus dos términos por una misma cantidad, multiplicando los del propuesto por c^{-n} tendremos:

$$\frac{b}{ac^n}=\frac{bc^{-n}}{ac^n c^{-n}}=\frac{bc^{-n}}{a}$$

cuyo resultado demuestra que una cantidad afectada de exponente positivo en el denominador, puede pasar al numerador con exponente negativo, y recíprocamente.

Sea ahora la expresion: $\frac{a}{bc^{-n}}$

multiplicando los dos términos del quebrado por c^n se tiene:

$$\frac{a}{bc^{-n}}=\frac{ac^n}{bc^{-n}c^n}=\frac{ac^n}{b}$$

lo que demuestra, que una cantidad con exponente negativo en el de-

nominanor puede pasar al numerador con exponente positivo y viceversa.

301.—Expresiones con exponentes fraccionarios positivos.—Hemos visto que para extraer la raíz de una cantidad, se divide el exponente de la cantidad por el índice de la raíz. (295) Así

$$\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2;$$

pero si aplicamos la misma regla á los casos en que el exponente sea menor que el índice de la raíz ó en los que no sea divisible exactamente por él, obtendremos una cantidad afectada de un exponente fraccionario.

Sea $$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$$

y aunque un exponente fraccionario no puede indicar el número de veces que una cantidad entra como factor; teniendo á la vista las operaciones de donde ha provenido, se comprende que una cantidad afectada de un exponente fraccionario es el símbolo de la raíz de una cantidad elevada á la potencia indicada por el numerador del exponente, siendo el índice de dicha raíz el denominador del mismo exponente.

En general $$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$$

ya sea $n>m$, $n=m$, ó $n<m$.

Demostraremos este principio de otra manera:

Sea $$a^{\frac{n}{m}}=x$$

elevando á m los dos miembros $a^n=x^m$

extrayendo la raíz m $$\sqrt[m]{a^n}=x$$

luego $$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$$

302.—Expresiones con exponentes fraccionarios negativos.—Cuando en el denominador de un quebrado hay una expresion radical cuyos exponentes no son divisibles exactamente por el índice de la raíz, se tendrá en el denominador una expresion con exponente fraccionario positivo, y si esta se pasa al numerador, el exponente cambia de signo y así se comprenderá la significacion de esta especie de expresiones.

Sea $$\frac{a}{\sqrt{b^3}}=\frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}=a.b^{-\frac{3}{2}}$$

Si se tiene $\dfrac{1}{\sqrt[m]{a^n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}$

luego toda cantidad cuyo exponente es fraccionario y negativo, es el símbolo de un quebrado cuyo numerador es la unidad y su denominador es la raíz de la cantidad elevada á la potencia que indica el numerador del exponente, siendo el denominador el índice de la raíz.

Es un caso particular de esta clase de expresiones el de una radical cuyo índice sea negativo, como $\sqrt[-n]{a}$:

$$\sqrt[-n]{a}=a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

luego $\sqrt[-n]{a}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$

En resúmen se tiene·

$$a^0=1,\quad a^{-p}=\frac{1}{a^p},\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},\ \text{y}\ \sqrt[-n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

303.—CÁLCULOS CON LAS CANTIDADES AFECTADAS DE EXPONENTES FRACCIONARIOS Y NEGATIVOS.—*Las operaciones de adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces, se ejecutan con las cantidades afectadas de exponentes negativos y fraccionarios aplicando las reglas dadas para cuando los exponentes son enteros y positivos; cambiando la forma del último resultado cuando sea necesario.* Como conforme á la definicion de la palabra exponente no se deben considerar a^0, a^{-p}, $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$ sino como símbolos ó expresiones de convencion para indicar los valores

$$1,\ \frac{1}{a^p},\ \sqrt[n]{a^m},\ \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},$$

demostraremos que en cualquier caso se obtiene el mismo resultado efectuando una operacion con las últimas expresiones ó con los símbolos que las representan, aplicando las reglas relativas á los exponentes positivos y enteros.

I.—Nos ocuparemos de demostrar que son exactos los resultados que se obtienen ejecutando las operaciones con las cantidadss afectadas de exponentes negativos, por las reglas dadas para cuando los exponentes son positivos.

1° Para multiplicar $a^m\times a^{-n}$ debemos reemplazar por a^{-n} su valor y tendremos:

$$a^m\times a^{-n}=a^m\times\frac{1}{a^n}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Si sin hacer ninguna trasformacion en las expresiones aplicamos la regla de los exponentes para la multiplicacion, tendremos que sumarlos, esto es, debemos ponerlos unos á continuacion de los otros con sus signos. Así:

$$a^m\times a^{-n}=a^{m-n}$$

resultado idéntico al obtenido ejecutando la operacion con la expresion $\dfrac{1}{a^n}$

Igualmente $a^{-m}\times a^{-n}=\dfrac{1}{a^m}\times\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{1}{a^{m+n}}$

Si sin hacer ninguna trasformacion ejecutamos la multiplicacion sumando los exponentes obtendremos el mismo resultado:

$$a^{-m}\times a^{-n}=a^{-m-n}=\frac{1}{a^{m+n}}$$

2° Sea por dividir $\dfrac{a^m}{a^{-n}}=\dfrac{a^m}{\frac{1}{a^n}}=a^{m+n}$

Restando los exponentes $\dfrac{a^m}{a^{-n}}=a^{m+n}$

Igualmente $\dfrac{a^{-m}}{a^n}=\dfrac{\frac{1}{a^m}}{a^n}=\dfrac{1}{a^{m+n}}$

Restando los exponentes $\dfrac{a^{-m}}{a^n}=a^{-m-n}=\dfrac{1}{a^{n+m}}$

Sea $\dfrac{a^{-m}}{a^{-n}}=\dfrac{1}{a^m}\div\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

Restando los exponentes $\dfrac{a^{-m}}{a^{-n}}=a^{n-m}$

3°—Elevacion á potencias $(a^{-n})^p=\left(\dfrac{1}{a^n}\right)^p=\dfrac{1}{a^{np}}$

Multiplicando el exponente $(a^{-n})^p=a^{-np}=\dfrac{1}{a^{np}}$

4°—Extraccion de raíces $\sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

Dividiendo el exponente $\sqrt[m]{a^{-n}} = a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

II.—Demostraremos que los cálculos ejecutados con las expresiones que tienen exponentes fraccionarios por las reglas relativas á las de las cantidades con exponentes enteros conducen á resultados exactos.

Con el objeto de dar con más facilidad la demostracion de que nos ocupamos, consideraremos los radicales reducidos al mismo índice, y los exponentes fraccionarios reducidos al mismo denominador, cuyas trasformaciones hemos visto (296) que pueden hacerse sin alterar el valor de las respectivas expresiones.

1°—Multiplicacion $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$

Sumando los exponentes $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m+p}{n}} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$

2°—Division $a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \div \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^p}} = \sqrt[n]{a^{m-p}}$

Restando los exponentes $a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m-p}{n}} = \sqrt[n]{a^{m-p}}$

3°— Elevacion $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$

Multiplicando el exponente $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}} = \sqrt[n]{a^{mp}}$

4°—Extraccion de raíces $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[np]{a^m}$

Dividiendo el exponente $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{np}} = \sqrt[np]{a^m}$

Otro tanto puede demostrarse por el mismo procedimiento cuando los exponentes fraccionarios son negativos, facilitándose siempre por este medio la ejecucion de los cálculos.

Se ve, pues, que en todos los casos el resultado de las operaciones ejecutadas con los valores que representan las cantidades afectadas de exponentes negativos ó fraccionarios, es el mismo que se obtiene suje-

tando estas expresiones á las reglas dadas para cuando los exponentes son positivos ó enteros.

Por vía de ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

Reduccion:

$$2ab^{\frac{1}{2}} - 8ac^{-2} - ab^{\frac{1}{2}} - 8dcb^{\frac{1}{2}} + 5c^{-2}d^3 + 8ac^{-2}$$
$$= (a - 8dc)\sqrt{b} + \frac{5d^3}{c^2}$$

Multiplicacion:

$$ba^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} \times a^{-\frac{1}{5}} = ba\sqrt[20]{a}$$

$$(5a^{\frac{7}{4}} - 6aba^{-\frac{1}{4}})\ (a^{\frac{1}{3}} - 7ba^{\frac{2}{3}}) = (5a^2 - 6ba)\sqrt[12]{a} +$$
$$+ (42ab^2 - 35ba^2)\sqrt[12]{a^5}$$

Division:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[6]{a}, \quad \frac{120ab^{\frac{1}{2}}}{3.5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} = 8\sqrt{5a}$$

Elevacion:

$$\left(a^{\frac{4}{6}}\right)^3 = a^2, \quad \left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{12} = \frac{1}{a^{10}}$$

Extraccion de raíces:

$$\sqrt[4]{\frac{a^2\ b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}\ b^{\frac{2}{3}}}} = \frac{a^{\frac{2}{4}}\ b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{2}{12}}\ b^{\frac{2}{12}}} = a^{\frac{1}{3}}\ b^{-\frac{1}{24}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[24]{b}}$$

MÉTODO PARA HACER RACIONAL EL DENOMINADOR DE UNA FRACCION.—Cuando el denominador de una fraccion es irracional conviene en muchos casos trasformarla en otra cuyo denominador sea racional.

1° *El denominador de la fraccion es un monomio.* Sea la fraccion $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Multiplicando sus dos términos por $\sqrt{b}$ se trasforma en su equivalente $\frac{a\sqrt{b}}{b}$, cuyo denominador es racional.

Consideremos la fraccion $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$. Multiplicando sus dos términos por $\sqrt[3]{b} \times \sqrt[3]{b} = (\sqrt[3]{b})^2$, se obtiene la fraccion equivalente

$$\frac{a(\sqrt[3]{b})^2}{\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{b}.} = \frac{a(\sqrt[3]{b})^2}{b}$$

cuyo denominador es racional.

2° *El denominador de la fraccion es un binomio.* Sea la fraccion $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$. Multiplicando sus dos términos por $b-\sqrt{c}$, se obtiene la fraccion equivalente $\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$ cuyo denominador es racional.

Igualmente la fraccion $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$ es equivalente á $\frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$.

Sea aun la fraccion $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Multiplicando sus dos términos por $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ se obtiene la fraccion equivalente $\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$ cuyo denominador es racional.

Igualmente $$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

3° *El denominador de la fraccion es un trinomio.* Sea la fraccion $\frac{a}{b+c+\sqrt{d}}$. Considerando el denominador como un binomio cuyo primer término es la suma $b+c$, y el segundo $\sqrt{d}$; multiplicando los dos términos de la fraccion propuesta por $(b+c)-\sqrt{d}$, se obtiene la fraccion equivalente $\frac{a[(b+c)-\sqrt{d}]}{(b+c)^2-d}$, cuyo denominador es racional.

Igualmente $$\frac{a}{b+c-\sqrt{d}} = \frac{a[(b+c)+\sqrt{d}]}{(b+c)^2-d}$$

Consideremos ahora una fraccion cuyo denominador sea un trinomio del que dos términos son irracionales. Sea la fraccion $\frac{a}{b+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ Multiplicando sus dos términos por $b-(\sqrt{c}+\sqrt{d})$, se obtiene la fraccion equivalente $\frac{a[b-(\sqrt{c}+\sqrt{d})]}{b^2-(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2}$ ó $\frac{a[b-(\sqrt{c}+\sqrt{d})]}{b^2-c-d-2\sqrt{cd}}$. El denominador de esta última puede ser considerado como un binomio cuyo primer término es la suma algebráica b^2-c-d, y el segundo $-2\sqrt{cd}$, que equivale al segundo caso que hemos examinado ya.

Consideremos en fin una fraccion cuyo denominador tenga todos sus términos irracionales. Sea la fraccion $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$. Considerando el denominador como un binomio cuyo primer término es $(\sqrt{b}+\sqrt{c})$ y el segundo $\sqrt{d}$; multiplicando los dos términos de la fraccion por $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$, se obtiene la fraccion equivalente $\frac{a[(\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{d}]}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-d} = \frac{a[(\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{d}]}{b+c-d+2\sqrt{bc}}$ el denominador de cuya fraccion está comprendido en el 2° caso que resolvimos antes.

El método es tan sencillo que nos parece inútil ocuparnos de todas las combinaciones de signos que pueden presentar los términos del denominador.

4° *El denominador de la fraccion es un cuatrinomio.* Sea por ejemplo este denominador: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$. Considerándolo como la suma de dos términos, de los cuales el primero es $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ y el segundo $(\sqrt{c}+\sqrt{d})$; multiplicando los dos términos de la fraccion por la diferencia $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d})$, se obtendrá una fraccion equivalente cuyo denominador será

$$a+b-c-d+2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}$$

y así se convertirá este caso en uno de los que se han resuelto ántes.

Fórmula de Newton para elevar un binomio á cualquiera potencia.

304.—Elevacion de un binomio á potencias sucesivas.—Hemos dicho que en la potencia de una cantidad, ésta entra tantas veces como factor como unidades tiene el exponente de la potencia; y por consiguiente, cuando no se tienen reglas para determinar el resultado, bastará multiplicar sucesivamente una cantidad por sí misma para formar la potencia que se quiera.

Para deducir las reglas correspondientes á la elevacion de un binomio, elevaremos $(x+a)$ sucesivamente á la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª etc. potencia, y por analogía inferiremos lo que debe hacerse para determinar el resultado de otra cualquiera potencia que se busque; haciendo notar que hemos escogido un binomio cuyos términos son positivos y carecen de coeficiente y de exponente; no siendo aplicables nuestras conclusiones, por tanto, sino á binomios de esta forma.